MATE
MÁ
TICA

MATEMÁTICA

7.º GRADO

MATE
MÁ
TICA

MATEMÁTICA

7.º GRADO

MSc. Susana Acosta Hernández
MSc. Margarita Gort Sánchez
Dr.C. Aurelio Quintana Valdés
MSc. Lourdes Báez Arbesú
Dra.C. Luisa García de la Vega
Dra.C. Cristina González Dogil
MSc. Rita María Cantero Pérez
MSc. Jesús Cantón Arenas

Editorial
Pueblo y Educación

Edición: Lic. Daniel Caballero Faure
Diseño: Elena Faramiñán Cortina
Ilustración: José Carlos Chateloín Soto
Carlos Prieto Cañedo
Martha González Arencibia
María Elena Duany Alayo
Corrección: Esmeralda Ruiz Rouco
Magda Dot Rodríguez
Emplane: Adriana Fundora Losada
María de los Ángeles Ramis Vázquez

ISBN 978-959-13-2629-4

EDITORIAL PUEBLO Y EDUCACIÓN
Ave. 3ra. A No. 4601 entre 46 y 60,
Playa, La Habana, Cuba. CP 11300.
epe@enet.cu

Preámbulo

Este libro tiene el propósito de ser el texto básico del programa de Matemática de séptimo grado, vigente a partir del curso escolar 2012-2013, con un enfoque orientado fundamentalmente a la vinculación de la asignatura con diferentes situaciones de la vida práctica.

Ha sido el resultado del esfuerzo de muchos compañeros, que apoyaron el trabajo de sus autores con ejercicios, ilustraciones, sugerencias, datos y una enriquecedora revisión, a cargo de los profesores: MSc. Hilario Santana de Armas, MSc. Ortelio Querol Méndez, MSc. Norly Puig Reyes, Dr. C. Carlos Duardo Montesgudo, MSc. Leopoldo Montes de Oca, Dra. C. Marta Álvarez Pérez. También laboraron en él, editores, dibujantes, trabajadores encargados de la impresión y el empalme y aquellos que con su trabajo contribuyeron a obtener los recursos necesarios para invertir en el papel, las tintas, las cartulinas, los pegamentos y los equipos de impresión. ¡A todos nuestro infinito agradecimiento!

Orientaciones para el trabajo con el libro

El contenido de este libro está estructurado en tres capítulos, cada uno está dividido en epígrafes y estos a su vez en subepígrafes.

Al hojear sus páginas te percatarás de que cuenta con una pequeña introducción del tema que se tratará y diferentes secciones, que se distinguen por un logotipo que las identifica.

Estas secciones son:

Recuerda que: abarca recuadros con propiedades, fórmulas, definiciones, teoremas o aspectos importantes del contenido que debes saber.

Ejemplo: incluye tanto, ejemplos, como ejercicios resueltos, que muestran procedimientos de trabajo.

¡!: situación problémica planteada.

R ¡!: respuesta de la situación problémica planteada.

Ejercicios: contiene los ejercicios que se proponen para cada epígrafe.

Ejercicios del capítulo: agrupa ejercicios que integran los contenidos tratados en todo el capítulo.

Para la autoevaluación: tiene dos partes, la primera con un grupo de interrogantes para reflexionar sobre lo aprendido y la segunda un "Ponte a prueba" para que evalúes los contenidos adquiridos en el capítulo.

Respuesta de los ejercicios: contiene las respuestas de los ejercicios de cada capítulo.

Debes cuidarlo, pero sobre todo: ¡usarlo mucho! y junto a tus profesores ofrecer todas las sugerencias que permitirán perfeccionar las futuras ediciones.

Te deseamos el mayor de los éxitos en el trabajo con la asignatura.

LOS AUTORES

Índice

CAPÍTULO 1

Los números racionales

Una historia que queremos compartir contigo

¡! Alejandro, un curioso estudiante, ha encontrado en la libreta de Matemática Financiera[1] de su hermano lo siguiente, que es parte de la respuesta a un ejercicio:

$$V_c = 10\ 000\ (1 + 0{,}081\ 6)^{-5}$$

Le apasionan las matemáticas, por eso, se ha hecho muchas preguntas:

- En el factor que no es el 10 000, ¿será que 1,081 6 se repite –5 veces?, ¿tendrá sentido?

Si fuera 5, sabría qué responder, pero con ese número 5 que tiene delante un signo menos, ¿qué hacer?

- Yo he visto números que tienen delante un signo menos, y han representado temperaturas por debajo de 0°C, profundidades de las fosas, deudas y descuentos de precios de productos, pero nunca había visto algo así.

¿Y tú qué crees? ¿Puedes ayudar a Alejandro a responder las preguntas que se ha hecho?

Ya estás en séptimo grado, hoy comenzarás el estudio de nuevos contenidos matemáticos que les permitirán a Alejandro y a ti aclarar las dudas, pues conocerás mucho más de esta asignatura.

Cuenta la historia de la matemática que no fue nada fácil la prevalencia de estos *números que tienen delante un signo menos;* la matemática griega no los concebía en forma alguna; sin embargo, llegaron a ser parte fundamental de la matemática india y china en el siglo VI n.e.

Tuvo que pasar mucho tiempo para que esas cifras ocuparan su lugar de honor, para que se valorara su importancia, sobre todo en actividades vitales para la subsistencia, por ejemplo: el comercio. Comienza este reconocimiento a fines de la Edad Media, pero se

[1] Asignatura técnica del primer año de la especialidad de Contabilidad en Cuba. Permite al contador asesorar las decisiones financieras de una empresa con el objetivo de obtener y administrar el dinero de la manera más eficaz y eficiente posible.

impone en los siglos XV y XVI, aunque todavía con mucho cuidado; solamente a finales del siglo XVII se reconocieron como números perfectamente válidos. En otros momentos del capítulo conocerás algo más, pues queremos que hagas tuya la famosa frase de Aristóteles: "Un conocimiento profundo de las cosas no lo obtendremos, ni ahora ni nunca, mientras no las contemplemos en su crecer desde el principio".[2]

Ahora para comenzar a adentrarnos en estos nuevos temas de aritmética te invitamos a recordar algunos contenidos.

1.1 Sistematización sobre los números naturales y las fracciones

En este epígrafe recordarás muchos de los conceptos y propiedades relacionadas con los números naturales y fraccionarios que estudiaste en la escuela primaria, los cuales aplicarás a la resolución de nuevos ejercicios y problemas de la vida, donde podrás darte cuenta una vez más de su importancia. Te servirán, además, para enriquecer tu interpretación de datos cuantitativos, lo cual te permitirá profundizar en el estudio de la rama de la matemática llamada *estadística.*

Identificación de los números naturales, las fracciones y las expresiones decimales en datos relacionados con situaciones de la vida

Lee cuidadosamente el texto siguiente y ubica fragmentos que te hagan pensar en números naturales y fraccionarios o identifícalos directamente:

> "¡Al fin en séptimo grado! Un año más de vida, nuevas amistades, quizá el primer amor, un nuevo curso escolar, una nueva escuela, un montón de asignaturas y aprender mucho más de la que más me gusta: ¡Matemática!
>
> Ayer leía en el periódico de mi provincia que otros nueve mil doscientos treinta estudiantes también comenzarán a estudiar en la Secundaria Básica. Ya conozco que aula me toca porque cuando estaba en sexto grado todos los de mi grupo visitamos la escuela, ¡es lindísima!; en mi grupo seremos 37, cerca de la décima parte o del 10 % de la matrícula total, según nos dijo la directora ese día; por cierto, parece que a ella también le encanta la Matemática.
>
> Ese día fue un encuentro muy bonito en el que ella nos hizo pensar en muchas cosas, por ejemplo, en el hermoso privilegio que nos brinda nuestra Revolución de estudiar de manera gratuita y en la importancia de cumplir con todo rigor el Reglamento Escolar para que nuestra estancia en la Secundaria sea lo más provechosa posible.
>
> En este momento preparo algunos materiales de estudio que mi papá me compró, y… ahora recuerdo que en la Primaria, la maestra siempre nos insistía en el cuidado

[2] Luis Davidson San Juan: *Ecuaciones y matemáticos,* 2008.

de la base material de estudio, fundamentalmente de los libros de texto y cuadernos, ella siempre decía: el valor de un libro de texto es 2,97 CUC y el de un cuaderno, 0,77 CUC, ¿cuánto será en Secundaria?

Mañana ya estaré en séptimo, pondré todo mi empeño en obtener buenos resultados, para ser cada día mejor; como dice mi mamá, oportunidades tenemos, pero hay que saberlas aprovechar".

En ocasiones estos números aparecen escritos tal y como se leen.

Respuesta:

Son naturales los números: nueve mil doscientos treinta y 37
Son expresiones decimales: 2,97 y 0,77
El fragmento "cerca de la décima parte o del 10 % de la matrícula total" nos hace pensar en la fracción $\frac{1}{10}$ y en la expresión 0,1.
¿Qué se tuvo en cuenta para dar esta respuesta?

Recuerda que:

El cardinal de un conjunto nos indica la cantidad de elementos que tiene este. A los conjuntos finitos que tienen el mismo número de elementos o el mismo cardinal, se les asocia el mismo número natural. Cada número natural está compuesto por dígitos o cifras. El número natural 143, tiene como cifras (o dígitos) a 1, 4 y 3.
Los números naturales son los cardinales de los conjuntos finitos.
Fracción común es una división que escribimos de la forma:

$$\frac{a}{b} \begin{array}{l} \rightarrow \text{numerador} \\ \rightarrow \text{denominador} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 8:7 = & \dfrac{8}{7} \\ \downarrow & \downarrow \\ \text{división} & \text{fracción} \end{array}$$

En general, podemos decir que una fracción se representa en la forma $\frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ y se lee "a sobre b".
Las fracciones cuyos denominadores sean potencias de 10, por ejemplo $\left(\frac{3}{10}, \frac{7}{100}, \frac{18}{1\,000}, \text{etc.}\right)$, se llaman fracciones decimales y se pueden representar como expresiones decimales (0,3; 0,07; 0,018; etcétera).

Ejercicios

1. Lee cuidadosamente el texto siguiente y ubica fragmentos que te hagan pensar en números naturales y fraccionarios o identifícalos directamente:

   El lunes 12 de marzo de 1991, *Granma* publicaba la noticia:[3] "Tres horas y nueve minutos después del trabajo de un prestigioso equipo interdisciplinario cubano se implantó el primer corazón artificial cubano: el CORAMEC.

   Durante nueve días, latió en el pecho de un paciente muy enfermo y trasmitía ¡sesenta pulsaciones por minuto!"

2. Pregunta en tu escuela los siguientes datos sobre el séptimo grado:

   - matrícula total
   - cantidad de grupos
   - número de escuelas primarias del municipio, cuyos estudiantes están ahora en el centro
   - cantidad de estudiantes por centro
   - matrícula por grupo
   - cantidad de profesores
   - base material de estudio recibida por cada estudiante

   Elabora un texto en el que haya números naturales, fraccionarios en diferentes representaciones; puedes enriquecer tu redacción con información que puedas obtener a partir de tus conocimientos de Aritmética de primaria.
   Siempre justifica el trabajo realizado.

1.1.1 El significado de los números

Números son los que sobran o los que faltan en nuestras vidas, de eso no hay ninguna duda. ¿Alguna vez te has preguntado si brindan alguna información? ¿Cuál? Conozcamos acerca del tema.

Recuerda el significado de los números:

El significado de un número es la información que nos brinda, dada la forma en que ha sido utilizado. Los números pueden tener tres significados prácticos:

Tipo de significado	*¿Qué representa?*
Cardinal o cantidad contable	Cuántas veces ocurre un suceso
Ordinal	El lugar que ocupa determinado hecho
Código o identificación	Una manera única de distinguir

[3] Órgano de prensa *Granma*, 12 de marzo de 2011.

Mediciones has realizado muchas en los más diversos momentos, los resultados obtenidos son cantidades de magnitud, que son aquellas que indican cuántas veces se repite una magnitud tomada como patrón o unidad de medida.

En el siguiente párrafo:

Pioneros granmenses visitaron el río Cauto, el de mayor longitud de Cuba con sus 343 km. Un poblador de la zona entregó a cada uno un suvenir, que guarda 24 cm^3 *de tierra de las márgenes de dicho río.*

Los números 343 km y 24 cm^3 son cantidades de magnitud, una indica cuántas veces se repite la unidad de longitud kilómetro y la otra, la unidad de volumen, centímetro cúbico.

Recuerda los cinco significados prácticos que tienen las fracciones:

Significado	**A qué se refiere**	**Ejemplo**
operador parte-todo	Identificar la unidad Realizar divisiones (el todo se conserva).	$\frac{5}{8}$ se puede referir a dividir un todo en ocho partes iguales y tomar cinco de ellas.
división o cociente	$\frac{m}{n}$ $(n \neq 0)$ se refiere a una operación de división indicada. Donde m y n son números naturales $(n \neq 0)$.	$\frac{3}{5}$ significa dividir la cantidad del numerador, en este caso 3 entre cinco, que es la cantidad del denominador.
relación de razón	$\frac{m}{n}$ $(n \neq 0)$ representa una relación entre dos cantidades.	$\frac{8}{13}$ puede interpretarse como que ocho de cada trece personas hacen deportes.
fracción medidora	La mitad de… Un octavo de… Un cuarto de… Describe una cantidad o un valor de magnitud por medio de otro.	La mitad de los estudiantes de un grupo son hembras.
porcentaje	Es “tantos de cada cien”. Al dividir en cien partes el todo, tomamos uno.	En una fábrica de ensamblar televisores el plan del mes se cumplió solo en un 70 % lo que se puede expresar mediante la fracción $\frac{70}{100}$.

Ejemplo 1:

Para explicarles a sus compañeros el significado de los números, Pedro Luis, monitor de su grupo, elaboró y respondió el ejercicio siguiente:

Lee cuidadosamente la situación siguiente y determina qué significado tiene en cada caso el número 35.

Laura estudia ahora en otro centro. Está en un grupo de 35 estudiantes, es el No. 35 de la lista, la última, ya que en su escuela cada grupo solo puede tener 35 estudiantes. Se siente muy feliz y me cuenta muchas cosas de su interés; por ejemplo, que en la parcela escolar cada uno de los destacamentos dispone de 35 m^2 de área cultivable, que desde el curso escolar pasado cada grupo aporta el 35 % de los quintales cosechados al centro de salud más cercano y que, dados los excelentes resultados en la actividad, ocupan el lugar 35.º en ese aspecto de la emulación, a nivel provincial, entre todas las secundarias básicas, que son 225. Dice que para este curso la escuela tiene previsto cosechar un 35 % más que lo que se recolectó el curso pasado, y está segura de que lo lograrán.

Solución:

Fragmento del texto	Significado del número 35
(…) grupo de 35 estudiantes, (…)	**cantidad contable** que indica la cantidad de estudiantes del grupo.
(…) es el No. 35 de la lista (…)	cantidad para **identificar** a Laura.
(…) cada grupo aporta el 35 % de los quintales cosechados (…)	**relación** mediante el tanto por ciento, indicándonos que **35 de cada 100 quintales recogidos** son entregados al centro de salud más cercano. $35\,\% = \frac{35}{100} = 0{,}35$, además $\frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ También expresa una relación mediante la razón: $\frac{7}{20}$, o sea, 7 de cada 20 quintales cosechados son donados al centro de salud más próximo.
(…) ocupan el lugar 35º (…)	número de **orden** que ocupa la escuela en ese aspecto emulativo.

Ejercicios

1. Lee cuidadosamente la situación siguiente:

En mi casa todo es alegría en los últimos quince días, porque gané un concurso de Matemática y el próximo día 15 será mi decimoquinto cumpleaños. Dicen en mi pueblo que mi fiesta será toda una sorpresa para mí, aunque ya me adelantan que 15 parejas bailarán una linda coreografía cubana y que para los asistentes, habrá una rifa de 15 regalos, que se sortearán uno cada 15 personas. Comentan, además, que mi fiesta es la número 15 que se celebra este año y que ese día celebraremos el 15 % de todas las fiestas del pueblo en este año. Todo está preparado para que la pasemos requetebién y espero que así sea.

Explica el significado del número 15 en cada caso, elabora y responde una situación parecida.

2. Situaciones como esta (fig. 1.1) las encontramos por doquier, sin embargo, es poco lo que todavía se trabaja por lograr que todos hagamos un uso racional de ese preciado líquido, que es el agua.

