Colección 5

1. Lee detenidamente la pregunta y responde:

1.1 Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

a) ___ El conjunto imagen de la función h definida en $\Re$ por la ecuación $h(x) = (3)^{x-4} - 9$ es $\{y \in R\text{: } y \geq -9\}$.

b) ___ La función cuya ecuación es $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ es monótona decreciente en todo su dominio.

c) ___ La función g definida en $\Re$ por la ecuación $g(x) = (x - 1)^2 + 3$ es una función par.

d) ___ La función f definida por la ecuación $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ es negativa para todo valor real x tal que $x < 0$.

1.2 Selecciona la respuesta correcta marcando con una X en la línea dada.

1.2.1 El valor numérico de a en la ecuación de la función f definida en el conjunto de los números reales por $f(x) = ax^2 - 2x + a$ siendo $f(2) = 3$ es:

a) ___ 3 b) ___ $\frac{7}{5}$ c) ___ $\frac{5}{7}$ d) ___ 2.

1.2.2 Los valores de $x \in \Re$ para los cuales se cumple que $2^{3x-2} \geq 1$ son:

a) ___ $x < \frac{3}{2}$ b) ___ $x \geq \frac{3}{2}$ c) ___ $x \geq \frac{2}{3}$ d) ___ $x \geq -\frac{2}{3}$.

1.2.3 El punto de intersección entre la recta r, de ecuación r: $3x - 2y - 5 = 0$ y el eje "y" es:

a) ___ $(0; \frac{5}{3})$ b) ___ $(-\frac{5}{2}; 0)$ c) ___ $(\frac{5}{3}; 0)$ d) ___ $(0; -\frac{5}{2})$

1.2.4 El dominio de la función p definida por la ecuación $p(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}$ es:

a) ___ $\{x \in R\text{: } 0 \leq x \text{ ó } x > 1\}$ b) ___ $x \in R$ c) ___ $\{x \in R\text{: } x \neq 1\}$ d) ___ $\{x \in R\text{: } 0 < x < 1\}$

2. Sean las expresiones trigonométricas $P(x) = \text{sen } 2x\cos x + 2\text{sen}^3 x$ y $Q(x) = 2 \text{ sen } x$.

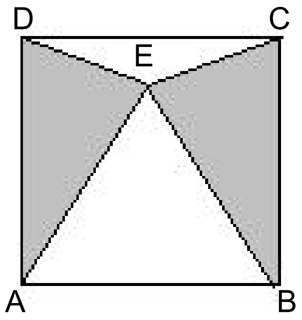
a) Prueba que $P(x) = Q(x)$ es una identidad para todos los valores admisibles de la variable x.

b) Determina todas las $x \in \Re$ con $x \in [0; 2\pi]$ tales que $P(x) = 2\cos 2x$.

3. En la figura, ABCD es un cuadrado de 8,0 cm de lado.
E, punto interior de ABCD formándose el triángulo ABE equilátero.

a) Demuestra que $\overline{DE} = \overline{CE}$.

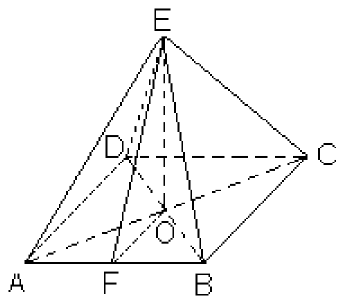
b) Calcula el área de la región sombreada.



4. En los meses de agosto y septiembre del año pasado nuestro país fue azotado por los huracanes Gustav y Ike. Debido a las afectaciones provocadas se decidió, por parte de la dirección del país, asignar materiales de construcción en las zonas más afectadas como parte del programa para la recuperación. En un Consejo Popular de la provincia La Habana se asignaron 3 t más de cemento que de arena. Al transcurrir una semana, se determinó que aún faltaban por descargar el 20 % de la cantidad de toneladas de cemento y el 70 % de la cantidad de toneladas de arena lo cual equivale a que se tendrán que entregar 6,9 t más de arena que de cemento. ¿Cuántas toneladas de cada material se entregaron?

