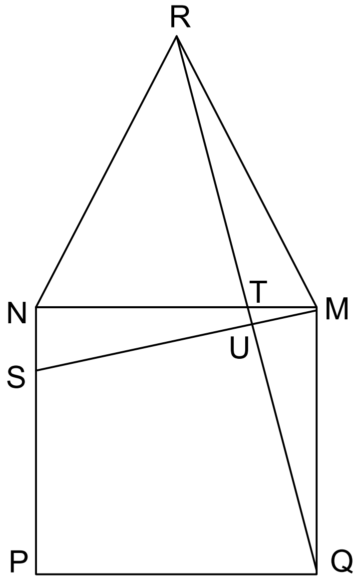
Colección 2

1. Resuelve la siguiente ecuación, para $0 \leq x < 2\pi$:

$$\log(\cos^2 x + \operatorname{sen} x) - \log\cos 2x = \log_3 1$$

2. En la figura :
   - MNPQ es cuadrado,
   - T y S puntos de $\overline{MN}$ y $\overline{NP}$ respectivamente,
   - MNR triángulo equilátero,
   - $\overline{RQ}$ y $\overline{MS}$ se cortan en U y
   - $\angle SMQ = \angle PQT$



a) Prueba que $\overline{NS} = \overline{MT}$.
b) Calcula la amplitud del ángulo $\angle MRQ$.
c) Si el perímetro del cuadrado es 32 cm, halla el área del triángulo Δ MRQ.

3. En un Instituto Preuniversitario en el Campo participaron en el curso anterior todos sus alumnos en las Brigadas Estudiantiles de Trabajo. Si la cantidad de hembras participantes excedió en 70 al 40% de la cantidad de varones, y la razón entre la cantidad de hembras y varones es 3:4. ¿En cuánto supera la cantidad de varones a la cantidad de hembras?

4. Sean las funciones reales f , g y h, definidas por las ecuaciones:

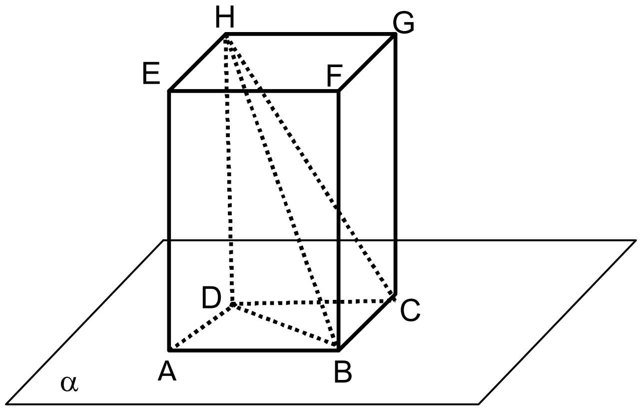
$$f(x) = 3^{2+\sqrt{x+5}} \quad , \quad g(x) = 4^{3x} \quad \text{y} \quad h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+5}$$

   a) Determina el dominio y la imagen de la función f.
   b) Calcula los valores reales para los cuales se cumple que
      $g(x) \geq h(x)$.
   c) Halla las coordenadas del punto, en que el gráfico de la función h corta al eje y.

d) Analiza si el par $\left(\log_2 \sqrt{2}; 8\tan\frac{5\pi}{4}\right)$ pertenece a la función g.

5. En la figura se muestra un prisma recto ABCDEFGH, situado en el plano α. La base del prisma es el cuadrado ABCD y la diagonal $\overline{HB}$ del prisma, forma con el plano que contiene la base un ángulo de 45º.

a) Prueba que el triángulo BCH es rectángulo.
b) Si el volumen del prisma es $125\sqrt{2}\ \text{cm}^3$, halla su área total.
c) Calcula $\cos(\angle DBH + \angle BHC)$.



Respuestas

PREGUNTA 1

Variante 1

$\log(\cos^2 x + \text{sen}x) - \log\cos 2x = 0$

$\log(\cos^2 x + \text{sen}x) - \log\cos 2x = 0$

Variante 2

$$\log\frac{\cos^2 x+\text{senx}}{\cos 2x}=0$$ $$\log(\cos^2 x+\text{senx})=\log\cos 2x$$

$$\frac{\cos^2 x+\text{senx}}{\cos 2x}=1$$ $$\cos^2 x+\text{senx}=\cos 2x$$

$$\cos^2 x+\text{senx}=\cos^2 x-sen^2 x$$

$$sen^2 x+senx=0$$

$$senx(senx+1)=0$$

$$senx=0 \qquad senx=-1$$

$$x_1 = 0,\ \ x_2 = \pi,\ \ x_3 = \frac{3\pi}{2}$$

Comprobación

Para $x_1 = 0$
MI: $\log(\cos^2 0 + \text{sen}0) - \log\cos 0$
$= \log(1+0)-\log 1$
$= \log 1-\log 1$
$= 0$
MD: $\log_3 1=0$
MI = MD