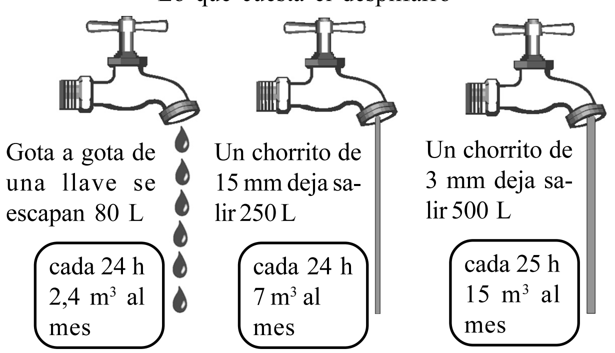


Figura 1.1

a) Seguros estamos de que eres un(a) estudiante consciente de la necesidad de cuidar al máximo este importante recurso; por eso te invitamos a analizarla cuidadosamente para explicar el significado de cada número que aparece en el cartel.
b) Confirma la información que aparece señalada.

3. Los estudiantes del círculo de interés Increíble Matemática nos invitan a resolver el ejercicio siguiente:

3.1 La Gran Pirámide de Keops está formada por unos 2 300 000 bloques de piedra, cada uno con un peso aproximado de 2,5 t, por lo que su peso es de unos seis millones de toneladas. Demoró 23 años en construirse, por eso para "moverla" serían necesarias alrededor de 6 000 locomotoras. Este prodigio de la antigüedad ocupó el primer lugar en altura hasta el 1889 en que se construyó la torre de Eiffel.[4]

[4] Revista *Zunzún* 283.

Clasifica las proposiciones siguientes en verdaderas (V) o falsas (F). Escribe V o F en la línea dada. De las que consideres falsas, justifica por qué lo son.

a) ___ El número que indica la cantidad de bloques que forman la Gran Pirámide de Keops representa una cantidad contable.

b) ___ El peso de cada bloque es una cantidad de magnitud.

c) ___ En la última oración del párrafo el número representa un ordinal.

d) ___ El número que indica cuántos años demoró en construirse es una cantidad de magnitud.

e) ___ El número de locomotoras necesarias para "mover" dicha pirámide es una cantidad contable.

3.2 A nivel mundial, una de cada diez personas es zurda. El 13 de agosto es su día internacional. En Virginia del Norte, E.U.A., hay un pueblo llamado Left-hand (Mano Izquierda) por ser zurdos sus 450 habitantes.[5]
Selecciona la respuesta correcta marcando con una X en la línea dada.

3.2.1 El número 13:

a) ___ identifica el día del mes de agosto que los zurdos celebran,

b) ___ representa una cantidad de magnitud,

c) ___ representa una cantidad contable.

3.2.2 La frase "Una de cada diez personas es zurda" indica que:

a) ___ el 10 % de la población mundial es zurda,

b) ___ uno y diez son cantidades contables,

c) ___ el número de habitantes de Left-hand es la décima parte de la población mundial.

3.3. Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera para cada caso:

El majestuoso monte Everest tiene una altura muy cercana a los 8 848 m, por eso es el mayor pico de nuestro planeta, sin embargo, así de enorme como es, su altura es un tercio de la del Mons Olimpos, que se encuentra en el planeta Marte y es la montaña más alta del sistema solar.[6]

La expresión *un tercio* ejemplifica el significado de fracción _____________. El número 8 848 representa una cantidad de ___________.
La altura en metros de la marciana elevación es aproximadamente __________ y representa una cantidad de ______________.

[5] Libro *Para curiosos.* Colección Lee mucho, Editora Abril, 2010.

[6] Liliana Gómez Luna: *Libro de las curiosidades I,* 2004.

3.4 Lee detenidamente este párrafo para que clasifiques las proposiciones siguientes en verdaderas, con una V o falsas, usando una F, en la línea dada. Justifica las que consideres falsas:

Para fabricar una tonelada de papel hay que talar catorce árboles de 25 m de altura y 20 cm de diámetro, y gastar 100 000 L de agua limpia.

a) ___ todos los números representan cantidades de magnitud,

b) ___ cuatro números representan cantidades de magnitud,

c) ___ solo un número representa una cantidad contable,

d) ___ un número permite identificar.

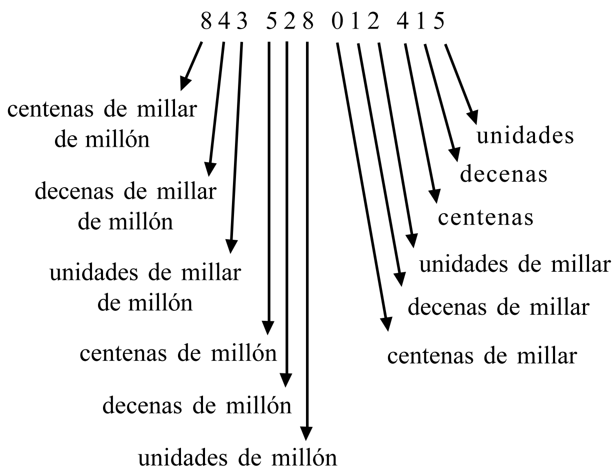
1.1.2 Lectura y escritura de números naturales

Los estudiantes del círculo de interés Todos somos aritmética quieren escribir el mayor número posible al utilizar en él todos los dígitos una sola vez. ¿Puedes ayudarlos? Estamos seguros de que sí.

El mayor es el número 9 876 543 210. Y… ¿cómo se lee?

Recordemos cómo se leen los números naturales.

Para tener éxito en la lectura y escritura de números naturales es imprescindible dominar la tabla posicional la cual te recordaré mediante el siguiente ejemplo:



¿Cómo leerías el número 843 528 012 415?

Observemos el significado de cada una de sus cifras.

Para que puedas leer con mayor facilidad un número, puedes separarlo en cifras de seis comenzando por la derecha (843 528 012 415), luego se lee: ochocientos cuarenta y tres mil quinientos veintiocho millones, doce mil cuatrocientos quince.

Entonces la lectura a realizar por los estudiantes del círculo de interés es: nueve mil ochocientos setenta y seis millones quinientos cuarenta y tres mil doscientos diez.

Como es bueno marchar con los tiempos, te informamos que los números mayores que veinte y menores que cien se pueden escribir es una sola palabra, por ejemplo: 48 puedes escribirlo cuarenta y ocho o cuarentaiocho. Debes tener en cuenta, que al unirlos, la conjunción (y), se transforma en (i), aquí otros ejemplos: 27, veintisiete; 31, treintaiuno; 99, noventainueve. Las palabras compuestas formadas se ajustan a las normas generales de acentuación: 52, cincuentaidós; 63, sesentaitrés.[7]

No obstante, la Real Academia Española (RAE) recomienda que los mayores de treinta, escribirlos en dos palabras enlazadas por la conjunción (y).

Es importante que sepas diferenciar entre el significado de una cifra en un número y el valor que esta tiene por la posición que ocupa.

Ejemplo 1:

En el número 4 853 261:

a) ¿Cuál es la cifra de las centenas?
b) ¿Cuántas centenas tiene este número?

Solución:

Para responder el inciso a) basta con identificar en el número el orden a que se hace referencia y seleccionar la cifra que corresponde.

a) 4 853 2̲61. La cifra de las centenas es 2.
Sin embargo, para responder el inciso b) en la práctica podemos señalar en el número las cifras desde la primera hasta la cifra del orden que nos piden y leer el número señalado. Fíjate que el número se descompone en $48\,532 \cdot 100 + 61$.
b) 4̲ ̲8̲5̲3̲ ̲2̲61. Este número tiene 48 532 centenas.
Así mismo podríamos decir que la cifra de las decenas de millar es 5 y que este número tiene 485 decenas de millar o que la cifra de las unidades de millón es 4 y que el número tiene 4 unidades de millón.

Ejercicios

1. Escribe cómo se leen los siguientes números que aparecen subrayados en cada curiosidad,[8] también determina qué representan dichos números:

   a) Si la Tierra estuviese situada a menos de 134 000 000 km del Sol, toda el agua de nuestro planeta se evaporaría.

[7] Órgano de prensa *Granma,* 9 de julio de 2011.

[8] Liliana Gómez Luna: *Libro de las curiosidades I,* 2004, a), c) y el resto del libro *Para curiosos.* Colección Lee mucho, 2010.

b) El 27 de agosto de 2003 el planeta Marte y la Tierra estuvieron muy cercanos: 55 763 108 km. Este suceso es único por el momento, pues debe repetirse cuando pasen cerca de 5 000 años.
c) El astro más caliente del cosmos es la estrella NGC2440 de la nebulosa planetaria, pues su temperatura exterior es de 199 727°C.
d) Al estornudar desocupamos la nariz de elementos irritantes a una velocidad de 150 km/h. Al hacerlo, siempre tápate la boca.
e) El mayor récord de seres vivos longevos es el de una bacteria encontrada en un cristal de sal, ella sobrevivió 250 000 000 de años.

2. Selecciona el número que corresponde a la lectura siguiente:

a) veinticinco mil millones uno
25 000 100 000   25 000 000 001   25 000 001

3. Soy un número de cinco dígitos (cifras) que tiene el cuatro en el lugar de las unidades, un cero en el lugar de las decenas y un uno en el lugar de las unidades de millar, y la cifra que ocupa el lugar de las centenas es el antecesor de la cifra que ocupa la unidad de millar. ¡Ah! También soy el mayor de los números que puede escribirse con estos dígitos.

a) ¿Qué número soy? ________ b) Escribe cómo tú me leerías ____________

4. Elena le dice a Daniela:

Piensa en un número de cuatro dígitos (cifras) diferentes que cumple las condiciones siguientes:

✓ Cada uno de los dígitos es un número impar.
✓ Es el menor número que se puede formar con esos dígitos.

Daniela responde correctamente. ¿Qué número crees que escogió Daniela? Señala la respuesta correcta.

1 327   1 357   1 537   1 137

5. Sean:

A: menor número de tres cifras no repetidas todas impares.
B: sucesor del menor número que tiene 48 centenas.
C: mayor número de cuatro cifras que tiene un cuatro en las unidades de millar.

a) Escribe los números representados por *A, B* y *C.*
b) Determina el sucesor de *B.*
c) Determina el antecesor de *C.*
d) ¿Cuál de estos números tiene mayor la cifra de las centenas?
e) ¿Cuál de estos números tiene mayor cantidad de centenas?
f) Ordena los números comenzando por el mayor.

6.* ¿Cuántos números comprendidos entre 100 y 1 000 tienen un 9 como cifra de las decenas?
7. ¿Cuál es el menor número de doce cifras palíndromo?[9] ¿Cuál es su numeral?
8.* Un número N de diez cifras tiene las siguientes características: la cifra de la izquierda indica la cantidad de ceros que tiene N, la siguiente cifra indica la cantidad de veces que aparece el dígito 1 en N, la tercera indica la cantidad de veces que aparece el dígito 2, y así sucesivamente. Halla el número N y escribe su numeral.

1.1.3 Criterios de divisibilidad

¡! Carlos Alberto, profesor de Matemática, propone en el mural de la asignatura el ejercicio siguiente:

Analiza si la división de este número

122 333 444 455 555 666 666 777 777 788 888 888 999 999 999 por 3 es exacta.

Utiliza la vía más sencilla posible.

Como puedes ver es un número enorme; si conoces qué significa que la división sea exacta, claro está que puedes dividirlo por 3, realizar la tarea en equipo, ¿por qué no? y analizar, si el resto es cero o no; sin embargo,… esa no es la vía más racional. Si recuerdas que para que la división por 3 sea exacta, tiene que ser divisible por 3, te encuentras ante una de las situaciones en las que precisamente hay que pensar en lo que conocemos de divisibilidad.

Recuerda que uno de los principios fundamentales de la divisibilidad:

Un número natural n es un divisor del número natural m, si existe $x \in \mathbb{N}$, tal que $m = nx$, es decir, n divide a m y se dice que m es un múltiplo de n (de x), o dicho de otra manera, la división de m por n deja resto cero, hecho que como bien sabes no siempre sucede, por ejemplo: al dividir 7 por 3 el cociente es 2 y el resto es 1.

Si llamamos C al número que propuso el profesor, en este caso hay que analizar si existe un número x, tal que $C = 3x$, por eso basta con saber si C es un número divisible por 3.

[9] Un número es palíndromo si se lee de la misma manera de derecha a izquierda y de izquierda a derecha.

Recuerda que:

Los criterios o reglas de divisibilidad son proposiciones matemáticas verdaderas, que nos permiten determinar si un número es divisible por otro. Veamos los más importantes:

– Un número es divisible por 2 si termina en 0, 2, 4, 6 u 8.
– Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.
– Un número es divisible por 4 si sus dos últimas cifras de la derecha son 0 o forman un múltiplo de 4.
– Un número es divisible por 5 si termina en 0 o 5.
– Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras es un múltiplo de 9.
– Un número es divisible por 10 si termina en 0.
– Si un número es divisible por dos números primos entre sí, será divisible por su producto.

Ejemplo 1:

a) 3 335 es divisible por 5 porque termina en 5.
b) ¿Es 160 divisible por 6? Según la última afirmación anterior podemos obtener el criterio para decidir si un número es divisible por 6: como 6 es el producto de los números primos entre sí: 2 y 3, entonces un número que sea divisible por 2 y por 3 será divisible por 6. Para lo cual tiene que terminar en cero o en cifra par y además, la suma de sus cifras ser un múltiplo de 3. 160 es divisible por 2, porque termina en 0, pero 1 + 6 + 0 = 7 y 7 no es múltiplo de 3, luego 160 no es divisible por 6.

R ¡! Ahora puedes responder el ejercicio de Carlos Alberto: para saber si el número *C* es divisible por 3, basta con conocer si la suma de sus 45 cifras es un múltiplo de 3. La suma de los dígitos de *C* es 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 = 285. Este es un múltiplo de 3 (285 = 3 · 95), por eso *C* es divisible por 3 y esta es la forma más racional de responder el ejercicio del profesor Carlos Alberto.

Para dividir te serán muy útiles las reglas de divisibilidad que recordamos en otro momento de este epígrafe, por ejemplo, si te indican buscar el resultado de 17 715 : 5, ya sabes que el resto de esta división es cero, por ser exacta pues el número 17 715 termina en 5 y por tanto es divisible por 5.

Para simplificar fracciones son de suma utilidad los criterios de divisibilidad.

Ejemplo 2:

También para simplificar fracciones, son de suma utilidad los criterios de divisibilidad:

$$\frac{24}{76} = \frac{6}{19}$$

Ejercicios

1. Analiza si el número propuesto por el profesor Carlos Alberto es divisible por:

   a) 2 b) 4 c) 5 d) 6 e) 9
   f) 10 g) 12 h) 15 i) 36

2. Adivina quién soy:

   a) • Soy múltiplo común de 3, de 4 y de 8,
   • soy menor que 100 y
   • la suma de mis cifras es 9.

   b) • Somos dos múltiplos de 7,
   • nuestra suma es 49 y
   • nuestra diferencia es 21.

3. Determina los valores de b y c para que se cumpla que el número $\overline{7bc}$ sea divisible por 2 y 3 simultáneamente.

4. Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas (V) o falsas (F). Fundamenta las falsas.

   a) __ Un número que termina en cero es siempre divisible por 5.
   b) __ Para que un número sea divisible por cuatro sus dos últimas cifras tienen que ser 0.
   c) __ El número $\overline{2k9}$ es divisible por once si $k = 4$.

5. Determina todos los números naturales n que cumplen las condiciones siguientes y fundamenta los razonamientos realizados:

   - $305 \leq n \leq 420$
   - Son divisibles simultáneamente por 2; 3 y 5
   - La suma de las cifras de n es un número par

6.* ¿Cuál es el mayor número de doce cifras?:

   a) divisible por 2 b) divisible por 3 c) divisible por 4
   d) divisible por 6 e) divisible por 8 f) divisible por 12

   Escribe cómo se lee este número.

1.1.4 Lectura y escritura de fracciones comunes y de expresiones decimales

Con la intención de reactivar importantes contenidos de Matemática de quinto y sexto grados, Leonel, profesor de la asignatura en séptimo ha propuesto a sus estudiantes el análisis de la noticia siguiente:[10]

[10] Órgano de prensa *Granma,* 25 de febrero de 2012.

Aumenta 25 % pobreza infantil en EE.UU. durante la última década

WASHINGTON, 24 de febrero. —Al menos en un 25 % aumentó la cifra de niños pobres estadounidenses en los últimos diez años, reveló un estudio llevado a cabo por la Fundación Annie E. Casey, que se centra en los problemas sociales de niños y familias en ese país norteamericano.