5.Sea ABCDE una pirámide recta de vértice E, cuya base es el cuadrado ABCD.

- O punto de intersección de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ del cuadrado ABCD y proyección del vértice E sobre el plano que contiene a la base de la pirámide.
- F punto medio de $\overline{AB}$, $\angle$ AEB = 60^0 y $\overline{EF}$ = 12,0 cm.



a) Clasifica el triángulo EFB según sus ángulos. Justifica tu respuesta.

b) Calcula el volumen de la pirámide.

c) Halla el área lateral de la pirámide.

Respuestas

PREGUNTA 1

1.1 a) Falsa porque el conjunto imagen de la función h es $\{y\in R: y > -9\}$.

b) Verdadera

c) Falsa porque la gráfica de la función g(x) no es simétrica con respecto al eje y, o porque para toda x real no se cumple que f(x) = f (-x).

d) Falsa porque para todo valor de $x \leq -\frac{1}{2}$ la función f(x) es no negativa.

1.2

1.2.1 Inciso b)

1.2.2 Inciso c)

1.2.3 Inciso d)

1.2.4 Inciso c)

PREGUNTA 2

a) Probemos que $\operatorname{sen}2x\cos x + 2\operatorname{sen}^3 x = 2\operatorname{sen} x$ es una identidad:

Variante 1

MI: $\operatorname{sen} 2x \cos x + 2 \operatorname{sen}^3 x$ MD: $2 \operatorname{sen} x$

$= 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x + 2 \operatorname{sen}^3 x$

$= 2 \operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) + 2 \operatorname{sen}^3 x$

$= 2 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^3 x + 2 \operatorname{sen}^3 x$

$= 2 \operatorname{sen} x$

Luego 2 sen x = 2 sen x, entonces MI = MD (l. q. q. d).

Variante 2

MI: $\operatorname{sen} 2x \cos x + 2 \operatorname{sen}^3 x$ MD: $2 \operatorname{sen} x$

$= 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x + 2 \operatorname{sen}^3 x$

$= 2 \operatorname{sen} x (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)$

$= 2 \operatorname{sen} x$

Luego 2 sen x = 2 sen x, entonces MI = MD (l. q. q. d).

b) **Variante 1**

$\operatorname{sen} 2x \cos x + 2 \operatorname{sen}^3 x = 2 \cos 2x$

$2 \operatorname{sen} x \cos^2 x + 2 \operatorname{sen}^3 x - 2 \cos 2x = 0$

$2 \operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) + 2 \operatorname{sen}^3 x - 2 (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 0$

$2 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^3 x + 2 \operatorname{sen}^3 x - 2 \cos^2 x + 2 \operatorname{sen}^2 x = 0$

$2 \operatorname{sen} x - 2 (1 - \operatorname{sen}^2 x) + 2 \operatorname{sen}^2 x = 0$

$2 \operatorname{sen} x - 2 + 2 \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen}^2 x = 0$

$4 \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x - 2 = 0$ I: 2

$(\operatorname{sen} x + 1)(2 \operatorname{sen} x - 1) = 0$

$\operatorname{sen} x + 1 = 0$ ó $2 \operatorname{sen} x - 1 = 0$

$\operatorname{sen} x = -1$ ó $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{3\pi}{2}$ $= \frac{\pi}{6}$; $x_3 = \frac{5\pi}{6}$

R/ Los valores de $x \in R$ son $x_1 = \frac{3\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$ y $x_3 = \frac{5\pi}{6}$.

