Colección 4

1. Sean las expresiones algebraicas $P = m^3 - m^2 - 17m - 15$; $Q = 3m^2 - 75$ y $R = \dfrac{2}{m + 5}$.

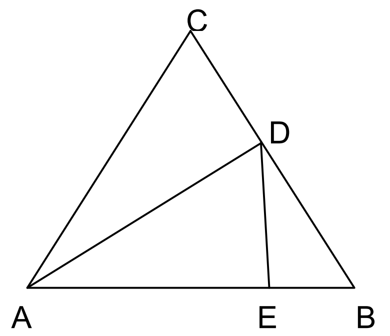
a). Determina el dominio de R.

b). Halla los ceros de P.

c). Si $N = \dfrac{P}{Q} : R$, calcula los valores reales de m para los cuales se cumple que $N \geq 0$.

2. En el triángulo ABC se han trazado $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ y $\overline{DE} \perp \overline{AB}$, siendo D y E puntos situados en los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente.

- $\overline{AD}$ es la bisectriz del $\angle BAC$
- $\overline{AD} = 6cm$
- $\angle ACB = 60º$.



a). Prueba que el triángulo ABC es equilátero.

b). Demuestra que los triángulos BDE y ADC son semejantes.

c). Calcula el perímetro del triángulo AED.

d). Halla el área del triángulo ABC.

3. a). Determina los valores de x para los cuales $3^{sen^2 x} = 9^{\cos(2\pi - x) + 1}$.

b). Sean a y b dos números reales positivos tales que $a + b = \dfrac{\pi}{2}$, si $\dfrac{sen\ a}{sen\ b} = \dfrac{15}{8}$; halla el valor numérico de *sen a*.

4. El equipo de baloncesto de la provincia de Ciego de Ávila en el pasado campeonato nacional había promediado 87 puntos en los primeros partidos, si en el siguiente anotó 105 puntos y su promedio aumentó a 90 puntos por partido.

a). ¿Cuántos partidos había celebrado el equipo hasta promediar 90 puntos?

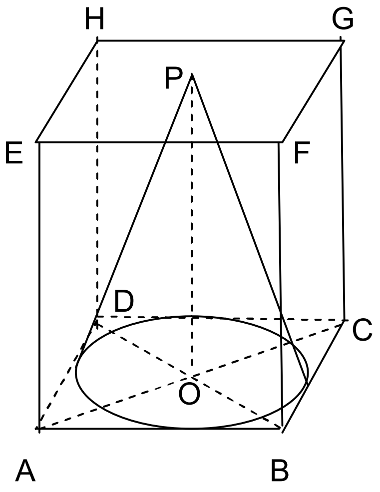
b). ¿Cuántos puntos había anotado el equipo cuando su promedio era de 87 puntos?

5. La figura representa un cuerpo macizo formado por un prisma recto cuya base es el paralelogramo ABCD al cual se le ha perforado un cono cuya base es la circunferencia inscrita a ABCD y $\overline{OP}$ es la altura de ambos.

Si O es el punto donde se cortan las diagonales del paralelogramo; $\overline{AC} = \overline{BD}$, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, $\overline{OP} = \overline{AB}$ + 2dm y la distancia del punto A al punto P es de $2\sqrt{11}$ dm.

a). ¿Es el paralelogramo ABCD un cuadrado?. Justifica tu respuesta

b). Calcula el área total del prisma ABCDEFGH.



c). Determina el volumen del cuerpo.

Respuestas

PREGUNTA 1

a). m + 5 = 0 para m = - 5, entonces Dominio de R = $\{m \in R,\ m \neq -5\}$.

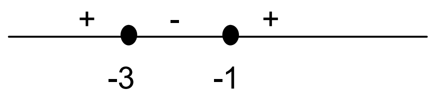
b). P = 0 para $m^3 - m^2 - 17m - 15 = 0$

	1	-1	-17	-15
-1		-1	2	15
	1	-2	-15	0

Un cero es -1 entonces $m^2 - 2m - 15 = 0$ y $(m - 5)(m + 3) = 0$ entonces m = 5 ó m = -3.

Los ceros de P son -1, -3, 5.

c). $N = \dfrac{(m+1)(m-5)(m+3)}{3(m+5)(m-5)} : \dfrac{2}{m+5} = \dfrac{(m+1)(m+3)}{3(m+5)} \cdot \dfrac{m+5}{2} = \dfrac{(m+1)(m+3)}{6} \geq 0$



$S = \{m \in R,\ m \geq -1 \text{ ó } m \leq -3,\ m \neq -5,\ m \neq 5\}$

PREGUNTA 2

a) Como $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ y $\overline{AD}$ es la bisectriz del $\angle BAC$, entonces el ΔABC es isósceles de base $\overline{BC}$ y como $\angle ACB = \angle ABC = 60^0$, entonces $\angle BAC = 60^0$ y el ΔABC es equilátero por tener sus tres ángulos iguales..

b) En los triángulos ADC y BDE se tiene:
$\angle ACB = \angle ABC = 60^0$
$\angle ADC = 90^0$ por ser $\overline{AD} \perp \overline{BC}$
$\angle BED = 90^0$ por ser $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ por lo que $\angle ADC = \angle BED$ y $\Delta ADC \sim \Delta BDE$ por tener respectivamente iguales dos ángulos.