En el estudio, que comparó las cifras oficiales entre el 2000 y el 2010, la organización sin fines de lucro reveló un aumento de 1,6 millones de niños viviendo en zonas con altos índices de pobreza.

"Mientras que en el 2000 unos 6,3 millones de menores habitaban áreas de aguda pobreza, en el 2010 la cifra llegó a ocho millones", sostuvo la investigación.

Tres cuartos de esos niños residían en áreas pobres hace dos años, a pesar de tener —al menos— un padre trabajando. (La Radio del Sur)

Entre los aspectos que hacen más certero dicho análisis está el saber leer y escribir correctamente fracciones comunes y expresiones decimales, de ahí el valor de esta temática.

Recuerda que:

Para convertir una fracción a expresión decimal, se divide el numerador entre el denominador y se tienen dos posibilidades: que el resultado sea una expresión decimal finita o una expresión decimal infinita periódica o con un determinado período.

El **período** es la cifra o grupo de cifras que se repite indefinidamente y en el mismo orden.

Ejemplo 1:

Al convertir: $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{33} = 0{,}121212\ldots$; $\frac{22}{7} = 3{,}142857\ 142857\ 142857\ 142857\ldots$

Obtenemos: $0{,}6$; $0{,}\overline{12}$; $3{,}\overline{142857}$

Es decir: $\frac{3}{5} = 0{,}6$; $\frac{4}{33} = 0{,}\overline{12}$; $\frac{22}{7} = 3{,}\overline{142857}$

Recuerda que:

En un número escrito como expresión decimal, a la izquierda de la coma se escribe la parte entera (unidades, decenas, centenas, etc.) y a la derecha de la coma la parte decimal que no completa la unidad (décimas, centésimas, milésimas, en ese orden).

Ejemplo 2:

a) Al leer el número 25,176 podemos hacerlo de tres formas diferentes:

1.ª Veinticinco coma uno, siete, seis.
2.ª Veinticinco unidades y ciento setenta y seis milésimas.
3.ª Veinticinco mil ciento setenta y seis milésimas.

b) Al leer el número $6,\overline{345}$, podemos hacerlo indicando su parte entera y las cifras del período, o sea, seis coma período trescientos cuarenta y cinco.

Recuerda que:

Números naturales, fracciones, expresiones decimales finitas y expresiones decimales infinitas periódicas conforman el conjunto de los números fraccionarios. Todo número fraccionario se puede representar de la forma $\frac{a}{b}$ donde a, $b \in \mathbb{N}$; $b \neq 0$.

Ejercicios

1. Escribe cómo se leen los siguientes números que aparecen subrayados en cada curiosidad,[11] también escribe el significado de dicho número:

   a) La isla danesa Groenlandia es la más grande del planeta Tierra, el 84 % de su superficie, o sea 1 827 912,24 km² corresponden a un glaciar.
   b) Es de Namibia la bacteria conocida más grande que existe: mide 0,75 mm.
   c) El peso de 1 500 huevos del gusano de seda es 0,001 kg.
   d) El cerebro humano puede pesar alrededor de 1,35 kg.
   e) En cada litro de sangre hay 0,34 kg de hemoglobina, proteína que transporta el dioxígeno por todo el cuerpo.

2. Escribe cómo se leen los números siguientes y escríbelos como fracción decimal:

   a) 7,2 b) 0,54 c) 28,055 d) 98,30 e) 171,200 f) 932 517,46

3. Selecciona el número que corresponde a las lecturas siguientes:

   a) Cuatro mil ochocientas veintiocho centésimas.

   4,828 48,28 482,8

   b) Ciento cincuenta milésimas.

   150,000 0,150 1,50

[11] Liliana Gómez Luna: *Libro de las curiosidades I,* 2004 para el d), para a) y f) el *Libro de las curiosidades II* de Liliana Gómez Luna, 2007, para c) y e), el libro *Para curiosos.* Colección Lee mucho, 2010.

c) Mil setecientas cinco décimas.

1 705,0 170,5 17,05

4. Considera el número 89 105 y coloca la coma de modo que obtengas:

a) Un número mayor que 1 000 y menor que 10 000.
b) Un número menor que 1 000 y mayor que 100.
c) Un número mayor que 1 y menor que 10.
Escribe cómo se lee cada uno de ellos.

5. Del número 4 835,724:

a) ¿Cuál es la cifra de las décimas? b) ¿Cuántas milésimas tiene el número?
c) ¿Qué orden ocupa la cifra 2?

6. Selecciona el número determinado por las condiciones siguientes:

a) El mayor de los números de tres cifras enteras y tres decimales que tiene un cuatro en el orden de las milésimas.

999,994 999,004 999,400

7. Circula la expresión decimal que corresponde a cada fracción:

a) $\frac{75}{100}$ 0,75 7,5 75,0

b) $\frac{1}{8}$ 1,8 0,125 1,25

c) $\frac{14}{3}$ 14,3 $4{,}6\overline{6}$ $4{,}\overline{6}$

1.1.5 Representación en el rayo numérico de números naturales y fraccionarios

Un pastel se corta quitando cada vez la tercera parte del que hay en el momento de cortar. ¿Qué fracción del pastel queda después de cortar tres veces?

Es evidente que cada vez va quedando menos pastel, pero esto pudiera ilustrarse mucho mejor en la figura 1.2, auxiliándonos de un rayo numérico en el que representemos qué parte queda cada vez: después del primer corte: dos tercios; luego del segundo corte, cuatro novenos y al realizarse el tercer corte: $\frac{8}{27}$.

Es decir, quedan en cada corte: $\left(\frac{2}{3}=\frac{18}{27}\right)$; $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}=\frac{12}{27}\right)$; $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}=\frac{8}{27}\right)$.

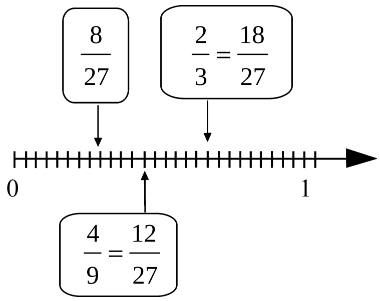


Figura 1.2

Como aprendiste en la primaria, la representación de los **números naturales** en el rayo numérico, coincide con las unidades enteras trazadas en él, la de las expresiones decimales tiene que ver con la unidad de longitud que utilices, si por ejemplo, es el centímetro, puedes ubicar con exactitud las que tienen un lugar decimal.

Ejercicios

1. Representa en el rayo numérico los números fraccionarios siguientes:

   $0{,}3 \qquad \frac{1}{4} \qquad 2\frac{1}{2} \qquad 3{,}4 \qquad 1{,}75 \qquad \frac{5}{2}$

2. Dada la siguiente lista de números:

   $\frac{3}{5};\ \frac{1}{5};\ \frac{7}{5};\ 2\frac{1}{3};\ 1\frac{2}{5};\ \frac{15}{5};\ 2\frac{4}{5}$

   a) Determina el número de la lista que corresponde a cada letra representada en el rayo numérico (fig. 1.3).

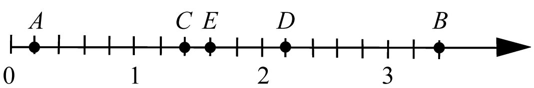


Figura 1.3

   b) Represента en este rayo los números fraccionarios que no correspondan a ninguna de las letras.

3. Selecciona la respuesta correcta que más racionalice el trabajo:

   a) Al representar 3,7 en un rayo numérico donde el segmento unidad tenga una longitud de 1 cm:

      • Señalo 37 mm en el rayo.

- Señalo 4 unidades en el rayo, divido la tercera unidad en 10 partes iguales y tomo 7.
- Señalo 4 unidades en el rayo, divido la cuarta unidad en 10 partes iguales y tomo 7.

b) Cuando represento 2,3 en el rayo numérico y tomo como unidad a la longitud ***a*****,** a cada una de estas unidades la divido en 10 partes iguales, que llamo subdivisiones de *a*:

- Señalo 23 subdivisiones de *a* en el rayo numérico.
- Considero 3*a* en el rayo numérico, divido la segunda unidad *a* en 10 subdivisiones de *a* y tomo 3 de ellas, en esta última subdivisión señalo 2,3.
- Considero 3*a*, divido la tercera unidad *a* en 10 subdivisiones de *a* y tomo 3, en esta última subdivisión señalo 2,3.

1.1.6 Orden y comparación de números naturales y fraccionarios

De gran utilidad resulta la comparación de **números naturales,** esto lo hemos comprobado a diario en las actividades de nuestra vida cotidiana.

Recuerda que:

Al comparar **números naturales** que estén representados en un rayo numérico, el que esté ubicado más a la izquierda (más cerca de cero) será el menor.

Veamos mediante algunos ejemplos los procedimientos que utilizamos para ordenarlos y compararlos.

Ejemplo 1:

Compara los números en cada una de las parejas siguientes:

a) 525 y 1 832 b) 423 y 21 c) 4 872 y 3 853 d) 28 435 432 y 28 437 003

Solución:

En los dos primeros incisos es fácil la comparación, ya que el número que tenga mayor cantidad de cifras será el mayor.

a) $525 < 1\,832$ b) $423 > 21$

En los incisos c) y d), que tienen la misma cantidad de cifras, se van comparando de izquierda a derecha cada una de las cifras correspondientes a un mismo orden hasta encontrar la diferencia.

a) $\underline{4}\,872 > \underline{3}\,853$ porque $4 > 3$ b) $28\,43\underline{5}\,432 < 28\,43\underline{7}\,003$ porque $5 < 7$

Al comparar **fracciones,** si las representas en un rayo numérico, se procede de forma análoga a los números naturales y expresiones decimales.

Ejemplo 2:

Compara:

a) 3,85 y 2,53 b) 0,41 y 0,515 c) 3,47 y 3,425

Solución:

Siguiendo el procedimiento en el inciso a), podemos decir que 3,85 > 2,53; porque 3 > 2 (aquí comparamos la parte entera).

En el inciso b), 0,41 < 0,515, porque 4 < 5 (aquí coincide la parte entera de ambas expresiones y pasamos a comparar las décimas).

En el inciso c), 3,47 > 3,425 porque 7 > 2, (en estas expresiones coincide la parte entera y la cifra de las décimas por lo que comparamos las centésimas).

Recuerda la forma más general para comparar las fracciones:

Para comparar las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ realizamos la operación siguiente.

Multiplicamos $a \cdot d$ y $b \cdot c$, o sea: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ $b \neq 0$ y $d \neq 0$

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si $a \cdot d < b \cdot c$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $a \cdot d = b \cdot c$

$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ si $a \cdot d > b \cdot c$

En el caso en que los productos sean iguales, entonces decimos que son **fracciones equivalentes.**

A partir de una fracción podemos obtener infinitas fracciones equivalentes a ella mediante la ampliación o la simplificación de esta.

Por supuesto que también podemos realizar **comparaciones entre números fraccionarios en sus diferentes formas de representación y números naturales.**

Ejemplo 3:

Ordena de menor a mayor los números siguientes:

$\frac{4}{5}$; 0,4; 4,3; 0,3; $3\frac{1}{5}$; $\frac{15}{2}$

Solución:

Para ordenar estos números debemos compararlos y sabemos que: 0,4; 0,3 y $\frac{4}{5}$ están entre 0 y 1.
También al comparar las expresiones decimales podemos plantear que 0,3 < 0,4 por lo que nos quedaría comparar $\frac{4}{5}$ con esta y podemos hacerlo convirtiendo esta fracción en expresión decimal $\frac{4}{5} = 0{,}8$, entonces podemos ordenar estas tres expresiones como sigue 0,3 < 0,4 < 0,8.

Ordenaremos ahora los valores que son mayores que 1: $\left(4{,}3; 3\frac{1}{5} \text{ y } \frac{15}{2}\right)$.

Aquí podemos plantear que: $3\frac{1}{5} < 4{,}3$ (comparando la parte entera de ambos 3 < 4) nos queda entonces $\frac{15}{2}$ que lo podemos expresar como número mixto $\left(7\frac{1}{2}\right)$ o como expresión decimal (7,5) y finalmente nos quedaría: $0{,}3 < 0{,}4 < \frac{4}{5} < 3\frac{1}{5} < 4{,}3 < \frac{15}{2}$.

Ejercicios

1. Compara los números siguientes, escribe cómo se leen los números naturales que aparecen y busca fracciones equivalentes a las dadas.

a) 53 083 y 2 525	b) 1 437 y 105 430 000	c) 36 825 003 y 36 825 003
d) 5,47 y 8,47	e) 0,143 y 0,0143	f) $\frac{5}{10}$ y 0,5
g) $\frac{3}{5}$ y $\frac{8}{3}$	h) $\frac{2}{9}$ y $\frac{7}{9}$	i) $\frac{4}{5}$ y $\frac{4}{9}$
j) $4\frac{1}{5}$ y $\frac{18}{4}$	k) $11\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{3}$	l) $\frac{5}{2}$ y 2,41

2. Compara los siguientes números fraccionarios utilizando los signos <, =, >. Fundamenta el trabajo realizado.

a) $2,\overline{5}$ ___ 3 b) 0,6 ___ 0 c) 5,79 ___ 5,8 d) 2 ___ $\frac{5}{3}$

e) 1 ___ $\frac{4}{3}$ f) $2,\overline{2}$ ___ $\frac{22}{10}$ g) $\frac{3}{4}$ ___ 3,4 h) $\frac{1}{2}$ ___ $\frac{2}{5}$

3. Sustituye el asterisco por un número de forma tal que se cumplan las proposiciones siguientes.

a) $1,25 > 1,2*$ b) $0,36 < 0,*6$ c) $\frac{1}{*} > \frac{1}{2}$

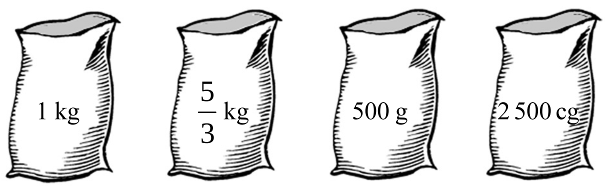
d) $3,* > 3\frac{1}{4}$ e) $*\frac{2}{3} < 3\frac{2}{3}$ f) $\frac{*}{6} > \frac{5}{6}$

g) $\frac{*}{4} > 1$ h) $\frac{6}{*} > 2,06$ i) $3\frac{1}{5} = *,2$

j) $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{*}$ k) $3,2* = 3\frac{1}{4}$ l) $*\frac{4}{5} = \frac{24}{5}$

m) $1,3\overline{4} > 1,*4$ n) $4\frac{3}{7} < 4,*$ ñ) $6,125 = 6\frac{1}{*}$

4. En estos sacos están guardados productos diferentes (fig. 1.4). ¿Cuál de estos sacos es más pesado? ¿Cuál es el menos pesado?



A *B* *C* *D*

Figura 1.4

5. En una cooperativa dos campesinos tienen parcelas iguales. El primero la ha dividido en cinco partes iguales y dedica tres de ellas a la siembra de plátanos. Si el otro divide la suya en quince partes iguales. ¿Cuántas partes debe dedicar a la siembra de plátanos para igualarse a su compañero?

6. Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas (V) o falsas (F). Fundamenta las falsas.

____ Si $a \cdot d < b \cdot c$ entonces $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$; $(b \neq 0$ y $d \neq 0)$

____ Si $a \cdot d = b \cdot c$ entonces $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$; $(b \neq 0$ y $d \neq 0)$

____ Si $a \cdot d > b \cdot c$ entonces $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; $(b \neq 0 \text{ y } d \neq 0)$

1.1.7 Operaciones con números naturales

¡! El Día de la Matemática, Lucía y el resto de los monitores de séptimo grado de su escuela, anunciaron a todos los estudiantes lo siguiente:

¡Aprovecha esta ocasión!

Gánate un pulóver con tu fotografía preferida,
solo tienes que:

Obtener el número 31 con cinco números 3.

Entrega tu respuesta a cualquiera de los monitores de 7º grado hasta las 4:30 p.m. de hoy.

Después de un gran sorteo, se hará la premiación dentro de dos días.

¡Te esperamos!

Para ganarse el pulóver hay que saber calcular con números naturales, por eso ahora te invitamos a reactivar lo aprendido sobre este tema.