Variante 2

$2 \text{ sen } x = 2 \cos 2x$
$2 \text{ sen } x - 2 \cos 2x = 0$
$2 \text{ sen } x - 2 (\cos^2 x - \text{sen}^2 x) = 0$
$2 \text{ sen } x - 2 \cos^2 x + 2 \text{ sen}^2 x = 0$
$2 \text{ sen } x - 2 (1 - \text{sen}^2 x) + 2 \text{ sen}^2 x = 0$
$2 \text{ sen } x - 2 + 2 \text{ sen}^2 x + 2 \text{ sen}^2 x = 0$
$4 \text{ sen}^2 x + 2 \text{ sen } x - 2 = 0 \quad$ I: 2
$(\text{sen } x + 1)(2 \text{ sen } x - 1) = 0$
$\text{sen } x + 1 = 0$ ó $2 \text{ sen } x - 1 = 0$

$\text{sen } x = -1$ ó $\text{sen } x = \frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{3\pi}{2}$ $\qquad x_2 = \frac{\pi}{6}; \quad x_3 = \frac{5\pi}{6}$

R/ Los valores de $x \in R$ son $x_1 = \frac{3\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$ y $x_3 = \frac{5\pi}{6}$.

<u>PREGUNTA 3</u>

a) **Variante 1**

En triángulos ΔAED y ΔBEC, se tiene que:

(1) $\overline{AD} = \overline{BC}$ por ser lados del cuadrado ABCD.

(2) $\overline{AE} = \overline{BE}$ por ser lados del triángulo ΔABE equilátero.

$\angle EAB = \angle ABE = 60^0$ por ser ángulos interiores del triángulo ΔABE equilátero.

$\angle EAB + \angle DAE = 90^0$ por ser el ángulo $\angle DAB$ ángulo recto del cuadrado.

$\angle DAE = 90^0 - \angle EAB$
$\angle DAE = 90^0 - 60^0$
$\angle DAE = 30^0$

$\angle ABE + \angle CBE = 90^0$ por ser el ángulo $\angle ABC$ ángulo recto del cuadrado.

$\angle CBE = 90^0 - \angle ABE$
$\angle CBE = 90^0 - 60^0$
$\angle CBE = 30^0$

(3) De ahí que $\angle DAE = \angle CBE = 30^0$

De (1), (2) y (3) se cumple que $\Delta AED = \Delta BEC$ por tener respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido. (I. a. I)

Por tanto $\overline{DE} = \overline{CE}$ por elementos homólogos en triángulos iguales o porque en triángulos iguales a ángulos iguales se oponen lados iguales.

Variante 2

En triángulos ΔAED y ΔBEC, se tiene que:

(1) $\overline{AD} = \overline{BC}$ por ser lados del cuadrado ABCD.

$\angle EAB = 60^0$ por ser ángulo del triángulo ΔABE equilátero.

$\angle EAB + \angle DAE = 90^0$ por ser el ángulo $\angle DAB$ ángulo recto del cuadrado.

$\angle DAE = 90^0 - \angle EAB$
$\angle DAE = 90^0 - 60^0$
$\angle DAE = 30^0$

$\angle ABE = 60^0$ por ser ángulo del triángulo ΔABE equilátero.

$\angle$ABE + $\angle$CBE = 90^0 por ser el ángulo $\angle$ABC ángulo recto del cuadrado.

$\angle CBE = 90^0 - \angle ABE$

$\angle CBE = 90^0 - 60^0$

$\angle CBE = 30^0$

(2) De ahí que $\angle DAE = \angle CBE = 30^0$

Como $\overline{AB}$ = 8, 0 cm y el triángulo ΔABE es equilátero, entonces $\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{BE}$ = 8, 0 cm, luego $\overline{AD} = \overline{AE}$ = 8, 0 cm de ahí que el ΔAED es isósceles de base $\overline{DE}$.

$\angle$ADE = $\angle$AED por ser ángulos bases del Δ AED isósceles

$\angle$DAE + 2 $\angle$ADE = 180^0 por suma de ángulos interiores de un triángulo.

