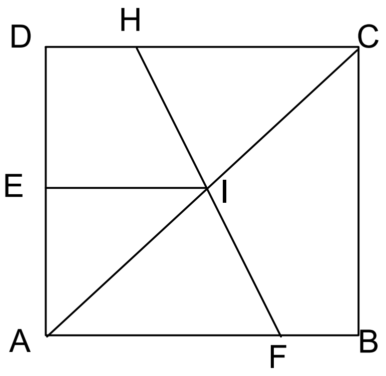
Colección 3

1. Resuelve la siguiente ecuación:

$$25 = 5^{\cos 2x} \cdot 125^{\operatorname{sen} x}$$

2. En la figura:



- ABCD es un cuadrado de 16,0 cm^2 de área.
- $\overline{DH} = \overline{FB} = 1{,}0\,cm$.
- I punto donde se cortan $\overline{AC}$ y $\overline{HF}$

a) Prueba que I es punto medio de $\overline{AC}$.
b) Halla el área del trapecio EIHD de bases $\overline{EI}$ y $\overline{DH}$.

3. Dada la función f definida por la ecuación $f(x) = \log \dfrac{x^3+1}{x^3+4x^2-x-4}$

   a) Determina su dominio.

   b) Para qué valor de x real se cumple que $f(x) = \log 50 - 2\log\sqrt{5} - 1$

4. La siguiente tabla muestra las tarifas aplicadas antes y después de las medidas tomadas para el ahorro de la electricidad.

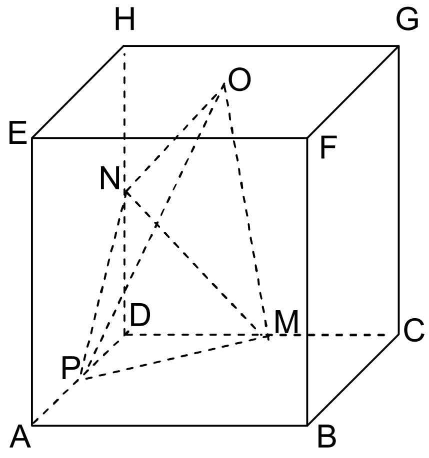
Grupos	I		II		III		IV	
Consumo	Hasta 100 Kilowatt / hora		+de100 hasta 150 Kilowatt / hora		+de150 hasta 200 Kilowatt / hora		+200 hasta 300 Kilowatt / hora	
	Precio del Kilowatt / hora		Precio del Kilowatt / hora por el consumo adicional por encima del consumo máximo del grupo anterior.					
	Antes	Después	Antes	Después	Antes	Después	Antes	Después
	$ 0,09	$ 0,09	$0,20	$0.30	$0.20	$0.40	$0.20	$0.60

Una familia que estaba en el cuarto grupo de consumo eléctrico, en el último mes pagado con la vieja tarifa, analizó que para seguir pagando lo mismo por el consumo eléctrico con la nueva tarifa debía consumir 61 Kilowatt / hora menos, quedando así en el tercer grupo. ¿Cuál fue el costo del consumo eléctrico de esta familia en el último mes pagado con la vieja tarifa?

5. En la figura:

- ABCDEFGH es un cubo.
- M, N y P son los puntos medios de las aristas $\overline{CD}$, $\overline{DH}$ y $\overline{AD}$ respectivamente.
- O punto de intersección de $\overline{HF}$ y $\overline{EG}$.

a) Si el volumen del cubo es de 64 cm^3. Calcula su área total.
b) Si $\overline{ON} = 2\sqrt{3}$ cm y $\overline{NP} = 2\sqrt{2}$ cm. Clasifica el triángulo ONP según sus lados y según sus ángulos.
c) Si $\overline{ON} \perp \overline{MN}$. Calcula el volumen de la pirámide ONPM.



Respuestas

Pregunta 1

$5^2 = 5^{COS2X}5^{3SEN2X}$

$5^2 = 5^{COS2X+3SENX}$

$2 = \cos 2x + 3senx$

$2 = \cos^2 x - sen^2 x + 3senx$

$2 = 1 - \text{sen}^2 x - sen^2 x + 3senx$

$2\text{sen}^2 x - 3senx + 1 = 0$

$(2\text{senx} - 1)(\text{senx} - 1) = 0$

$\text{senx} = \frac{1}{2} \quad \text{senx} = 1$

$X = \frac{\pi}{6} + 2K\pi \quad X = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$

$X = \frac{5\pi}{6} + 2K\pi \qquad k \in Z$

PREGUNTA 2

a) Como el área de (ABCD) = 16 cm^2 tenemos que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{DC} = \overline{DA} = 4{,}0cm$

Si $\overline{DH} = \overline{FB}$ $\quad Y \quad$ $\overline{AB} = \overline{DC}$ *entonces tenemos que* $\overline{HC} = \overline{AF}$ (1) por resta de segmentos.

Los ángulos $\angle$CAB = $\angle$DCA (2) y $\angle$HFA = $\angle$FHC (3) por alternos entre paralelas por lo que de 1, 2 y 3 podemos concluir que los triángulos HIC y AIF son iguales por tener un lado igual y los ángulos adyacentes respectivamente iguales.