Recuerda las operaciones con números naturales:

• **Adición y sustracción** $\begin{array}{r} 1\,475 \\ +\,312 \\ \hline 1\,787 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,787 \\ -\,312 \\ \hline 1\,475 \end{array}$	Para adicionar y sustraer se colocan ordenadamente los números de modo que las unidades, decenas, centenas, …, queden una debajo de la otra y se realizan las operaciones comenzando por la derecha. **La sustracción es la operación inversa de la adición.**
• **Multiplicación y división** $\begin{array}{r} 2\,866 \cdot 323 \\ \hline 8598 \\ 5732 \\ +\ 8598 \\ \hline 925718 \end{array} \qquad \begin{array}{r\|l} 925'7'1'8 & 323 \\ \cline{2-2} -\,323 & 2\,866 \\ \cline{1-1} 2797 & \\ -\,2584 & \\ \cline{1-1} 2131 & \\ -\,1938 & \\ \cline{1-1} 1938 & \\ -\,1938 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$	Para multiplicar (dividir) se calculan los productos (cocientes) parciales. En la multiplicación se adicionan los productos parciales. En la división se sustrae de cada dividendo parcial el producto de cociente parcial por el divisor. **La división es la operación inversa de la multiplicación.**

En la primaria resolviste muchos ejercicios de operaciones combinadas de adición, sustracción, multiplicación y división de números naturales, para trabajar con éxito en ellas hay que dominar los procedimientos de cálculo y el orden operacional.

Ejemplo 1:

Calcula: 1 492 – (14 : 7 · 5) + 543
Respuesta: 1 492 – (2 · 5) + 543 = 1 492 – 10 + 543 = 1 482 + 543 = 2 025

R ¡! Ahora sí, te podías ganar el pulóver:

Una solución es 31 = 33 – (3 + 3) : 3 y otra solución: 31 = 33 – 3 + 3 : 3

Ejercicios

1. Descubre los errores que aparecen en la respuesta al numerograma:

10	x	5	+	8	= 58
–		+		:	
1	+	25	:	2	= 13
x		–		+	
9	x	5	–	2	= 13
= 81		= 25		= 6	

2. Calcula:

a) (164 – 151) · (22 + 4) b) 125 – 6 · 1 271
c) 332 : 4 – 76 + 50 · 68 d) 233 337 – 1 950 : 25 + 27

2.1 Determina el antecesor y el sucesor de cada resultado final obtenido.

2.2 Ordena los resultados de mayor a menor.

3.* Numera los vértices de un cubo (fig. 1.5), con los números naturales del 1 al 8, de tal forma que la suma de los vértices de cada cara lateral sea 18 y la semisuma de las caras de las bases sea también 18.

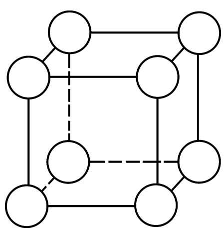


Figura 1.5

4. El famosísimo cubano Erick Hernández vuelve a hacer alarde de sus posibilidades sobrenaturales en el dominio del balón, su más reciente logro es que en medio minuto dio 195 toques a la pelota solo con la cabeza y quebró su anterior récord en 10 toques. Pese a la satisfacción por el éxito, este singular atleta se muestra inconforme, pues considera que el límite está en 210 toques, a razón de siete por segundo.[12]
   a) Aproximadamente, ¿cuántos toques dio al balón en 15 s?
   b) ¿Cuál fue su récord anterior?
   c) Confirma la información que aparece subrayada.
   d) A partir de su más reciente ejemplo de supremacía en el balón, ¿cuántos toques más tendría que realizar?
   e) A lo mejor cuando realices este ejercicio ya Erick hizo realidad su sueño, investiga sobre el tema y compáralo con la mayor marca a la que se hace referencia.
5. El húngaro Peter Leko es hoy uno de los mejores ajedrecistas del orbe. Nació el 8 de septiembre de 1979 y obtuvo el título de Gran Maestro en 1994 con 14 años, 4 meses y 22 días.[13] ¿Qué día obtuvo el título?

1.1.8 Operaciones con fracciones

¡! Orlando quiere repartir 17 pasteles entre tres amigos que le han ayudado, pero de forma tal que:

a) a uno le corresponda la mitad,
b) al segundo, un tercio,
c) al tercero, un noveno. Y por supuesto, sin desbaratar ningún pastel.
   ¿Cómo lo puede lograr?

Es evidente que para ayudar a Orlando pensamos en todo lo que conocemos sobre las fracciones numéricas, fundamentalmente en el cálculo; por eso ahora te invitamos a recordar este contenido.

Para trabajar las operaciones de cálculo con fracciones es necesario recordar algunos conceptos aprendidos en la primaria.

Recuerda el mínimo común múltiplo de números naturales (m.c.m.):

El m.c.m. de dos o más números naturales es el menor múltiplo común diferente de cero de dos o más números.

¿Cómo se determina? Recordemos el procedimiento por descomposición en factores primos. Pregúntale a tu profesor o profesora de qué otra forma se halla el m.c.m.

[12] Órgano de prensa *Granma,* 14 de junio de 2011.

[13] Semanario *Orbe* del 10 al 16 de noviembre de 2009.

Ejemplo 1:

Determina el m.c.m. de 8, 10 y 20.

1.º Se realiza la descomposición en factores primos de estos números.

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$8 = 2^3 \qquad 10 = 2 \cdot 5 \qquad 20 = 2^2 \cdot 5$

2.º El m.c.m. será el producto de aquellos factores comunes y que no comunes elevados al mayor exponente, m.c.m. $(8; 10; 20) = 2^3 \cdot 5 = 40$.

Recuerda el recíproco de una fracción:

El recíproco de la fracción $\dfrac{a}{b}$ $\left(\text{con } a, b \in \mathbb{Q}_+ \text{ y } a \neq 0;\ b \neq 0\right)$ es $\dfrac{b}{a}$.

Ejemplo 2:

El recíproco de $\dfrac{1}{2}$ es 2, el recíproco de 4 es $\dfrac{1}{4}$ y el recíproco de $\dfrac{3}{5}$ es $\dfrac{5}{3}$.

Recuerda las operaciones con fracciones:

Operaciones con fracciones	
$\dfrac{7}{15} + \dfrac{5}{12} = \dfrac{28\ +\ 25}{60} = \dfrac{53}{60}$ $\dfrac{13}{3} - 2\dfrac{1}{8} = \dfrac{13}{3} - \dfrac{17}{8} = \dfrac{104 - 51}{24} = \dfrac{53}{24} = 2\dfrac{5}{24}$ Otra vía de solución:[14] $\dfrac{13}{3} = 4\dfrac{1}{3}$, luego:	**Para adicionar o sustraer fracciones** de igual denominador basta con adicionar (sustraer) los numeradores y colocar el mismo denominador. Si son de diferente denominador, se reducen a un denominador común (que es el m.c.m. de los denominadores) y una vez así, se adicionan o sustraen los numeradores de las fracciones halladas.

[14] Dulce María Escalona Almeida: *Aprender Aritmética.* Cuaderno sexto, Publicaciones Cultural S. A., 1958, p. 118.

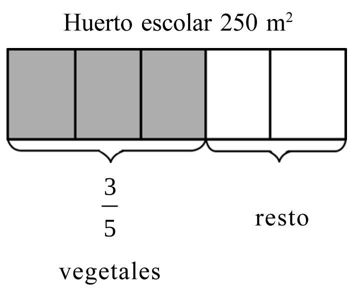
$4\frac{1}{3} = 4\frac{8}{24}$ $-\ 2\frac{1}{8} = 2\frac{3}{24}$ $\overline{\quad 2\frac{5}{24}}$	Se realiza la simplificación de la fracción resultante siempre que sea posible.
$2\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{34} = \frac{17}{6} \cdot \frac{7}{34} = \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{12}$	**Para multiplicar fracciones** se multiplican los numeradores y denominadores. Es conveniente antes de calcular simplificar las fracciones.
$16 : \frac{1}{8} = 16 \cdot 8 = 128$	**Para dividir fracciones** se transforma la división en la multiplicación, dividiendo por el recíproco del divisor.

Recuerda el orden operacional:

Al resolver ejercicios de operaciones combinadas en los que aparezcan fracciones, seguimos las mismas reglas del orden operacional estudiadas para los números naturales.

Ejemplo 3:

En un huerto escolar de 250 m² se dedican las $\frac{3}{5}$ partes a la siembra de vegetales (fig. 1.6), la cuarta parte del resto a la siembra de frutales y se sembraron 45 m² de viandas. ¿Qué superficie queda disponible para la siembra de plantas medicinales?



$$\frac{3}{5} \cdot 250\ m^2 = 150\ m^2$$

Figura 1.6

Solución:

– Para resolver este problema recomendamos realizar un análisis gráfico de la situación como en la figura 1.6.

– Después, puedes determinar la cantidad de m^2 que se dedicó a la siembra de vegetales: $\frac{3}{5} \cdot 250\ m^2 = 150\ m^2$

– Ahora, se necesita calcular el *resto* que se menciona para determinar qué parte de él se destinó a frutales y podemos proceder de dos formas diferentes:

Primera: si a los vegetales se dedicaron $\frac{3}{5}$ del huerto, el resto o lo que falta para completar la unidad es $\frac{2}{5}$ y $\frac{2}{5} \cdot 250\ m^2 = 100\ m^2$. El *resto* son 100 m^2.

Segunda: restando del total de metros cuadrados del huerto, lo que se dedicó a la siembra de vegetales: 250 m^2 – 150 m^2 = 100 m^2. El *resto* son 100 m^2.

– Como nos dicen que la cuarta parte del resto corresponde a la siembra de frutales (fig. 1.7), podemos plantear: $\frac{1}{4} \cdot 100\ m^2 = 25\ m^2$.

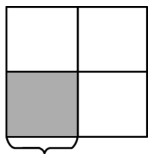


Figura 1.7

Si adicionamos las cantidades utilizadas en cada tipo de siembra y lo restamos de la superficie del huerto obtenemos la superficie que queda disponible para plantas medicinales, lo cual podemos plantear de la forma siguiente:

$$250\ m^2 - \left(150\ m^2 + 25\ m^2 + 45\ m^2\right) = 250\ m^2 - 220\ m^2 = 30\ m^2$$

En este resultado se tuvo en cuenta el orden operacional, pues realizamos primero las operaciones que aparecen en el paréntesis y posteriormente la sustracción indicada. Por último debemos dar la respuesta:

R/ Quedan disponibles para la siembra de plantas medicinales 30 m^2 del huerto escolar.

R ¡! Veamos cuál es la solución a nuestro problema inicial en el que Orlando tenía que repartir pasteles a sus amigos bajo determinadas condiciones. Orlando le pide un pastel prestado a su amiga Ileana. Al tener 18 pasteles, le da la mitad (9 pasteles) a un amigo; el tercio (6 pasteles) a otro amigo; y el noveno (2 pasteles) al tercero. Después de hacer todo esto, le sobra un pastel, que se lo devuelve a Ileana.

Ejercicios

1. Joel, que disfruta tanto el humor como la Matemática, decidió ponerle a esta caricatura "¿Poquito? ¡Las dos terceras partes!" (fig. 1.8). Teniendo en cuenta lo que conoces de aritmética, ¿estás de acuerdo con él? ¿Por qué?

Figura 1.8

   a) ¿Qué título de los que te proponemos a continuación seleccionarías para la caricatura? Fundamenta tu respuesta.

   - ¡Se comió la décima parte!
   - ¡Le faltó $\frac{1}{5}$ por comer!
   - ¡Nos dejó solo un tercio!

2. Calcula en cada caso:

a) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$ d) $\frac{5}{8}-\frac{7}{12}$ e) $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}$

f) $6:\frac{3}{2}$ g) $\frac{2}{5}:\frac{4}{15}$ h) $\frac{5}{8}+\frac{1}{6}-\frac{3}{4}$ i) $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{9}:\frac{1}{6}$ j) $15-2:\frac{1}{7}$

k) $70+24\frac{9}{18}+5\frac{3}{6}$ l) $\left(1-\frac{4}{5}\right)\cdot 10+6:2$ m) $\dfrac{5-\frac{3}{4}\cdot 6}{\frac{1}{2}+1}$

n) $\dfrac{\frac{1}{4}\cdot 8+3}{0{,}3-\frac{1}{10}}$ ñ) $\frac{1}{30}+\frac{2}{15}:18$ o) $\frac{4}{5}+\frac{11}{10}-\frac{9}{25}$

p) $\left(\frac{13}{14}-\frac{6}{7}+\frac{6}{35}\right):\frac{1}{17}$ q) $2\frac{4}{13}\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{18}+\frac{1}{20}\right)$ r) $\dfrac{\frac{7}{8}-\frac{1}{15}-\frac{7}{30}}{\frac{15}{16}-\frac{3}{5}-\frac{1}{8}}$

s) $\frac{105}{4}\left(\frac{6}{7}+\frac{20}{21}-\frac{7}{30}+\frac{3}{14}\right)$ t) $\left(0{,}25+\frac{5}{7}-\frac{3}{8}\right):11$

2.1 ¿Entre qué números naturales consecutivos se encuentra cada uno de los resultados obtenidos?

3. Selecciona la respuesta correcta en cada caso. Márcala con una X.

3.1 La media aritmética de M y N, donde

$$M = 9\,550 - 24 : \frac{1}{16} \text{ y } N = \left(\frac{8}{15}+\frac{2}{45}-\frac{7}{30}\right):\frac{1}{90} \text{ es:}$$

a) ____459,85 b) ____4 583 c) ____76 223,5 d) ____cuarenta y cinco mil novecientas ochenta y cinco décimas.

4. En las elecciones pioneriles Carmen obtuvo el 25 % de los votos, Leonardo, las tres quintas partes del resto y Jorge Luis, los demás. ¿Cuál de los tres obtuvo mayor cantidad de votos?

Carmen Leonardo Jorge Luis

5.* Se tienen cuatro números, cualesquiera que sean, mayores que 4 y menores que 5.

Demuestra que hay al menos un par de ellos cuya diferencia es menor que $\frac{1}{3}$.

6.* ¿Qué términos de la siguiente suma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$ deben suprimirse para que la suma de los restantes sea 1?

7. Un ciclista debe recorrer una distancia de 250 km para su entrenamiento en tres días. El primer día recorrió el 60 % de la distancia, el segundo día la cuarta parte del resto. ¿Cuántos kilómetros más debe recorrer el tercer día que el segundo para cumplir el plan de entrenamiento?

1.1.9 Operaciones con expresiones decimales

¡! El 13 de septiembre de 2006, el órgano de prensa *Juventud Rebelde* anunció:

> *La almohadilla de olor que la célebre "niña de Guatemala" regaló a José Martí fue situada en la Fragua Martiana.*

La almohadilla tiene forma de ortoedro, mide 37,5 cm de largo, 25 cm de ancho y 3,0 cm de grosor.

Imagina que por determinado motivo tuvieras que proteger esta reliquia y solo contaras con un pedazo de cartulina de forma cuadrada de 40 cm de largo; si tuvieses las habilidades y materiales necesarios.

¿Podrías elaborar una cajita para proteger esta almohadilla de amor?

Pensemos en la parte matemática que concierne a la solución de esta situación. Debes hacer uso de diferentes contenidos matemáticos de la asignatura. Por supuesto, fundamentalmente de tu imaginación espacial y de tus habilidades de cálculo en las operaciones con expresiones decimales. Vamos a poner ejemplos de dichas operaciones.

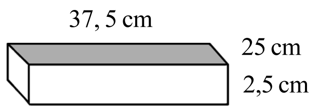
Recuerda las operaciones con expresiones decimales:

$\begin{array}{r} 0{,}175 \\ +\ 4{,}2 \\ \hline 4{,}375 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 34{,}2 \\ -\ 12{,}99 \\ \hline 22{,}21 \end{array}$ $\begin{array}{r} \underline{15 \cdot 2{,}4} \\ 30 \\ +\ 60 \\ \hline 36{,}0 \end{array}$	Podemos **adicionar, sustraer o multiplicar** expresiones decimales como en el conjunto de los números naturales, teniendo en cuenta la coma.
$6 : 1{,}35$ $\begin{array}{l\|l} 600 & 135 \\ \hline -\underline{540} & 0{,}44444 \\ \ \ 600 & \\ \underline{-540} & \\ \ \ \ 600 & \\ \underline{-540} & \\ \ \ \ \ 600 & \\ \underline{-540} & \\ \ \ \ \ \ 60 & \end{array}$	Para **dividir** expresiones decimales: – Se elimina la coma del divisor multiplicando el dividendo y el divisor por una potencia de 10. – Se divide como si el dividendo fuera un número natural. – Se coloca la coma en el cociente inmediatamente después que se hayan dividido las unidades del dividendo si fuera necesario.

Al resolver ejercicios de operaciones combinadas en los que aparezcan expresiones decimales, seguimos las mismas reglas del orden operacional estudiadas para los números naturales. Ellas te servirán para resolver las más diversas situaciones que se presentan en la vida cotidiana.