$2\angle ADE = 180^0 - \angle DAE$

$2\angle ADE = 180^0 - 30^0$

$$\angle ADE = \frac{150^0}{2}$$

$\angle ADE = 75^0$

Como $\overline{BC} = \overline{BE}$ = 8, 0 cm entonces ΔBEC es isósceles de base $\overline{CE}$.

$\angle$BCE = $\angle$BEC por ser ángulos bases del Δ AED isósceles

$\angle$CBE + 2 $\angle$BCE = 180^0 por suma de ángulos interiores de un triángulo.

$2\angle BCE = 180^0 - \angle CBE$

$2\angle BCE = 180^0 - 30^0$

$$\angle BCE = \frac{150^0}{2}$$

$\angle BCE = 75^0$

(3) De ahí que $\angle ADE = \angle BCE = 75^0$

Luego por cumplirse (1), (2) y (3) los triángulos Δ AED = Δ BEC por tener respectivamente iguales un lado y los ángulos adyacentes a ese lado. (a. l. a)

Por tanto $\overline{DE} = \overline{CE}$ por elementos homólogos en triángulos iguales o porque en triángulos iguales a ángulos iguales se oponen lados iguales.

Variante 3

En triángulos ΔAED y ΔBEC, se tiene que:

(1) $\overline{AE} = \overline{BE}$ por lados del triángulo equilátero ΔABE

$\angle$EAB = 60^0 por ser ángulo del triángulo ΔABE equilátero.

$\angle$EAB + $\angle$DAE = 90^0 por ser el ángulo $\angle$DAB ángulo recto del cuadrado.

$\angle DAE = 90^0 - \angle EAB$

$\angle DAE = 90^0 - 60^0$

$\angle DAE = 30^0$

$\angle$ABE = 60^0 por ser ángulo del triángulo ΔABE equilátero.

$\angle$ABE + $\angle$CBE = 90^0 por ser el ángulo $\angle$ABC ángulo recto del cuadrado.

$\angle CBE = 90^0 - \angle ABE$

$\angle CBE = 90^0 - 60^0$

$\angle CBE = 30^0$

(2) De ahí que $\angle DAE = \angle CBE = 30^0$

Como $\overline{AB}$ = 8, 0 cm y el triángulo ΔABE es equilátero, entonces

$\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{BE} = 8,0$ cm, luego $\overline{AD} = \overline{AE} = 8,0$ cm de ahí que el ΔAED es isósceles de base $\overline{DE}$.

$\angle$ADE = $\angle$AED por ser ángulos bases

$\angle DAE + 2\angle AED = 180^0$ por suma de ángulos interiores de un triángulo.

$$2\angle AED = 180^0 - \angle DAE$$
$$2\angle AED = 180^0 - 30^0$$
$$\angle AED = \frac{150^0}{2}$$
$$\angle AED = 75^0$$

Como $\overline{BC} = \overline{BE} = 8,0$ cm entonces ΔBEC es isósceles de base $\overline{CE}$.

$\angle$BCE = $\angle$BEC por ser ángulos bases

$\angle CBE + 2\angle BEC = 180^0$ por suma de ángulos interiores de un triángulo.

$$2\angle BEC = 180^0 - \angle CBE$$
$$2\angle BEC = 180^0 - 30^0$$
$$\angle BEC = \frac{150^0}{2}$$
$$\angle BEC = 75^0$$

(3) De ahí que $\angle AED = \angle BEC = 75^0$

Luego por cumplirse (1), (2) y (3) los triángulos Δ AED = Δ BEC por tener respectivamente iguales un lado y los ángulos adyacentes a ese lado. (a. l. a)

Por tanto $\overline{DE} = \overline{CE}$ por elementos homólogos en triángulos iguales o porque en triángulos iguales a ángulos iguales se oponen lados iguales.