Por tanto $\overline{AI} = \overline{CI}$ por elementos homólogos en triángulos iguales, resulta que I es el punto medio de $\overline{AC}$.

b) Como DHIE es un trapecio de bases $\overline{DH}$ *y* $\overline{EI}$ se tiene que $\overline{DC}$ *y* $\overline{EI}$ son paralelas y como I es punto medio de $\overline{AC}$ entonces $\overline{EI}$ es la paralela media en el triángulo

ACD y su longitud es igual a 2,0cm; como E es punto medio entonces $\overline{DE} = 2{,}0cm$ y $A = \frac{\overline{DH} + \overline{EI}}{2}\overline{DE} = 3{,}0cm^2$

<u>PREGUNTA 3</u>

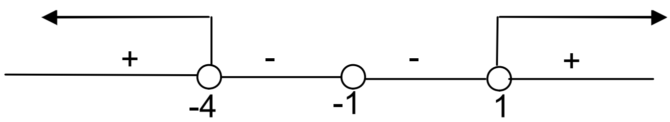
<u>a).</u>

$$\frac{x^3 + 1}{x^3 + 4x^2 - x - 4} > 0$$

$$\frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x^2 - 1)(x+4)} > 0$$

$$\frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)(x-1)(x+4)} > 0$$

Como $x^2 - x + 1 > 0$ para todo x real tenemos que



$Domf = \{x \in \Re : x < -4 \ \ o \ x > 1\}$

b).

$$\log\frac{x^3+1}{x^3+4x^2-x-4} = \log 50 - 2\log\sqrt{5} - 1$$

$$\log\frac{x^3+1}{x^3+4x^2-x-4} = \log 50 - \log\sqrt{5}^{\,2} - 1$$

$$\log\frac{x^3+1}{x^3+4x^2-x-4} = \log 50 - \log 5 - 1$$

$$\log\frac{x^3+1}{x^3+4x^2-x-4} = \log\frac{50}{5} - 1$$

$$\log\frac{x^3+1}{x^3+4x^2-x-4} = \log 10 - 1$$

$$\log\frac{x^3+1}{x^3+4x^2-x-4} = 0$$

$$\frac{x^3+1}{x^3+4x^2-x-4} = 1$$

$$x^3+1 = x^3+4x^2-x-4$$

$$0 = 4x^2-x-5$$

$$(4x-5)(x+1) = 0$$

$$x = \frac{5}{4} \quad x = -1$$

Luego x = $\frac{5}{4}$ es la solución

<u>PREGUNTA 4</u>

x: consumo por encima de 100 antes
lo que paga por el consumo antes 9 + 0.20x
x – 61 consumo por encima de 100 después
lo que paga por el consumo después 9 + 0.30·50 + 0.40(x – 61 – 50)
9 + 0.20x = 9 + 0.30·50 + 0.40(x – 61 – 50)
9 + 0.20x = 9 + 15 + 0.40x – 0.40·111
0.20x – 0.40x = 15 – 44,4
-0.20x = - 29,4
x = 147
9 + 0.20·147 = 38.40
R: La familia paga $38.40.

Otra vía.

x: consumo por encima de 100 antes
y consumo por encima de 100 después
$x - y = 61$

lo que paga por el consumo antes $9 + 0.20x$
lo que paga por el consumo después $9 + 0.30 \cdot 50 + 0.40(y - 50)$
$9 + 0.20x = 9 + 0.30 \cdot 50 + 0.40(y - 50)$

$$0.20x - 0.40y = -5$$
$$X - 2y = -25$$
$$X - y = 61 \ . \ (-2)$$
$$-x = -147$$
$$X = 147$$

$9 + 0.20 \cdot 147 = 38.40$
R: La familia paga \$38.40.

PREGUNTA 5

a). Volumen del cubo $V = a^3$ entonces $64 = a^3$ y $a = 4$ cm
$A_T = 6a^2 = 6 \cdot 16 = 96$ cm^2
b). Tracemos $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ con $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ entonces en el triángulo OPQ se cumple que $\overline{OP}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{OQ}^2$ por el teorema de Pitágoras
$\overline{OP}^2 = 2^2 + 4^2 = 20$ entonces $\overline{OP} = 2\sqrt{5}$ cm
Por lo que el triángulo ONP es escaleno
En el triángulo ONP se tiene que $20 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2$ y $20 = 8 + 12$ por lo que se cumple que $\overline{OP}^2 = \overline{NP}^2 + \overline{NO}^2$ y por tanto el triángulo ONP es rectángulo en N.
c). Como $\overline{NO} \perp \overline{MN}$ y $\overline{NO} \perp \overline{NP}$ entonces $\overline{NO}$ es perpendicular al plano que contiene a los puntos M, N y P.
$\therefore$ $\overline{NO}$ es la altura de la pirámide y la base es el triángulo equilátero MNP

$$V_{ONPM} = \frac{1}{3}A_B \cdot h = \frac{1}{3}\overline{NP}^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{1}{3}(2\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2\sqrt{3}) = 4 \text{ cm}^3$$