R ¡! Ya estás en condiciones de determinar si con el pliego que te han dado, pudieras confeccionar una cajita para proteger esta almohadilla de amor. ¿Te atreves?

Piensa en el tamaño de la cajita (fig. 1.9):



¿Cuántos pedazos de cartulina será necesario cortar y de qué tamaño es cada uno?

Tus conocimientos sobre las operaciones con expresiones decimales te permitirán hacer los cálculos para responder estas preguntas, en lo cual te ayudarán las representaciones de la figura 1.9:

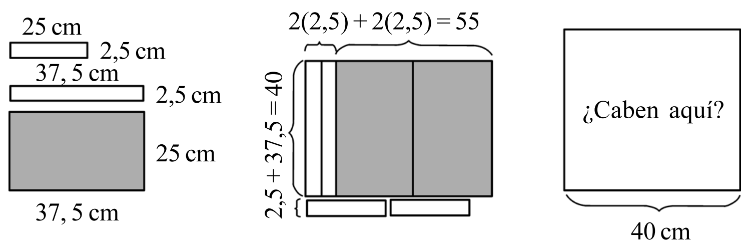


Figura 1.9

Ejercicios

1. Sean $A = 56{,}4$; $B = 40{,}5$; $C = 1{,}7$

1.1 Calcula

a) $A + B + C$ b) $A - B - \mathrm{C}$ c) $A + B - C$
d) $A - B + C$ e) $A : 2 + B : 3 + C : 4$ f) $A : 4 - B : 9 - C : 4$
g) $A : 12 + B : 15 - C : 0{,}4$ h) $A : 3 - B : 3 + C : 0{,}4$ i) $(A + B + C) : 2$
j) $(A - B - C) : 4$ k) $(A + B - C) : 16$ l) $(A - B + C) : 4$

1.2 Escribe cómo se leen las expresiones decimales del resultado final de a), c), e) y g).

1.3 ¿Entre qué números naturales consecutivos se encuentra el resultado final obtenido en i)?
1.4 ¿Cuántos números naturales hay entre los resultados finales obtenidos en h) y j)?
1.5 Escribe dos números naturales menores que el resultado final de k).
1.6 Escribe tres expresiones decimales y tres fracciones mayores que el resultado final obtenido en l).

2. Susana ha llevado en cuenta el consumo eléctrico de su vivienda durante tres meses consecutivos y estos han sido de 120; 180 y 150 kWh respectivamente. Si se propone hacer un ahorro de 10 kWh durante el cuarto mes respecto al promedio del trimestre anterior, entonces el consumo de ese mes debe ser:

   110 kWh   140 kWh   150 kWh

3. ¿Qué valor deben tomar las variables para que se cumpla la secuencia de igualdades planteada:

   $\dfrac{2}{3} + a = b \qquad b \cdot \dfrac{5}{2} = c \qquad c - \dfrac{1}{6} = 2$

Ya estás en condiciones de determinar si con el pliego que te han dado, pudieras elaborar una cajita para proteger esta almohadilla de amor.

1.1.10 El significado de las comparaciones mediante el tanto por ciento

Vivimos en un mundo en el que casi siempre encontramos relacionadas dos cantidades mediante el tanto por ciento. Te invitamos desde ya a "coleccionar porcentajes" y compartir con tus compañeros de grupo el resultado de tu trabajo. En este epígrafe verás algunos ejemplos de nuestra colección ***¡Al cierre!,*** los cuales fueron tomados fundamentalmente de los órganos de prensa.

¡! *¡Al cierre!:* Balance de agua. El equilibrio entre disponibilidad y demanda[15]

Actualmente los recursos hidráulicos disponibles ascienden a algo más de trece mil seiscientos sesenta millones de metros cúbicos de agua y el desarrollo de la infraestructura hidráulica en el país permite poner a la disposición de las demandas económicas, sociales y ambientales, el 57 % de los recursos aprovechables.

a) ¿Qué significa el 57 % de los recursos aprovechables?
b) ¿Sobrepasa esta cantidad los 7 900 000 000 m^3 de agua?

Te invitamos a que profundices en el significado del tanto por ciento para responder estas preguntas.

[15] Órgano de prensa *Granma,* 26 de enero de 2012.

Recuerda el significado del tanto por ciento:

El tanto por ciento significa **"un tanto de cada cien"**. El 1 % escrito como fracción común es $\frac{1}{100}$.

Ejemplo 1:

a) ***¡Al cierre!:*** Año Internacional de los Bosques

El 26,69 % de la superficie terrestre cubana son bosques…[16]

Esta expresión significa que los bosques representan el 26,69 % de la superficie terrestre de nuestro país o 26,69 de cada 100 km^2 de la superficie terrestre cubana son bosques o dicho de otra manera, aproximadamente 27 de cada 100 km^2 de la superficie terrestre en Cuba son bosques.

b) ***¡Al cierre!:*** Fertilizante ecológico ECOFEL

Después de utilizar en las plantas ornamentales el fertilizante ecológico ECOFEL, el porcentaje de plantas marchitas se redujo a 2 %.[17]

En esta expresión de tanto por ciento se declara que desde que se aplicó el producto ECOFEL, solo 2 de cada 100 plantas se marchitaron.

c) ***¡Al cierre!:*** Ciudades: la mayor contaminante del planeta

El 50 % de la población mundial vive en ciudades y según las predicciones, en unos 15 años será el 60 % de la humanidad la que habite en un contexto urbano, (…)[18]

En este cintillo de prensa se expresa que de cada 100 pobladores en el mundo, 50 habitan en ciudades y que dentro de 15 años, de cada 100 personas en el mundo, serán 60 las que vivan en ciudades.

En particular, los porcentajes: 50 % y 60 %, que aparecen en este último ejemplo, son considerados como **porcentajes cómodos,** porque al expresarlos como fracción facilitan el cálculo aritmético.

Debemos recordar también que al plantear el tanto por ciento como fracción, la fracción considerada tiene simplificación, entonces debemos simplificarla, puesto que ello facilitará igualmente el cálculo.

[16] Semanario *Orbe,* octubre de 2012.

[17] Entrevista a un trabajador por cuenta propia.

[18] Órgano de prensa *Granma,* 26 de enero de 2012.

¿Cuáles son todos los casos de porcentajes cómodos que más utilizamos en el cálculo? A continuación se resumirán en una tabla.

Recuerda los porcentajes cómodos:

Porcentaje	Fracción	Operación a que se reduce
10 %	$\frac{1}{10}$	Determinamos la décima parte del total, lo que equivale a dividir por 10.
20 %	$\frac{1}{5}$	Determinamos la quinta parte del total, lo que equivale a dividir por 5.
30 %	$\frac{3}{10}$	Determinamos las tres décimas partes del total, lo que equivale a multiplicar por 3 y dividir por 10.
40 %	$\frac{2}{5}$	Determinamos las dos quintas partes del total, lo que equivale a multiplicar por 2 y dividir por 5.
25 %	$\frac{1}{4}$	Determinamos la cuarta parte del total, lo que equivale a dividir por 4.
50 %	$\frac{1}{2}$	Determinamos la mitad del total lo que equivale a dividir por 2.
60 %	$\frac{3}{5}$	Determinamos las dos quintas partes del total, lo que equivale a multiplicar por 3 y dividir por 5.
75 %	$\frac{3}{4}$	Determinamos las tres cuartas partes del total, lo que equivale a multiplicar por 3 y dividir por 4.
80 %	$\frac{4}{5}$	Determinamos las dos quintas partes del total, lo que equivale a multiplicar por 4 y dividir por 5.

En la Enseñanza Primaria resolviste problemas que conducían a los tres casos del tanto por ciento, te sugiero recordarlos mediante ejemplos:

R ¡!

a) En la información que se brinda del periódico *Granma* sobre el balance de agua, el 57 % indica que 57 de cada 100 m^3 de agua útil será puesto a la disposición de las demandas económicas, sociales y ambientales en nuestro país.
b) Para responder la segunda interrogante:
¿Sobrepasa esta cantidad (el 57 %) a los 7 900 000 000 m^3 de agua?

Tenemos que comparar el 57 % de la cantidad de metros cúbicos dados, con 7 900 000 000, para ver si sobrepasa o no esta cantidad; ello impone indagar primero ¿cuánto es ese 57 %?

Estamos buscando un número (la parte) que representa un tanto por ciento (57 %) de un número conocido; que en este caso es (13 660 000 000) y que representa el total.

Para encontrarlo, basta con calcular el tanto por ciento del número conocido, esto es: 57 % de 13 660 000 000. Planteamos entonces la siguiente operación:

$$\frac{57}{100} \cdot 13\,660\,000\,000 = 7\,786\,200\,000$$

Respuesta: El 57 % de los recursos aprovechables, no sobrepasa los 7 900 000 000 m^3 de agua.

Ejemplo 2:

¡Al cierre!: Del IX Congreso de la UJC

Con nuestro esfuerzo construimos un módulo pecuario en el cual tenemos 115 gallinas, 133 codornices, 156 guineos, 43 patos, 56 chivos, 108 carneros, 214 cabezas de ganado vacuno, 36 toros en ceba, 92 conejos y 37 cerdos.[19]

¿Qué porcentaje del módulo corresponde al ganado avícola?

Solución:

En este caso estamos determinando qué tanto por ciento es un número de otro, (qué tanto por ciento representa 447 de 990).

Importante: En total hay en el módulo, 990 animales, solo son aves, 447.

Para resolver esta situación en la práctica dividimos **la parte** (447), entre **el total** (990) y como queremos esta relación en tanto por ciento, se multiplica el resultado obtenido por 100.

El planteamiento podría quedar:

$$\frac{447}{990} \cdot 100 \approx 0{,}45\overline{15} \cdot 100 \approx 45\ \%$$ (En este caso el resultado es aproximado).

Respuesta: El ganado avícola representa aproximadamente el 45 % del módulo pecuario.

[19] Yorki Navarro Pérez. Delegado al 9.º Congreso de la UJC, campesino de la CPA "Felipe Torres" del municipio Ciro Redondo de Ciego de Ávila. Órgano de prensa *Juventud Rebelde* del 4 de abril de 2010.

Ejemplo 3:

¡Al cierre!: Embalses al 72,5 % de su capacidad. En La Habana, solo al 22 %[20]

Las abundantes precipitaciones del pasado mes contribuyeron a que al cierre del período lluvioso (mayo-octubre) los embalses administrados por el Instituto Nacional de Recursos Hidráulicos almacenen un volumen de agua de 6 000 677 000 m³, cifra equivalente al 72,5 % de la capacidad total de llenado de los embalses.

Al ver informaciones como esta, casi estamos seguros de que te preguntas, ¿cuál será la capacidad total de la que se habla? Recordemos cómo hacerlo.
Aquí estamos buscando un número: el total, del cual conocemos un tanto por ciento, ¿cuál es el número del cual 6 000 677 000 es el 72,5 %?

Procedemos entonces dividiendo **la parte** (6 000 677 000) por el **tanto por ciento** que ella representa, expresado como fracción $\frac{72{,}5}{100}=\frac{725}{1\,000}=\frac{29}{40}$.

El planteamiento quedaría: $6\,000\,677\,000:\frac{29}{40}=6\,000\,677\,000\cdot\frac{40}{29}\approx 8\,276\,795\,862$.

Respuesta: La capacidad total de llenado de los embalses es 8 276 795 862 m³ de agua.

Recuerda que:

Al interpretar las informaciones donde se utiliza el tanto por ciento, debemos distinguir con mucho cuidado en todos los casos: el total, la parte y el porcentaje, para identificar cuál de ellos es el que debemos calcular y cuáles son los que constituyen datos.

Veamos entonces otras formas de comparación al utilizar porcentajes, unas que se refieren a más del 100 % y otras a menos.

Ejemplo 4:

¡Al cierre!: Crece volumen de carga transportada por el MITRANS.[21]

Las entidades del Ministerio del Transporte (MITRANS) han trasladado, desde enero hasta octubre del 2011, 12 593 800 t de carga, cifra que representa un 3,8 % por encima del volumen transportado en igual período del 2010.

[20] Órgano de prensa *Granma,* 12 de noviembre de 2011.
[21] Órgano de prensa *Granma,* 26 de enero de 2012.

Al ver informaciones como estas, casi siempre nos preguntamos ¿cuál era la cifra del período anterior? En este caso, ¿cuántas toneladas trasladó el MITRANS desde enero hasta octubre en el año 2010?

Para determinar ese valor, tendríamos que determinar el número del cual 12 593 800 es el 103,8 % (100 + 3,8), ya que nos informan que lo trasladado (12 593 800 t) fue superior en 3,8 % y se tiene que: $12\,593\,800 \cdot \frac{100}{103{,}8} \approx 12\,132\,755{,}3$.

Respuesta: Desde enero hasta octubre del 2010 el MITRANS trasladó alrededor de 12 132 755,3 t.

Otra vía de solución: si recuerdas lo que estudiaste sobre la ecuación lineal, otra forma de resolver este ejercicio, es buscar la solución de esta ecuación: $x + \frac{3{,}8}{100}x = 12\,593\,800$, aquí x es la cantidad de toneladas que trasladó el MITRANS desde enero hasta octubre del 2010.

Ejemplo 5:

¡Al cierre!: Masa de hielo del Ártico en su mínimo histórico

(...) solo 4 280 000 km^2 permanecen congelados, un 23 % menos que en el año 2005.

¿De qué número es el 23 % menos? Dicho de otra forma, ¿cuál es el número de kilómetros cuadrados de terreno congelados en el año 2005, del cual la cantidad mencionada (4 280 000 km^2) representa un 23 % menos de kilómetros cuadrados? Debemos: hallar de qué número los 4 280 000 km^2 que permanecen congelados son un 23 % menos. Este 23 % menos significa:

100 % – 23 % = 77 %. Luego, hay que calcular **el total** del cual el 77 % es 4 280 000:

$\frac{77}{100}x = 4\,280\,000$, de donde: $x = \frac{4\,280\,000 \cdot 100}{77} = 5\,558\,441{,}55 \approx 5\,558\,442 \text{ km}^2$

Respuesta: En el año 2005 estaban congelados 55 584 412 km^2.

Tanto por mil

A lo mejor en tu empeño de ampliar tu colección te encuentras con noticias así:[22]

CIEGO DE ÁVILA

Alcanza la más baja tasa de mortalidad infantil de su historia

Es una de las siete provincias de mejores resultados en el programa de atención integral a la madre y el niño.

[22] Edición digital del órgano de prensa *Trabajadores,* 17 de febrero de 2012.

Estas también colecciónalas, guardan estrecha relación con las comparaciones matemáticas, y te permitirán ejemplificar el **tanto por mil.**

Debes conocer que no solo el **100** se toma como número para comparar; en Estadística también se utiliza el **1 000,** por ejemplo para conocer la **tasa de mortalidad infantil** en una etapa, buscamos el cociente de la división de la cantidad de niños fallecidos de 0 a 1 año, entre la cantidad de nacimientos y multiplicamos por mil.

Si queremos encontrar el average de un bateador utilizamos la fórmula siguiente:

$\frac{J}{VB} \cdot 1\,000$, donde J es el número de jits, y VB son las veces al bate.

La simbología que se utiliza es: ‰.

En el béisbol <u>el average</u> también se conoce como <u>promedio</u>.

Ejemplo 1:

En la noticia se informa que Ciego de Ávila concluyó el 2011 con una tasa de mortalidad infantil de 4,4 por cada mil nacidos vivos, la más baja de su historia, o sea, que de cada mil niños de 0 a 1 año que nacieron, solo fallecieron alrededor de 4.

Ejemplo 2:

¡Al cierre!: Descendió tasa de mortalidad infantil[23]

Cuba cerró el 2011 con una tasa de mortalidad infantil de 4,9 por cada mil nacidos vivos y en ese año hubo en nuestra nación 133 063 nacimientos.

¿Cómo saber cuántos niños menores de un año fallecieron?

Para operar el tanto por mil se procede de forma análoga al cálculo del tanto por ciento, para responder la pregunta hay que buscar qué cantidad hizo que la mortalidad fuera de 4,9.

O sea, buscar la solución de la ecuación: $\frac{x}{133\,063} \cdot 1\,000 = 4{,}9,$ donde x es el valor buscado.

El valor buscado es: $\frac{4{,}9 \cdot 133\,063}{1\,000} \approx 652$. Murieron cerca de 652 niños.

[23] Órgano de prensa *Granma,* 3 de enero de 2012.