b) **Variante 1**

En el ΔAED isósceles de base $\overline{DE}$:

$$A_{\Delta\ AED} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AE}\cdot\overline{AD}\cdot \text{sen } \angle DAE$$

$$A_{\Delta\ AED} = \frac{1}{2}\cdot 8\text{ cm}\cdot 8\text{ cm}\cdot \text{sen } 30^0 = \frac{64}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{64}{4}\text{cm}^2$$

$$A_{\Delta\ AED} = 16\text{ cm}^2$$

Como ΔAED = ΔBEC entonces $A_{\Delta\ AED} = A_{\Delta\ BEC} = 16\text{ cm}^2$

$$A_{Sombreada} = 2\,A_{\Delta\ AED}$$
$$A_{Sombreada} = 2\cdot 16\text{ cm}^2$$
$$A_{Sombreada} = 32\text{ cm}^2$$

Variante 2

En el ΔAED isósceles de base $\overline{DE}$, trazamos $\overline{EF}$ altura relativa al lado $\overline{AD}$.

En el ΔAFE rectángulo en F por ser $\overline{EF} \perp \overline{AD}$

$$\text{sen } 30^0 = \frac{\overline{EF}}{\overline{AE}}$$

$$\overline{EF} = \overline{AE}\cdot \text{sen } 30^0 = 8\text{ cm}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\overline{EF} = 4,0\text{ cm}$$

$A_{\Delta\ AED} = \dfrac{\overline{AD} \cdot \overline{EF}}{2} = \dfrac{8cm \cdot 4cm}{2} = \dfrac{32cm^2}{2}$

$A_{\Delta\ AED} = 16\ cm^2$

Como $\Delta AED = \Delta BEC$ entonces $A_{\Delta\ AED} = A_{\Delta\ BEC} = 16\ cm^2$

$A_{Sombreada} = 2\ A_{\Delta\ AED}$

$A_{Sombreada} = 2 \cdot 16\ cm^2$

$A_{Sombreada} = 32\ cm^2$

Variante 3

En el ΔABE equilátero, trazamos $\overline{EH}$ altura relativa al lado $\overline{AB}$, obteniéndose el ΔAHE rectángulo en H por ser $\overline{EH} \perp \overline{AB}$, en este triángulo se tiene que:

$\overline{AH} = \overline{HB} = 4,0$ cm por ser $\overline{EH}$ mediana relativa al lado $\overline{AB}$ en el triángulo Δ ABE equilátero.

$\overline{AE}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{EH}^2$ por el Teorema de Pitágoras

$\overline{EH}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AH}^2$

$\overline{EH}^2 = (8\ cm)^2 - (4\ cm)^2 = 64\ cm^2 - 16\ cm^2$

$\overline{EH}^2 = 48\ cm^2$

$\overline{EH} = 4\sqrt{3}$ cm

$\overline{EH} \approx 6,92$ cm.

$A_{\Delta\ ABE} = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{EH}}{2} = \dfrac{8cm \cdot 4\sqrt{3}cm}{2} = \dfrac{32\sqrt{3}}{2}\ cm^2$

$A_{\Delta\ ABE} = 16\sqrt{3}\ cm^2$.

$A_{\Delta\ ABE} \approx 27,68\ cm^2$

En el ΔCED isósceles de base $\overline{CD}$ por ser Δ AED = Δ BEC:

Trazamos $\overline{EG}$ altura relativa al lado $\overline{CD}$.

$\overline{HG} \perp \overline{AB}$ y $\overline{HG} \perp \overline{CD}$ entonces $\overline{HG} \parallel \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{HG} = \overline{AD} = \overline{BC} = 8,0$ cm

Luego $\overline{HG} = \overline{EH} + \overline{EG}$ por suma de segmentos

$\overline{EG} = \overline{HG} - \overline{EH}$

$\overline{EG} = 8\ cm - 4\sqrt{3}\ cm = 8\ cm - 6,92\ cm$

$\overline{EG} = 1,08$ cm.