Para $x_2 = \pi$
MI: $\log(\cos^2 0 + \text{sen}0) - \log\cos 0$
$= \log(1+0)-\log 1$
$= \log 1-\log 1$
$= 0$
MD: $\log_3 1=0$
MI = MD

Para $x_3 = \frac{3\pi}{2}$

MI: $\log(\cos^2 \frac{3\pi}{2} + \text{sen}\frac{3\pi}{2}) - \log\cos\frac{3\pi}{2}$ No está definido porque log(-1) no existe

R: Las soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = \pi$.

PREGUNTA 2

a) En ΔMNS y ΔMTQ
$\angle$MNS = $\angle$NMQ por ser ángulos interiores del cuadrado MNPQ

$\overline{MN} = \overline{MQ}$ por ser lados del cuadrado MNPQ
$\angle NMS = \angle TQM$ por ser $\angle NMS = \angle NMQ - \angle SMQ$ y $\angle TQM = \angle MQP - \angle PQT$ ya que $\angle NMQ = \angle PQM$ por ser ángulos rectos interiores del cuadrado MNPQ y $\angle SMQ = \angle PQT$ por datos.
Luego el $\Delta MNS = \Delta MTQ$ por tener respectivamente iguales un lado y ángulos adyacentes a él.
Por tanto $\overline{NS} = \overline{TM}$ por ser elementos homólogos de triángulos iguales o porque en triángulos iguales a ángulos iguales se le oponen lados iguales.

b) $\angle NMQ = 90^0$ por ser ángulo interior del cuadrado MNPQ
$\angle NMR = 60^0$ por ser ángulo interior del triángulo equilátero MNR
Luego $\angle RMQ = 150^0$ por suma de ángulo consecutivos.
Como MNPQ es cuadrado, MNR es un triángulo equilátero y $\overline{MN}$ es lado común para ambos entonces se cumple que $\overline{MN} = \overline{MQ}$ y $\overline{MN} = \overline{RM}$, por lo que se cumple que $\overline{MQ} = \overline{RM}$. Por lo que ΔRQM es isósceles de base $\overline{RQ}$ y se puede afirmar que $\angle MRQ = \angle MQR$.
En ΔRQM isósceles de base $\overline{RQ}$ se cumple:
$\angle RMQ + \angle MQR + \angle MRQ = 180º$ por suma de ángulos interiores de un triángulo
$2\angle MRQ = 180º - 150º$,
$2\angle MRQ = 30º$,
$\angle MRQ = 15º$

c) $P_{MNPQ} = 32$ cm, $4a = 32$ cm , $a = 8$ cm

Como ΔRQM es isósceles de base $\overline{RQ}$, entonces $\overline{RM} = \overline{MQ} = 8$ cm
$A_{MRQ} = ½\ \overline{RM} \cdot \overline{MQ} \cdot \text{sen}\angle RMQ$
$A_{MRQ} = ½\ (8\text{ cm})^2$. sen 150º = ½ 64 cm^2 ½ = 16 cm^2.

Respuesta: El área del triángulo MRQ es 16 cm^2.

<u>PREGUNTA 3</u>

Sea: **x** la cantidad de hembras participantes,
y la cantidad de varones participantes

$$\begin{cases} x-70 = 40\% y & (1) \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{4} & (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x-70 = \dfrac{40}{100} y & (1) \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{4} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-70 = \dfrac{2}{5} y & (1) \\ x = \dfrac{3}{4} y & (2') \end{cases}$$

Sustituyendo (2´) en (1)

$\frac{3}{4} y - 70 = \frac{2}{5} y$

$15y - 1400 = 8y$

$7y = 1400$

$Y = 200$ (3)

Sustituyendo (3) en (1)

$X - 70 = \frac{2}{5} 200$

$X - 70 = 80$

$X = 150$

$200 - 150 = 50$

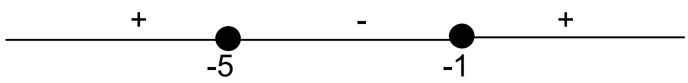
Respuesta: La cantidad de varones supera en 50 a la cantidad de hembras.