Ejercicios

1. Selecciona la respuesta correcta marcando con una X en la línea dada.

1.1 Que en una escuela el 73 % de los estudiantes están aprobados significa que aprobaron:

a) ___ 73 estudiantes. b) ___ 73 de cada mil estudiantes.
c) ___ 73 de cada cien estudiantes. d) ___ 73 estudiantes de los examinados.
e) ___ 1 de cada 73 estudiantes.

1.2 El tanto por ciento que representa 57 de 300 es:

a) ___19 % b) ___5,3 % c) ___18 % d) ___ 57 %

1.3 El número que representa el 95 % de 576 es:

a) ___547,2 b) ___ 54,72 c) ___ 5,472

1.4 Si A = 17 % de 71 y B = 71 % de 17 entonces:

a) ___$A < B$ b) ___$A > B$ c) ___$A = B$ d) ___$A \neq B$

1.5 Cuando divido un número por su 25 % entonces:

a) ___ obtenemos su cuarta parte,
b) ___ hallamos su cuádruplo,
c) ___ lo dividimos por 25.

1.6 Si 50 es el 20 % de un número, entonces el 120 % de dicho número es:

a) ___140 b) ___ 310 c) ___ 300

2. En 17 de los 167 municipios cubanos, la tasa de mortalidad infantil fue cero en el año 2011. ¿Qué porcentaje representa dicha cifra del total?[24]

3. **Alta mortalidad infantil en indígenas peruanos**[25]
La mortalidad infantil entre las comunidades indígenas amazónicas peruanas alcanza a 49,2 por cada mil nacidos, informa un documento del Fondo de Población de las Naciones Unidas (UNFPA). Las comunidades constituyen 1,21% de la población peruana. (PL)
¿Puede afirmarse que murieron alrededor de cinco niños por cada 100 que nacieron?

4.* Un cubo, cuyas caras están pintadas, se ha dividido en 1 000 cubos más pequeños de iguales dimensiones. Determina qué porcentaje del total tendrá pintada:

– solamente una cara – solamente dos caras – solamente tres caras

[24] Órgano de prensa *Granma,* 2 de enero de 2011 y del 3 de enero de 2012.
[25] Órgano de prensa *Granma,* 7 de mayo de 2011.

a) Imagina que echas en una bolsa todos los cubitos que tienen al menos una cara pintada y que escoges uno sin mirar, ¿tiene más posibilidades de escoger uno de los que tiene tres caras pintadas? ¿Por qué?

5. Lee cuidadosamente la información siguiente, extraída de la página 256 del libro *Curiosidades beisboleras* de Jorge Alfonso:

   Por primera vez se utilizaron las milésimas para definir el ganador de un campeonato en la pelota cubana en la temporada de 1979. En aquella oportunidad, los números favorecieron a Wilfredo Sánchez, quien conectó 80 indiscutibles en 212 turnos al bate contra Agustín Arias con 69 en 183 turnos.
   Calcula el average en cada caso.
6. Con los resultados de tu colección elabora ocho ejemplos como los que se muestran al inicio del epígrafe y entrega a tu profesor el trabajo realizado.

1.1.11 Razones y proporciones

En el Festival de la Silla los estudiantes de séptimo grado de una escuela lograron recuperar 20 sillas y los de octavo grado 32 de 120 que había inservibles en un local de la escuela.

Mediante qué operaciones puedes realizar la comparación de estas cantidades.

Una de las formas sería calcular **la diferencia** entre estas cantidades (32 – 20 = 12) y plantear: el número de sillas que recuperó octavo grado excede en 12 a la cantidad de sillas que rescató séptimo grado.

Otra forma sería mediante el **tanto por ciento,** al calcular qué tanto por ciento representa 32 de 20 $\left(\frac{32}{20} \cdot 100 = 160\right)$ y plantear que lo recuperado por octavo grado superó en un 60 % a lo recuperado por séptimo grado.

Pero podemos también compararla utilizando la **razón** entre ellas $\left(\frac{32}{20} = 1{,}6\right)$ y en este caso podemos decir que: *la cantidad de sillas recuperadas por los estudiantes de octavo grado es 1,6 veces superior al número de sillas rescatadas por séptimo grado.*

Recordemos entonces **¿qué es una razón?**

Recuerda que:

Se llama **razón** entre dos números a y b al cociente $\frac{a}{b}$ (a; $b \in \mathbb{Q}_+$; $b \neq 0$) que también se puede escribir $a : b$ y se lee: "a es a b". Para buscar otra pareja de números que estén en la misma razón que $\frac{a}{b}$ basta con ampliar o reducir esta razón.

Ejemplo 1:

Selecciona de las parejas siguientes de números las que estén en la misma razón de $\frac{132}{1\,224}$.

a) 33 y 306 b) 11 y 102 c) 66 y 204

La pareja del inciso a) debe ser seleccionada, pues la razón $\frac{33}{306}$ se obtiene al simplificar por 4 la razón original.

En el inciso b) los números 11 y 102 están en la misma razón que la razón dada, ya que $\frac{11}{102}$ podemos obtenerla al simplificar por 12 la razón original.

Los números 66 y 204 no están en la misma razón que $\frac{132}{1\,024}$.

Recuerda que:

La igualdad entre dos razones recibe el nombre de **proporción.**

Una proporción se escribe $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ o $a : b = c : d$ con $a; b; c; d \in \mathbb{Q}_+$; b ≠ 0; d ≠ 0, donde:

$$\begin{matrix} \textit{extremo} \leftarrow \\ \textit{medio} \leftarrow \end{matrix} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \begin{matrix} \rightarrow \textit{medio} \\ \rightarrow \textit{extremo} \end{matrix}$$

$$a \cdot d = c \cdot b$$

$$\overbrace{a:b=c:d}^{\textit{extremos}}$$

$$\underbrace{b=c}_{\textit{medios}}$$

La propiedad fundamental de las proporciones es de gran utilidad para determinar uno de los elementos de una proporción, conocidos los otros.

Recuerda la propiedad fundamental de las proporciones:

En toda proporción se cumple que el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

Ejemplo 2:

Isabela vende 1 trusa a 5,00 CUC o 2 trusas a 8,00 CUC. Si me decido por la segunda opción, ¿cuánto me cuestan 10 trusas?

Para resolver el problema debemos plantear la proporción que se puede establecer entre dos blusas y su precio.

$\frac{2}{8} = \frac{10}{x}$ aplicando la propiedad fundamental de las proporciones, nos quedaría

$80 = 2x$ despejando la variable

$\frac{80}{2} = x$ calculamos y nos queda 40

Respuesta: 10 trusas me cuestan 40 CUC.

Ejemplo 3:

África construirá el mayor proyecto hidroeléctrico del mundo: una represa en las cataratas Inga, donde el río Congo cae 100 m y fluye a una velocidad de 43 m^3/s, ¿cuántos metros cúbicos fluyen en una hora?[26]

Este problema se resuelve fácilmente al plantear la proporción siguiente:

$\frac{43\ m^3}{x} = \frac{1\ s}{3\,600\ s}$ donde x es la cantidad de metros cúbicos pedidos. Hay que tener en cuenta que 1 h tiene 3 600 s .

Al despejar x, se obtiene que: $x = \frac{43\ m^3 \cdot 3\,600\ s}{1\ s}$, $x = 154\,800\ m^3$.

Ejercicios

1. Sustituye el símbolo ∇ para que se mantenga la proporción:

a) $\frac{88}{168} = \frac{11}{\nabla}$ b) $\frac{\nabla}{945} = \frac{4}{105}$ c) $\frac{164}{\nabla} = 41$

2. Enlaza la pregunta de la columna A con la proporción de la columna B que le pueda dar solución.

A	B
• Un trabajador abona 16 surcos en dos jornadas de trabajo. ¿Cuántas jornadas más debe trabajar para terminar de abonar los 48 surcos del huerto?	$\frac{16}{48} = \frac{2}{x}$
• Un trabajador abona 16 surcos en dos jornadas de trabajo. ¿Cuántas jornadas debe trabajar para abonar los 48 surcos del huerto?	$\frac{2}{x} = \frac{16}{144}$
• Un trabajador abona 16 surcos en dos jornadas de trabajo. ¿Cuántas jornadas debe trabajar para realizar los tres pases de abono que llevan los 48 surcos del huerto?	$\frac{16}{2} = \frac{32}{x}$

[26] Órgano de prensa *Granma,* 23 de noviembre de 2011.

3. De La Habana a Moscú existen 9 550 km, pero en un mapa de un Atlas Escolar, la distancia entre estas dos ciudades es de 13,4 cm, ¿cuál es la distancia real entre otras dos ciudades que en el mismo mapa distan 6,7 cm?
4. El rectángulo ha sido dividido en 20 cuadrados iguales (fig. 1.10). ¿Cuántos cuadrados se necesita rayar para tener rayadas las tres quintas partes del rectángulo?

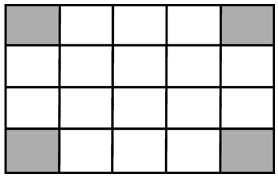


Figura 1.10

5. En las instrucciones de un envase de pintura se puede leer "Rendimiento: 8 m^2 por litro". Si se utilizó 3,5 envases de 4 L cada uno y se dieron dos manos a la misma habitación, ¿qué superficie tiene dicha habitación?
6. Dada la proporción $x : y = z : t$, con $x; y; z; t \in \mathbb{Q}_+$; $y \neq 0$; $t \neq 0$. Intercambia los extremos y los medios y escribe otra proporción.
7. Con cuatro números fraccionarios diferentes de cero, ¿cuántas razones puedo establecer como mínimo?
8. Al multiplicar por 100 una razón, ¿qué hallamos?
9. Al adicionar a ambos miembros de una razón la misma cantidad, ¿se mantiene la razón?

10.* Me contó un estudiante de séptimo grado que en su escuela se celebró el Festival de la R a la E dedicado a esa importantísima actividad que es el reciclaje. Él, excelente en Matemática, se percató de que la cantidad de pomos de plástico entregados es a la cantidad de libretas como 2 es a 3 y que la cantidad de libretas recolectadas es a la cantidad de latas de refresco como 6 : 5. Piensa en un trío de posibles valores para cada cantidad.

1.2 El procesamiento de datos

El procesamiento de datos en su forma más simple, tuvo sus orígenes en las civilizaciones antiguas (fig. 1.11). Se tiene conocimiento de hallazgos que expresan la cantidad de personas, animales y cosas, mediante representaciones en rocas, pieles, maderas, paredes de cuevas y otros medios.

Hay evidencias de que **los babilonios,** alrededor del año 3000 (a.n.e.), usaban pequeñas tablillas de arcilla donde recopilaban datos relacionados con la producción agrícola, las ventas y los cambios o trueques propios de la época; también, que **los egipcios** del siglo XXXI (a.n.e.), anterior a la construcción de las pirámides, representaron datos sobre la población y sobre los índices de renta del país; que **los chinos**, antes del año 2000 (a.n.e.), realizaron estudios sobre la población y las posibilidades materiales de sus habitantes, y que **los griegos,** con el propósito de contar los impuestos, llevaron a cabo un censo de población cuyos resultados fueron utilizados hasta alrededor del año 594 (a.n.e.). Estos hechos, entre otros, demuestran que desde los tiempos más remotos, los pueblos necesitaron contar sus habitantes y sus recursos para organizar su vida.

Figura 1.11

Hoy día el procesamiento y análisis de datos, no se limita solamente al estudio Demográfico y de la Economía. Su campo de aplicación se extendió al análisis de datos en Biología, Medicina, Biotecnología, Física, Psicología, Industria, Comercio, Política, etc., y es relativamente fácil acceder a múltiples datos de alcance local, nacional o mundial, relacionados con temas de la cotidianidad o de cualquier gestión investigativa que se esté abordando, a la vez que se dispone de eficaces sistemas, tabuladores electrónicos y asistentes matemáticos para el procesamiento de datos.

En la primaria aprendiste algunos conceptos relacionados con el procesamiento de datos y formas de proceder que te han permitido hacer la interpretación de datos representados en tablas y gráficos, dar respuesta a situaciones de la vida que requieren de la realización de análisis y valoraciones. Te sugiero recordarlos y te propongo aprender otros nuevos.

¡! Lee cuidadosamente la siguiente situación y te invito a pensar cómo resolverías la problemática planteada:

En la asamblea de rendición de cuentas de una circunscripción, entre los planteamientos que hicieron los electores manifestaron opiniones y solicitudes sobre la atención médica que reciben del consultorio. ¿Cómo realizarías el estudio que te permita hacer una valoración sobre los criterios manifestados por los electores en esa asamblea?

Para responder la pregunta y dar solución a la problemática planteada, seguramente pensaste en la necesidad de hacer un estudio análogo al que emprendes cuando haces trabajos prácticos que requieren el procesamiento de datos, que conllevan la realización de determinados pasos que te permiten darle solución.

Recuerda el procedimiento general que te permite resolver una problemática o analizar una situación o fenómeno que requiere del procesamiento de datos:

El **análisis de la situación inicial** que es objeto de estudio. Para ello puedes hacerte preguntas tales como: ¿Es posible hacer el estudio de la situación planteada únicamente con la información dada? ¿Será necesario buscar otras informaciones? ¿Qué aspectos son los que debo estudiar para hacer el análisis? ¿Qué pregunta o preguntas debo responder sobre ellos?

Las interrogantes anteriores y otras te conducirán a la necesidad de la **obtención de los datos,** para lo cual te preguntarás: ¿Qué datos necesito para responder la pregunta? ¿Son suficientes los datos? ¿Será necesario encontrar otros datos en otras fuentes? ¿Cuáles son las conclusiones que debo extraer de estos? ¿Cómo voy a recogerlos?

Estas incógnitas y otras que tendrás te llevarán a la necesidad de seleccionar los datos necesarios, localizarlos, recopilarlos y registrarlos. Luego te preguntarás: ¿Cómo puedo reducir esta cantidad de datos? ¿De qué modo puedo representar los datos de manera más simplificada? Estas interrogantes te conllevan a la **simplificación de los datos.** Para la cual deberás primeramente, organizar los datos recopilados, para tabularlos, cuantificarlos, hacer cálculos y representarlos en tablas y gráficos.

Una vez realizadas estas y otras acciones podrás **comunicar los resultados** como fase final del proceso, lo que te permitirá hacer comparaciones, descripciones, interpretaciones, argumentaciones, fundamentaciones y valoraciones de la situación en correspondencia con los datos. Para arribar a las conclusiones te podrás hacer preguntas tales como: ¿Qué significado puedo extraer de los datos representados? ¿Cómo se comporta la frecuencia en cada una de las categorías? ¿Cuál es el valor más frecuente en la tabla? ¿Cuál es el mayor o menor valor de los datos?

Pero sobre todo, es importante que para la elaboración de las conclusiones te hagas preguntas como las siguientes: ¿Se corresponden los resultados obtenidos con las conclusiones a las cuales arribé?, ¿cómo puedo justificar las conclusiones basadas en los datos?, ¿qué aspectos debo explicar del análisis de estos datos, según la pregunta a responder?, ¿cómo comunico la decisión tomada?

A partir de estas ideas ya estarás en condiciones de resolver los ejercicios que te proponemos a continuación.

Ejercicios

1. En el punto segundo del acápite "Hechos" de la *Demanda del Pueblo de Cuba al gobierno de Estados Unidos por daños humanos,* se dan informaciones sobre sabotajes realizados por los Estados Unidos a nuestro país.

a) ¿A qué hechos se refiere la información?
b) Recopila los datos y regístralos en tu libreta.
c) Ordénalos cronológicamente.
d) Construye una tabla con los datos recopilados.
e) Sobre la base de los incisos anteriores:

- Determina el día en que esas agresiones criminales causaron el mayor número de pérdidas.
- Valora las consecuencias económicas y políticas de esas acciones agresivas.

2. Busca en la biblioteca el periódico *Granma* con fecha 26 de octubre de 2011, la tabla relativa a la cantidad de países que votaron a favor de poner fin al bloqueo impuesto por Estados Unidos contra Cuba entre los años 1999 y 2011.

a) Construye una tabla donde ilustres la situación anterior.
b) Compara la cantidad de países que votaron a favor en los años 2001 y 2010.
c) A cuánto asciende la diferencia entre la cantidad de votos en los años 1999 y 2011.
d) Interpreta los datos que aparecen a la tabla y expresa a partir de estos tus conclusiones.