c) $P_{AED} = \overline{AE} + \overline{DE} + \overline{AD} = \overline{AE} + \overline{DE} + 6cm$
En ΔAED se tiene $\angle DAE = 30^0$ por ser $\overline{AD}$ bisectriz del $\angle BAC = 60^0$ entonces $\overline{DE} = 3$ cm por el teorema del triángulo rectángulo con un ángulo agudo de 30^0, entonces $\cos 30^0 = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$ y $\overline{AD} \cdot \cos 30^0 = \overline{AE} = 6 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y $\overline{AE} = 3\sqrt{3}$ cm y
$P_{AED} = 3\sqrt{3} + 3 + 6 = 9 + 3\sqrt{3} = 14{,}2$ cm

d) $A_{ABC} = ½ \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 3\overline{BC}$
En ΔADC rectángulo en D se tiene $\cos 30^0 = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$ y $\overline{AC} = \dfrac{\overline{AD}}{\cos 30^0} = \dfrac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{12}{\sqrt{3}}$

$\overline{AC} = 4\sqrt{3}$ cm $= \overline{BC}$ y $A_{ABC} = 3 \cdot 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3} = 20{,}8$ cm^2.

<u>Otra Vía</u> para el inciso a
En el triángulo ADC rectángulo en D se tiene que $\angle CAD = 30^0$ por ser complementario con el $\angle ACD = 60^0$
$\angle DAC = 30^0$ por ser $\overline{AD}$ la bisectriz del $\angle BAC$, entonces $\angle BAC = 60^0$
$\angle ABC = 60^0$ por suma de ángulos interiores de un triángulo.
Entonces el triángulo ABC es equilátero.

PREGUNTA 3

2. a) $3^{sen^2 x} = 9^{\cos(2\pi - x) + 1}$

$$3^{sen^2 x} = 3^{2(\cos x + 1)}$$

$sen^2 x = 2\cos x + 2$
$1 - \cos^2 x = 2\cos x + 2$
$\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0$
$(\cos x + 1)^2 = 0$ de aquí que $\cos x = -1$ y $x = \pi + 2k\pi,\ k \in Z$

b). como a + b = $\dfrac{\pi}{2}$, entonces senb = cosa y la expresión se transforma en

$\dfrac{sena}{\cos a}$ = tan a = $\dfrac{15}{8}$, utilizando la identidad 1 + tan^{2}a = $\dfrac{1}{\cos^2 a}$ tenemos

$1 + \dfrac{225}{64} = \dfrac{1}{\cos^2 a}$

$\dfrac{289}{64} = \dfrac{1}{\cos^2 a}$ entonces cos^{2}a = $\dfrac{64}{289}$

sen^{2}a = 1 – cos^{2}a = 1 - $\dfrac{64}{289}$ = $\dfrac{225}{289}$ entonces sen a = $\dfrac{15}{17}$.

<u>PREGUNTA 4</u>

a). Sea x la cantidad de tantos anotados y n la cantidad de partidos celebrados

$$\begin{cases} \dfrac{x}{n} = 87 & (1) \\ \dfrac{x+105}{n+1} = 90 & (2) \end{cases}$$

De (1) se tiene que x = 87n y sustituyendo en (2)

$\dfrac{87n+105}{n+1}$ = 90 entonces 87n + 105 = 90n + 90

3n = 15 por lo que n = 5

R: Había celebrado 6 partidos.

b). 87·5 = 435

R: Había anotado 435 puntos.

<u>Nota</u>: Si declara solamente n y plantea de inicio la ecuación que depende de n tiene todos los puntos acumulados hasta ahí.

Otra Vía:

Este problema tiene una vía de solución más sencilla que el alumno puede seguir ya que puede calcular 105 – 90 = 15 que es la cantidad de puntos por encima del promedio y como 3 es la diferencia entre el promedio de los puntos anotados y el promedio al que llegó, entonces 15:3 = 5 es la cantidad de partidos celebrados y de aquí obtener la respuesta de los dos incisos.

PREGUNTA 5

a). Si es un cuadrado porque sus diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son iguales y se cortan perpendicularmente.

b). Sea a la longitud del lado del cuadrado, entonces $\overline{AB}$ = a, $\overline{AO} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$ por ser la mitad de la diagonal del cuadrado y $\overline{OP}$ = a + 2

En ΔAOP rectángulo en O se tiene $\overline{AP}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{AO}^2$ por el teorema de Pitágoras

$(2\sqrt{11})^2 = (a + 2)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2 = a^2 + 4a + 4 + ½\, a^2$

$44 = \frac{3}{2}a^2 + 4a + 4$

$3a^2 + 8a – 80 = 0$ entonces $(3a + 20)(a – 4) = 0$

$a = -\frac{20}{3}$ no puede ser ó $a = 4$ entonces $\overline{AB} = 4$ dm y $\overline{OP} = 6$ dm

El área total es $A = 2A_B + A_L = 2\cdot4^2\cdot + 4\cdot4\cdot6 = 32 + 96 = 128$

por lo que el área total es de 128 dm^2

c). $V_P = A_B\cdot h = 4^2\cdot6 = 96\ dm^3$

$V_C = \frac{1}{3}\pi r^2\cdot h = \frac{1}{3}\cdot2^2\pi\cdot6 = 8\pi = 25,12\ dm^3$

$V = (96 – 25,12)dm^3 = 70,88\ dm^3 \approx 71\ dm^3$