$A_{\Delta\ CED} = \dfrac{\overline{CD} \cdot \overline{EG}}{2} = \dfrac{8cm \cdot 1{,}08cm}{2} = \dfrac{8{,}64}{2}\ cm^2$

$A_{\Delta\ CED} = 4,32\ cm^2$

$A_{No\ sombreada} = A_{\Delta\ ABE} + A_{\Delta\ CED}$

$A_{No\ sombreada} = 27,68\ cm^2 + 4,32\ cm^2$

$A_{No\ sombreada} = 32\ cm^2$

En el cuadrado ABCD:

$A_{ABCD} = (\overline{AB})^2 = (8\ cm)^2$

$A_{ABCD} = 64\ cm^2$.

$A_{\text{Sombreada}} = A_{ABCD} - A_{\text{No sombreada}}$
$A_{\text{Sombreada}} = 64\ cm^2 - 32\ cm^2$
$A_{\text{Sombreada}} = 32\ cm^2$.

Variante 4
En el ΔABE equilátero:

$A_{\Delta\ ABE} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\overline{AB}\right)^2$

$A_{\Delta\ ABE} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (8\ cm)^2 = \frac{64\sqrt{3}}{4}\ cm^2 = 16\sqrt{3}\ cm^2$

$A_{\Delta\ ABE} \approx 27,68\ cm^2$

En el ΔCED isósceles de base $\overline{CD}$ por ser Δ AED = Δ BEC:
Trazamos $\overline{EG}$ altura relativa al lado $\overline{CD}$.
$\overline{HG} \perp \overline{AB}$ y $\overline{HG} \perp \overline{CD}$ entonces $\overline{HG} \parallel \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{HG} = \overline{AD} = \overline{BC} = 8,0$ cm
Luego $\overline{HG} = \overline{EH} + \overline{EG}$ por suma de segmentos

$\overline{EG} = \overline{HG} - \overline{EH}$

$\overline{EG} = 8\ cm - 4\sqrt{3}\ cm = 8\ cm - 6,92\ cm$

$\overline{EG} = 1,08\ cm$.

$A_{\Delta\ CED} = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{EG}}{2} = \frac{8cm \cdot 1{,}08cm}{2} = \frac{8{,}64}{2}\ cm^2$

$A_{\Delta\ CED} = 4,32\ cm^2$
$A_{\text{No sombreada}} = A_{\Delta\ ABE} + A_{\Delta\ CED}$
$A_{\text{No sombreada}} = 27,68\ cm^2 + 4,32\ cm^2$
$A_{\text{No sombreada}} = 32\ cm^2$
En el cuadrado ABCD:
$A_{ABCD} = (\overline{AB})^2 = (8\ cm)^2$
$A_{ABCD} = 64\ cm^2$.
$A_{\text{Sombreada}} = A_{ABCD} - A_{\text{No sombreada}}$
$A_{\text{Sombreada}} = 64\ cm^2 - 32\ cm^2$
$A_{\text{Sombreada}} = 32\ cm^2$.

<u>PREGUNTA 4</u>

Variante 1:
Cantidad de toneladas de cemento a entregar: x
Cantidad de toneladas de arena a entregar: y

$$\begin{cases} x - y = 3 \quad (1) \\ \frac{70}{100}y - \frac{20}{100}x = 6{,}9 \quad (2) \end{cases}$$

Simplificando la ecuación (2)

$\frac{70}{100}y - \frac{20}{100}x = 6,9\ / \cdot 100$

Sustituyendo en (1) se tiene
x - 15 = 3
x = 18

R: Se entregaron 18 toneladas de cemento y 15 toneladas de arena.