3. Se necesita hacer un estudio sobre las problemáticas siguientes:

a) Los índices de mortalidad infantil de Cuba durante los 10 últimos años.
b) La preferencia por la música de los estudiantes de tu grupo.
c) El resultado de las votaciones en la ONU para condenar el bloqueo económico a nuestro país.
d) La integración política de los vecinos de tu cuadra.
e) El consumo eléctrico de las viviendas de tus compañeros de aula durante el mes de agosto.
f) La talla de los jóvenes comprendidos entre las edades 12-15 años de tu escuela.

- Determina en cada caso el objeto de estudio.
- ¿Qué fuentes utilizarías para obtener los datos en cada caso?
- ¿Cómo organizarías el proceso de obtención de los datos en cada caso? Descríbelos.
- ¿De qué instrumentos te valdrías para obtener la información en cada caso?
- ¿Qué acciones consideras que debes realizar durante el proceso de obtención en cada caso?
- ¿Consideras útil los resultados que se obtienen del estudio realizado? ¿Por qué?
- Elabora un resumen en que expongas los resultados del estudio realizado y la importancia del trabajo con datos para la sociedad.

4. Redacta una composición donde expongas la importancia del trabajo con datos para la sociedad.

1.2.1 Distintas formas de representar los datos

Diariamente, en los periódicos, las revistas y la televisión se muestran informaciones de carácter económico, político y social donde aparecen datos representados en **tablas y gráficos** que reflejan la situación nacional e internacional de la sociedad y del mundo en que vivimos.

Recuerda que:

Las **tablas** constituyen una forma en que se pueden representar datos y permiten mostrar la información de situaciones, hechos, problemáticas y fenómenos de forma resumida, lo que facilita la descripción e interpretación del fenómeno que se desea estudiar en correspondencia con los datos que en ella se muestran (tabla 1.1).

Tabla 1.1

Mortalidad Infantil por provincias
(Últimos cinco años)

Provincias	2007	2008	2009	2010	2011
Pinar del Río	5,4	5,7	3,9	5,0	4,0
Prov. Habana (*)	5,6	4,2	5,0	5,2	–
Artemisa (*)	–	–	–	–	3,9
La Habana (**)	5,0	5,7	4,9	5,0	4,3
Mayabeque (*)	–	–	–	–	5,7
Matanzas	4,4	4,1	4,5	3,7	5,4
Villa Clara	5,5	3,3	4,4	2,5	5,7
Cienfuegos	7,1	4,8	6,8	3,7	5,0
Sancti Spíritus	4,1	4,2	3,6	4,9	5,9
Ciego de Ávila	7,0	6,9	5,8	5,4	4,4
Camagüey	4,2	4,7	4,0	4,4	5,6
Las Tunas	4,4	2,7	3,6	5,5	3,5
Holguín	5,0	3,3	3,5	3,1	4,0
Granma	5,3	4,0	5,3	4,7	4,4
S. de Cuba	5,9	6,1	6,7	5,3	5,9
Guantánamo	6,1	5,7	4,6	5,7	6,1
I. de la Juventud	5,3	2,9	9,2	2,8	7,9
NACIONAL	**5,3**	**4,7**	**4,8**	**4,5**	**4,9**

Fuente: Dirección Nacional de Estadísticas del MINSAP

Los **gráficos** también constituyen una manera en que se presentan datos, se confeccionan con el propósito de condensar grandes grupos de datos y mostrarlo de forma tal que permita una fácil e inmediata captación visual. Estos aportan mayor información pues la visualización permite destacar los principales aspectos del fenómeno objeto de estudio (fig. 1.12).

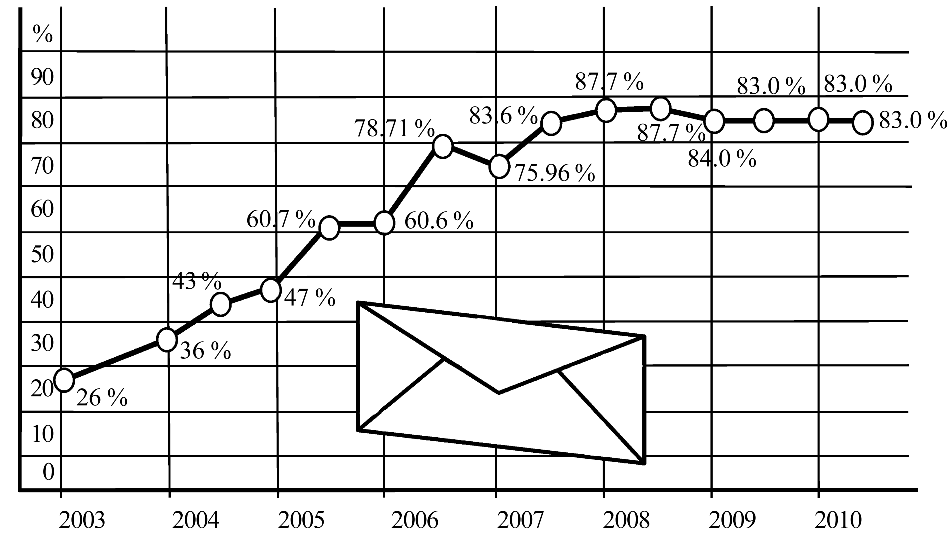


Figura 1.12

Ejercicios

1. En la biblioteca de una escuela secundaria básica aparece en el mural la tabla 1.2:

Tabla 1.2

Asistencia a la biblioteca	
Meses	Asistencia
septiembre	751
octubre	828
noviembre	656
diciembre	441
enero	529

a) ¿Qué información te brinda esa tabla?
b) ¿En qué mes asistieron menor cantidad de personas?
c) ¿Cuántas personas más asistieron en octubre que enero?
d) El promedio de personas que asistieron los tres últimos meses fue de:

1) ___ 656 2) ___ 641 3) ___ 542 4) ___ 3 205

e) Explica cómo procediste para hacer el razonamiento que te permitió seleccionar la respuesta del inciso anterior.
f) Si te dieran la responsabilidad de actualizar la tabla 1.2 con el comportamiento de la asistencia de los cinco meses restantes del curso. ¿Qué acciones realizarías?

2. Lee detenidamente la información que muestra la tabla 1.3.[27]

Tabla 1.3

Del Medallero de los XVI Juegos Parapanamericanos de Guadalajara 2011					
Lugar	**País**	**Oro**	**Plata**	**Bronce**	**Total**
1	Brasil	81	61	55	197
2	E.U.A.	51	47	34	132
3	México	50	60	55	165
4	*Cuba*	*27*	*16*	*11*	*54*
5	Argentina	19	25	31	75

2.1 Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera para cada caso:

a) El total de medallas doradas obtenidas por estos cinco países es ___.

b) La cantidad total de medallas obtenida por ____________ superó en 122 a las obtenidas por _______________.

c) ___ países tienen una cantidad par de preseas de plata y son _________ _________________.

d) Teniendo en cuenta los totales de preseas alcanzadas, ___ países pudieron haber obtenido igual cantidad de medallas de oro, plata y bronce, y bajo estas condiciones: ______________ ocuparía el segundo lugar.

e) La tercera parte del total de medallas argentinas son de ____________.

f) El ___% de las medallas cubanas son de oro.

g) La cantidad de medallas de bronce de México es al total de medallas de la nación azteca como 1 es a ____.

2.2 Piensa en la forma de confeccionar una escala para representar en un mismo gráfico de barras toda la información que brinda la tabla 1.4, con excepción de los totales.

Tabla 1.4

Resultados cubanos en los XVI Juegos Parapanamericanos de Guadalajara 2011			
Deporte	**Oro**	**Plata**	**Bronce**
Atletismo	14		7
Natación	6		

[27] Revista *Bohemia,* 2 de diciembre de 2011. Nota: Juegos Panamericanos en los que participan atletas discapacitados.

Judo		4	
Levantamiento de pesas			
Tenis de mesa	1		2

2.3 Consulta la fuente indicada, completa la tabla 1.4 y elabora un ejercicio parecido al que acabas de responder.

2.4 Investiga sobre el medallero de los Juegos Parapanamericanos más próximos al momento en el que realices esta actividad y junto a los compañeros de grupo que nacieron en el mismo mes que tú, elabora un resumen en que hagas una valoración de los resultados obtenidos.

3. La fuerza laboral fue el recurso más eficiente al cierre de marzo de 2011 en el Campismo Popular, así lo demuestra la gráfica de la figura 1.13:

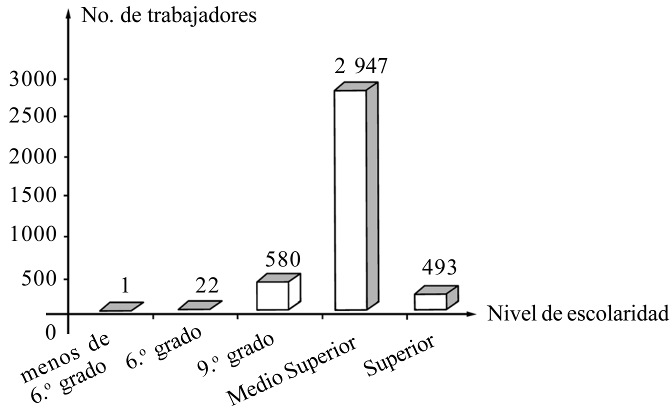


Figura 1.13

a) ¿Qué título le pondrías al gráfico?
b) ¿Cuál es el total de trabajadores de esta sana opción recreativa? Si la fuerza laboral femenina está representada por 1 598 mujeres, ¿cuántos trabajadores son hombres y qué porcentaje representan del total?
c) ¿En qué nivel de escolaridad hay mayor cantidad de trabajadores? ¿Cómo te diste cuenta de ello?
d) ¿En cuánto excede la cantidad de trabajadores de nivel Medio Superior a la cantidad de graduados universitarios?
e) ¿Consideras que este gráfico es el más idóneo para ilustrar la información? ¿Por qué? De ser negativa tu respuesta, ¿qué gráfico tú utilizarías? Justifica tu respuesta.
f) ¿Son cantidades contables las que aparecen en el gráfico?

4. La gráfica de la figura 1.14 muestra en porcentaje el comportamiento a nivel mundial de la venta de Habanos,[28] a pesar de la irracional política del bloqueo del gobierno estadounidense.

[28] Órgano de prensa *Juventud Rebelde,* 28 de febrero de 2012.

Exportaciones de Habanos al mundo 2011

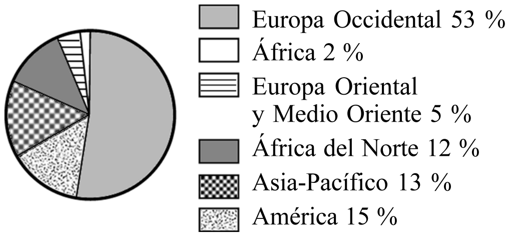


Figura 1.14

a) Identifica el tipo de gráfica.
b) Si en el año 2011, Habanos S.A. obtuvo una cifra de negocios de 401 000 000 USD, ¿cuánto aportó a dicha cifra Europa Occidental?
c) ¿Cuál fue la región que menos aportó?
d) ¿En cuántos $ USD supera lo aportado por América a lo que aportó África?

1.2.2 Distribución de frecuencias

¡! Lee cuidadosamente la siguiente problemática.

El director de una escuela secundaria básica, con la finalidad de evaluar grupalmente el rendimiento de los estudiantes del 7.º 1 en la asignatura Matemática, aplicó una prueba diagnóstico que le permitió clasificar individualmente a los 30 estudiantes en las categorías de E (excelente) MB (muy bien) B (bien) R (regular) y M (mal). Una vez calificados los trabajos registra en su libreta de control las clasificaciones atribuidas a cada estudiante de la forma siguiente:

E	MB	MB	R	M	B	M	R	B	M	B	B	B	R	M
MB	B	R	R	M	R	M	R	B	E	M	B	R	MB	B

¿Si tú fueras el director de esta escuela, cómo evaluarías el rendimiento del grupo?

Observa los datos registrados, ¿te es posible dar una evaluación inmediata del rendimiento del grupo?

Seguramente al observar pudiste apreciar que los datos están desorganizados y para dar respuesta a la pregunta con mayor facilidad y rapidez, es necesario primeramente **organizar** el conjunto de los datos que se muestran.

La organización de la información puede realizarse mediante **distribuciones de frecuencias.**

Definición:

Se entiende por una **distribución de frecuencia** a la organización de los datos en una tabla convenientemente preparada, de manera que exprese un conjunto de puntuaciones ordenadas en un grupo de categorías establecidas.

Las distribuciones de frecuencia pueden clasificarse en **numéricas** o en **categóricas.** En este caso que se analiza se clasifica como categórica.

Los datos presentados anteriormente, los cuales no han sido organizados, reciben el nombre de datos primarios. Estos pueden ordenarse en forma ascendente o descendente para facilitar su conteo y análisis. Un arreglo ordenado de estos datos primarios (que pudiera contener un número mucho mayor de datos) sería el siguiente:

E E MB MB MB MB B B B B B B B B B
R R R R R R R R M M M M M M M

Para tener una información más clara y poder procesar con mayor facilidad los datos, es útil construir una tabla, distribuir los datos por categorías y determinar el número de individuos que pertenecen a cada categoría.

¿Cómo se construye una tabla de frecuencia?

Ejemplo 1:

Tabla 1.5

Clasificación	**Conteo o tarjado**	**Cantidad de estudiantes por categorías**
E	/ /	2
MB	/ / / /	4
B	~~////~~ / / / /	9
R	~~////~~ / / /	8
M	~~////~~ / /	7

Para construir una tabla de frecuencia, con los datos de la problemática planteada, confeccionamos una tabla por categorías (tabla 1.5), en este caso se construye una **tabla** de tres columnas y seis filas, como se muestra a continuación:

En la primera fila de la tabla escribimos la identificación de cada columna y en la primera columna las categorías en orden ascendente o descendente.

Posteriormente, hacemos un conteo para determinar el número de veces que aparece cada dato. Por cada valor contado colocamos en la segunda columna un pequeño trazo vertical "/" y formamos con ellos pequeños grupos de 5 valores contados, pero escribimos el quinto trazo horizontalmente para facilitar el conteo. Así: ~~////~~. En la tercera columna se coloca el número que representa la suma total del conteo realizado.

A este tipo de tabla que resume la información, se le llama **tabla de frecuencias.**

En este caso a la cantidad de estudiantes por categoría se le denomina **frecuencia absoluta.**

Definición:

La **frecuencia absoluta** de un dato es el número de veces que aparece repetido este.

La determinación de la frecuencia absoluta de un dato facilita la realización del análisis del conjunto de datos que se estudian, y mediante ella podemos determinar, por ejemplo:

La cantidad de estudiantes que son hijos únicos en una comunidad.

La cantidad de hermanos que tienen los estudiantes del grupo.

La cantidad de jóvenes que estudian por niveles de enseñanza en un municipio.

La cantidad de jóvenes que prefieren los distintos deportes en una escuela.

Ejemplo 2:

Observa la tabla construida anteriormente y calcula el porcentaje de estudiantes a los que se les asignó la clasificación de bien (B).

Seguramente para calcular el tanto por ciento, aplicaste tus conocimientos sobre cálculo porcentual y para ello tuviste en cuenta qué tanto por ciento representa 9 (cantidad de estudiantes clasificados de Bien), de 30 (cantidad total de estudiantes).

Si observas en este ejemplo el 9 representa la frecuencia absoluta de los estudiantes clasificados de Bien y 30, la cantidad total de datos. A esta relación entre la frecuencia absoluta y el total de datos la llamaremos **frecuencia relativa.**

Definición:

La ***frecuencia relativa*** es el cociente de la frecuencia absoluta por la cantidad total de datos: Frecuencia Relativa = $\dfrac{\text{frecuencia absoluta}}{\text{cantidad total de datos}}$

Ejemplo 3:

En la tabla 1.5, el total de datos es 30, luego la frecuencia relativa para la clasificación de B es $\dfrac{9}{30} = \dfrac{3}{10}$ y esta puede ser expresada como fracción común, como expresión decimal 0,3 o en forma porcentual 30 %.

Con el objetivo de facilitar la descripción de los datos, las tablas de frecuencias contienen otras columnas, como se ilustra a continuación:

Clasificación	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa (%)
E	2	$\frac{2}{30} = 0,067$	6,7 %
MB	4	$\frac{4}{30} = 0,133$	13,3 %
B	9	$\frac{9}{30} = 0,300$	30,0 %
R	8	$\frac{8}{30} = 0,267$	26,7 %
M	7	$\frac{7}{30} = 0,233$	23,3 %
Total	30	$\frac{30}{30} = 1,000$	100 %

Observa que:

- La suma de las frecuencias absolutas es igual a la cantidad total de datos.
- La suma de las **frecuencias relativas** es igual a 1,00 (o 100 % si se trata de frecuencias relativas porcentuales).