PREGUNTA 4

a) $x + 5 \geq 0$
   $x \geq -5$
   $\text{Domf} = \{x \in R : x \geq -5\}$
   $\text{Imgf} = \{y \in R : y \geq 9\}$

b) $g(x) \geq h(x)$
   $4^{3x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+5}$
   $(2^2)^{3x} \geq (2^{-1})^{x^2+5}$
   $2^{6x} \geq 2^{-x^2-5}$
   $6x \geq -x^2 - 5$
   $-x^2 - 6x - 5 \leq 0$
   $x^2 + 6x + 5 \geq 0$

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$
$$(x+5)(x+1) = 0$$
$$x_1 = -5 \;\; x_2 = -1$$



Los valores de x para los cuales se cumple la condición son $x \in R : x \leq -5$ o $x \geq -1$

c) c) $h(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0+5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \frac{1}{32}$

El gráfico de la función h corta al eje y en el punto $\left(0; \frac{1}{32}\right)$

d)

$$y = 4^{3x}$$
$$8 = 4^{3\frac{1}{2}}$$
$$8 = 4^{\frac{3}{2}}$$
$$8 = \sqrt{4^3}$$
$$8 = \sqrt{64}$$
$$8 = 8$$

$$\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$$
$$8 \tan \frac{5\pi}{4} = 8$$

El par pertenece a la función

PREGUNTA 5

a) Como ABCDEFGH es un prisma recto apoyado sobre el plano α entonces $\overline{HD} \perp \alpha$

Como ABCDEFGH es un prisma recto, $\overline{HC}$ es diagonal de la cara DCGH por tanto $\overline{HC}$ es oblicua al plano α

Como ABCDEFGH es un prisma cuya base ABCD está sobre el plano α y $\overline{HD} \perp \overline{DC}$ entonces $\overline{DC}$ es la proyección de la oblicua $\overline{HC}$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Luego si } \overline{HC} \text{ oblicua al plano } \alpha \\ \overline{DC} \text{ proyección de la oblicua} \\ \overline{BC} \text{ pasa por el pie de la oblicua} \\ \overline{BC} \perp \overline{DC} \text{ por ser ABCD cuadrado.}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{HC} \perp \overline{BC} \text{ por el teorema de las tres perpendiculares}$$

Si $\overline{HC} \perp \overline{BC}$ entonces el triángulo BCH es rectángulo en C

b) En triángulo HDB rectángulo D por ser $\overline{HD} \perp \overline{DB}$

como el $\angle HBD = 45^\circ$ por datos entonces $\angle DHB = 45^\circ$ por tanto el triángulo HDB es rectángulo en D de ahí que $\overline{DB} = \overline{HD}$

En triángulo ABD rectángulo en A se cumple

$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2$ por teorema de Pitágoras

Sea $\overline{AB} = \overline{AD} = a$

luego $\overline{BD}^2 = 2a^2$

$\overline{BD} = \sqrt{2}a$

Como $\overline{DB} = \overline{HD}$ entonces $h = \overline{HD} = \sqrt{2}a$

$V_p = A_B h$

$125\sqrt{2} = a^2 h$

$125\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}a$

$125\sqrt{2} = a^3\sqrt{2}$

$125 = a^3$

$5 = a$

Luego las aristas de la base del prisma miden 5,0 cm

$A_T = 2A_B + A_L$

$A_T = 2a^2 + 4a\sqrt{2}\,a$

$A_T = 2(5cm)^2 + 4\cdot 5cm\cdot\sqrt{2}\,5cm$

$A_T = 2\cdot 25\ cm^2 + 100\cdot\sqrt{2}\,cm^2$

$A_T = 50\ cm^2 + 100\cdot 1{,}41\ cm^2$

$A_T = 191\ cm^2$

c) En ΔHDB rectángulo en D

sen $45^0 = \dfrac{\overline{HD}}{\overline{HB}}$ de donde $\overline{HB} = \dfrac{2\cdot 5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 10$

En ΔBCH rectángulo en C

$\overline{HB}^2 = \overline{HC}^2 + \overline{BC}^2$ por el teorema de Pitágoras

$\overline{HC}^2 = \overline{HB}^2 - \overline{BC}^2$

$\overline{HC}^2 = 100\ cm^2 - 25\ cm^2$

$\overline{HC} = 5\sqrt{3}$ cm

$\tan \angle BHC = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{HC}}$

$\tan \angle BHC = \dfrac{5}{5\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ luego el $\angle BHC = 30^0$

$\cos(\angle DBH + \angle BHC) = \cos(45^0 + 30^0) = \cos 45^0 \cdot \cos 30^0 - \text{sen } 45^0 \cdot \text{sen } 30^0$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$= (2{,}45 - 1{,}41):4$$

$$= 0{,}26$$