70y – 20x = 690, se obtiene:

$$\begin{cases} x - y = 3 \ / \cdot 20 \\ -20x + 70y = 690 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20x - 20y = 60 \\ \underline{-20x + 70y = 690} \end{cases}$$

$$y = 15$$

Variante 2:
Cantidad de toneladas de cemento a entregar: x

Cantidad de toneladas de arena a entregar: x - 3

$\frac{70}{100}(x - 3) - \frac{20}{100}x = 6,9$

Simplificando la ecuación:

$\frac{70}{100}(x - 3) - \frac{20}{100}x = 6,9 \ / \cdot 100$

Tenemos finalmente:

70 (x – 3) – 20 x = 690
70 x – 210 – 20 x = 690
50 x = 900
x = 18

Hallando la cantidad de toneladas de arena:
x – 3 = 18 – 3 = 15

R: Se entregaron 18 toneladas de cemento y 15 toneladas de arena.

PREGUNTA 5

a) El triángulo ΔABE es isósceles de base $\overline{AB}$, por ser ABCDE una pirámide recta de base cuadrada, además como $\angle$AEB = 60^0 entonces ΔABE es equilátero.

Como F es punto medio de $\overline{AB}$ entonces $\overline{EF}$ es altura relativa al lado $\overline{AB}$ en el triángulo ΔABE equilátero (propiedad de la mediana relativa a la base en un triángulo isósceles) por tanto $\overline{EF} \perp \overline{AB}$, luego ΔEFB es rectángulo en F.

b) En el ΔEFB rectángulo en F, se cumple:

$\tan \angle EBF = \frac{\overline{EF}}{\overline{FB}}$

$\overline{FB} = \frac{\overline{EF}}{\tan 60^0} = \frac{12}{\sqrt{3}}$

$\overline{FB} = 4\sqrt{3}$ cm

$\overline{AB} = 2\ \overline{FB}$, entonces $\overline{AB} = 8\sqrt{3}$ cm

$\overline{OF} \perp \overline{AB}$ por el recíproco del teorema de las tres perpendiculares.

Como O es punto intersección de las diagonales se tiene que $\overline{OF} = 4\sqrt{3}$ cm.

En ΔEOF rectángulo en O por ser $\overline{EO}$ perpendicular a la base ya que es una pirámide recta:

$\overline{EF}^2 = \overline{EO}^2 + \overline{OF}^2$ por el Teorema de Pitágoras.

$\overline{EO}^2 = \overline{EF}^2 - \overline{OF}^2$

$\overline{EO}^2 = (12cm)^2 - (4\sqrt{3}cm)^2$ = 144 cm^2 – 48 cm^2 = 96 cm^2

$\overline{EO} = \sqrt{96}$ cm

$\overline{EO} = 4\sqrt{6}$ cm

$V_{pirámide} = \frac{1}{3} A_{ABCD} \cdot \overline{EO}$ $\qquad$ $A_{ABCD} = \overline{AB}^2$

$V_{pirámide} = \frac{(8\sqrt{3}cm)^2 \cdot 4\sqrt{6}cm}{3} = \frac{192cm^2 \cdot 4\sqrt{6}cm}{3} = \frac{768\sqrt{6}}{3}$ cm^3

$V_{pirámide} = 256\sqrt{6}$ cm^3

$V_{pirámide} = 256 \cdot 2{,}45$ cm^3

$V_{pirámide}$ = 627, 20 cm^3

$V_{pirámide} \approx 627$ cm^3.

Respuesta: El volumen de la pirámide es aproximadamente igual a 627 cm^3.

a) $A_{\text{Lateral Pirámide}} = 4\, A_{\Delta\ ABE}$

$A_{\text{Lateral Pirámide}} = 4\left(\frac{\overline{AB} \cdot \overline{EF}}{3}\right)$

$A_{\text{Lateral Pirámide}} = 4\left(\frac{8\sqrt{3}cm \cdot 12cm}{2}\right) = 2 \cdot 96\sqrt{3}cm^2 = 192\sqrt{3}$ cm^2 = 332, 16 cm^2