A veces para determinar la frecuencia relativa es necesario hacer redondeos, y si no se obtiene el valor 1 o el 100 % en la suma de las frecuencias absolutas, se hacen aproximaciones.

Es importante que conozcas cómo construir una tabla de frecuencia, por ello te sugerimos que estudies el ejemplo dado y resumas en tu libreta una secuencia de pasos que te permita construirla, pero también puedes confeccionarla utilizando el procesador de texto *Word.*

Para confeccionar la tabla de frecuencia utilizando el procesador de texto *Word,* debes:

- Seleccionar en la barra de menú, la opción tabla.
- Buscar la opción insertar.
- Seleccionar la opción tabla.
- Seleccionar la cantidad de filas y columnas necesarias para construir la tabla.
- Identificar en la primera fila el nombre de las columnas.
- Ubicar en la primera columna las categorías.
- Introducir los datos correspondientes a las frecuencias absolutas y relativas.

Los cálculos de las frecuencias absolutas y relativas pueden hacerse fácilmente con ayuda de la opción fórmula que aparece en el menú de tablas; para ello debes introducir la fórmula que te permite calcularlas.

Ejercicios

1. Se lanza un dado 19 veces y se obtienen las lecturas siguientes:

   5, 2, 3, 5, 6, 2, 3, 4, 5, 2, 5, 2, 5, 3, 2, 6, 1, 4, 5

   a) Organiza los datos en forma creciente.
   b) Construye una tabla de frecuencias absoluta y relativa. Escribe en tu libreta los pasos que seguiste.
   c) ¿Cuál es la lectura más frecuente?
   d) ¿En cuántas tiradas se obtuvieron lecturas inferiores a 4?
   e) Si se remplazan dos de las lecturas del número 2 por el número 3 y dos de las lecturas del número 5 por el 6. ¿Se alterará el valor promedio de las lecturas? ¿Cuál es? ¿Se alterará el valor de la lectura que ocupa la posición central del conjunto de datos ordenados? ¿Cuál es? Explica cómo se procede para hacer el razonamiento que te permitió llegar a la respuesta en cada caso.

2. Dados los datos siguientes:

   Países que han obtenido el primer lugar en el Tenis masculino (1990-2007)[29]
   Suecia, Australia, EUA, Suiza, EUA, EUA, EUA, Suiza, EUA, EUA, Suecia, EUA, Suiza, Suiza, Brasil, Australia, EUA y EUA.

   a) Construye la tabla de frecuencia absoluta y frecuencia relativa.
   b) ¿Qué país ha obtenido la mayor cantidad de veces el primer lugar?
   c) ¿Qué porcentaje representa del total el número de veces que Suiza ha sido ganador del evento?

¿Recuerdas qué nombre reciben los gráficos que aprendiste en la primaria y para qué se utilizan?

1.2.3 Tipos de gráficos estadísticos

En ocasiones, para transmitir la información de manera rápida y que sea comprendida por otras personas, la tabla de frecuencia no es la forma más ilustrativa, por lo que se utilizan los llamados **gráficos.**

Los gráficos se confeccionan con el propósito de condensar grandes grupos de datos y mostrarlos de forma tal que sean captados más fácil y rápidamente, y sea casi inmediata su comprensión visual. Ellos aportan mayor información, pues la visualización permite destacar los principales aspectos de un fenómeno u objeto de estudio. ¿Recuerdas qué nombre reciben los gráficos que aprendiste en la primaria y para qué se utilizan?

[29] Semanario *Orbe* del 15 al 21 de marzo de 2008.

Recuerda que:

Los tipos de gráficos que pueden confeccionarse son: de barras, circulares o de pastel, poligonales y pictogramas, cada uno de los cuales tiene ventajas, que lo identifican con el tipo de análisis que hay que realizar.

Recuerda que:

Gráfico de barras. Consiste en un conjunto de columnas o rectángulos, en que se emplea una columna para cada categoría. El ancho del rectángulo así como la separación entre ellos es uniforme. La altura del rectángulo está dada por la frecuencia que corresponde a la categoría que representa. Las barras pueden ser representadas en forma vertical u horizontal. Es recomendable para la comparación de datos organizados por categorías.

Ejemplo 1:

La figura 1.16 muestra una gráfica de barras. Como puedes apreciar se puede establecer de manera rápida y sencilla, una comparación de los accidentes ocurridos desde el 2001 hasta el 2010.

Accidentes del tránsito en Cuba (2001-2010)

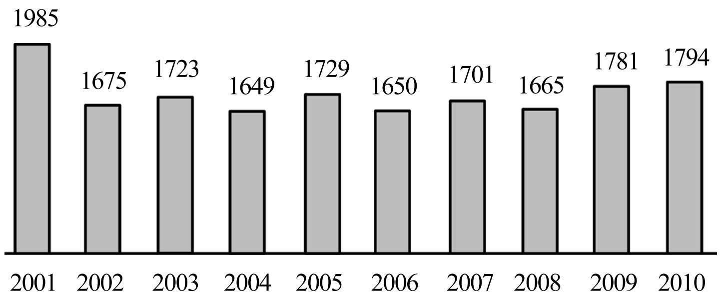


Figura 1.16

Recuerda que:

Gráfico circular o de pastel. Consiste en un círculo que está dividido en partes (sectores circulares) y cada sector circular representa una categoría cuyas amplitudes son proporcionales a la frecuencia absoluta correspondiente. Es recomendable para el análisis de las partes con respecto a un todo.

Ejemplo 2:

La figura 1.17 muestra una gráfica circular. Como puedes apreciar tiene gran impacto visual. En este gráfico fácilmente puedes comparar el porcentaje de las principales causas de accidente, se puede ver que una mayor parte de él corresponde a los accidentes por la pérdida del control del vehículo con un 28 %.[30]

Porcentaje de las principales causas de accidentes de tránsito en Cuba (2001-2010)

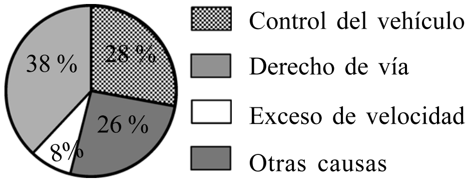


Figura 1.17

Recuerda que:

Gráfico poligonal. Esta representación consiste en una gráfica de líneas, las categorías aparecen en el eje horizontal y en el eje vertical la frecuencia. Es recomendable para el análisis de tendencias de un determinado fenómeno.

Ejemplo 3:

La figura 1.18 muestra una gráfica poligonal. Como puedes apreciar permite realizar análisis de tendencias del crecimiento de las instalaciones de los Joven Club.

Crecimiento de las instalaciones de los Joven Club (1987-2006)

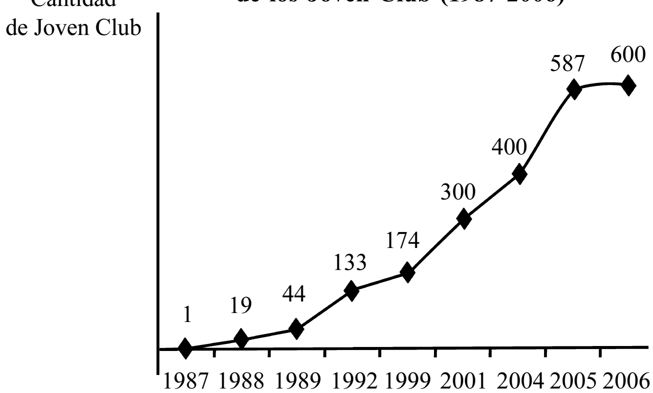


Figura 1.18

A cada año se le hace corresponder la cantidad de Joven Club que se instalaron (el valor de la frecuencia) que se señala mediante un punto, que son unidos mediante

[30] Órgano de prensa *Juventud Rebelde,* 17 de octubre de 2010.

segmentos que forman la línea poligonal. El crecimiento de las instalaciones de los Joven Club se evidencia en el comportamiento de esta línea poligonal.

Recuerda que:

> **Pictogramas.** Es una forma de organizar la información de una manera muy atractiva, en que se utilizan figuras o símbolos alusivos a los datos para representar cantidades, dispuestos en la misma fila o columna. Es recomendable para visualizar de forma rápida la información.

Ejemplo 4:

La figura 1.19 muestra un pictograma. Como puedes apreciar se visualiza fácilmente y de manera atrayente la información referente al estacionamiento de carros en diferentes horarios del día.

Carros estacionados en un parqueo

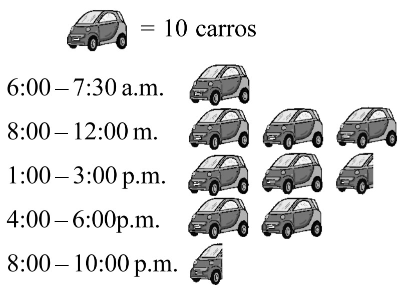


Figura 1.19

Cada dibujo representa la misma cantidad de carros. Si no está completa la figura de la leyenda que se utiliza, significa que se considera solo una parte de la cantidad asignada a ella, en este caso la mitad del símbolo son solamente 5 carros.

Ejercicios

1. En la gráfica de la figura 1.20 se representa la cantidad de pacientes (niños y adultos) relacionados con el accidente de Chernóbil atendidos en el Hospital Pediátrico de Tarará hasta el año 2002:[31]
   Observa la gráfica y responde:
   a) Identifica el tipo de gráfica.

[31] Órgano de prensa *Granma,* 19 de septiembre de 2002.

b) Consideras adecuada la representación de estos datos en este tipo de gráfica. ¿Por qué?
c) ¿De qué lugar se recibió la mayor cantidad de pacientes?
d) ¿En cuánto superan la cantidad de niños atendidos de Rusia al número de adultos recibidos del mismo lugar?
e) ¿De qué lugar se recibió mayor cantidad de adultos?
f) Calcula el promedio de niños atendidos entre los tres países.

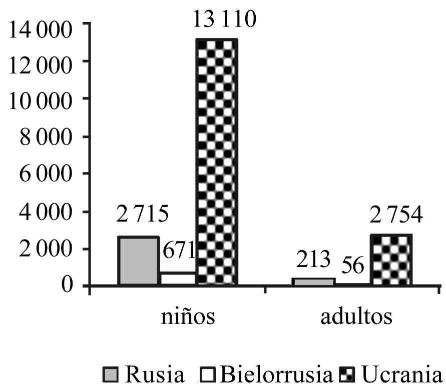


Figura 1.20

2. La gráfica de la figura 1.21 muestra el comportamiento de la asistencia de los estudiantes de un grupo de 7.º grado que tiene una matrícula de 30 estudiantes durante los cinco primeros días de un mes.

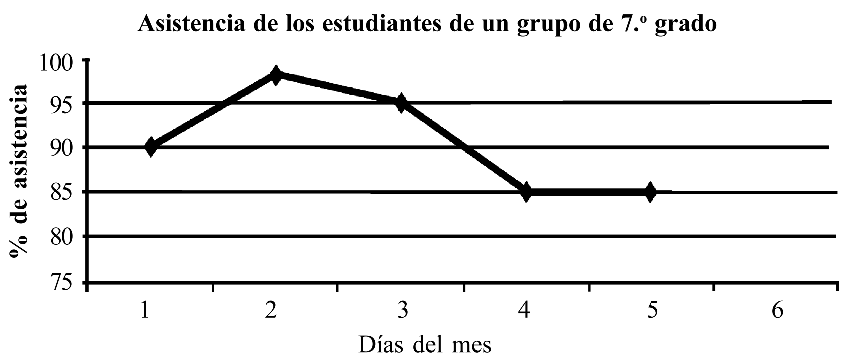


Figura 1.21

a) Identifica el tipo de gráfica.
b) ¿Con qué finalidad consideras tú que se utilizó este tipo de gráfico para reflejar estos datos?
c) ¿Cuál fue el día de mejor asistencia?
d) Calcula el tanto por ciento de asistencia alcanzado el noveno día, conociendo que ese día hubo una ausencia por enfermedad.

e) Investiga cuántos estudiantes faltaron a tu escuela durante esta semana y calcula qué tanto por ciento representa de la matrícula del centro.

3. En la gráfica de la figura 1.22 se muestra la cantidad de donaciones de sangre realizadas en un centro de trabajo.

Donaciones de sangre en un centro de trabajo

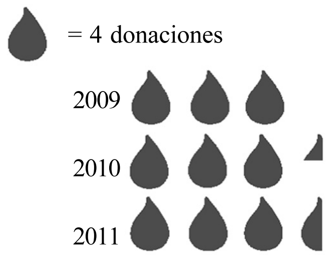


Figura 1.22

a) ¿Qué nombre recibe el gráfico? Menciona sus características.
b) ¿En qué año se hizo la mayor cantidad de donaciones?
c) Si el total de donaciones es 39. Calcula el promedio de donaciones por año.

4. En la recepción de una base de campismo aparece la gráfica como la de la figura 1.23, que informa la distribución (en porcientos) de las 500 personas que asistieron un fin de semana, los cuales están identificados en mujeres, hombres y niños.

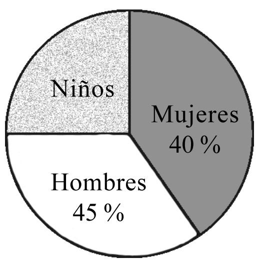


Figura 1.23

a) ¿Qué nombre le pondrías a la gráfica que ilustra los datos?

4.1 Observa la gráfica y responde marcando con una X la respuesta correcta.

a) Se puede afirmar que:

1. ___Asistieron 25 niños.
2. ___La minoría de las personas que asistieron eran hombres.
3. ___De cada 100 personas que asistieron, 40 eran mujeres.
4. ___Más de la cuarta parte de los que asistieron eran niños.

b) Calcula la cantidad de hombres que asistieron a la base de campismo ese fin de semana.

c) A continuación se muestra una secuencia de acciones realizadas por el administrador para hacer el procesamiento de los datos que le permitió la construcción del gráfico.

1. Calcular el porcentaje de mujeres, hombres y niños que asistieron.
2. Cuantificar los datos, haciendo el conteo correspondiente.
3. Organizar los datos recopilados por categorías (mujeres, hombres y niños).
4. Construir el gráfico tomando en consideración los cálculos realizados.
5. Recopilar los datos necesarios.

¿Consideras tú que esa es la secuencia adecuada para hacer el procesamiento de datos? En caso negativo, propón una nueva secuencia tomando como referencia las acciones que se relacionaron anteriormente.

5. Un estudiante quiere saber las ventajas de presentar datos en forma gráfica y no en forma de tabla. ¿Cuál es tu respuesta?

1.2.4 La media aritmética y la moda

¡! Con el objetivo de calibrar la masa de unas piezas de repuesto para su producción a mayor escala, los técnicos del control de la calidad de una fábrica han realizado comprobaciones en una pesa industrial, tomando al gramo como unidad de medida. Las medidas de masa que comprobaron en las seis primeras piezas de la línea de producción de la fábrica son las siguientes:

46,2 50 48,7 51 49,3 50

¿Cuál es la masa media de las seis primeras piezas de repuesto de la primera línea de producción de la fábrica? ¿Explica cómo la calculaste? Seguramente para calcular la masa media, tuviste que hallar la media aritmética o promedio entre las masas registradas de cada pieza.

Recuerda que:

La media aritmética es el valor alrededor del cual se encuentran los datos de un conjunto de datos.
Sean $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, n valores medidos de un conjunto de datos.

La **media aritmética** $\bar{x}$ se calcula mediante la fórmula: $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$

La media aritmética puede entenderse, intuitivamente, como el valor que tendrían los datos *si todos fueran iguales*, o sea, es el valor que representa a todos los datos contenidos en ese conjunto.

R ¡!: Ahora para resolver la problemática planteada.

Sustituimos los valores de las observaciones en la fórmula anterior, calculamos la suma y la dividimos por el número de observaciones como se ilustra a continuación:

$$\bar{x} = \frac{49,2 + 50 + 48,7 + 51 + 49,3 + 50}{6} = \frac{298,2}{6} = 49,7$$

R/ La media aritmética de la masa de las 6 primeras piezas de repuesto es 49,7.

Usualmente esta medida de tendencia central es muy utilizada al analizar situaciones de la vida.

Ejemplo 1:

Al calcular el promedio de notas de los estudiantes de un grupo.
Al calcular el promedio del gasto de energía en una empresa, en un período de tiempo.
Al calcular el promedio de personas que visitan diariamente su consultorio médico.

Recuerda las características de la media aritmética:

- Es fácilmente entendible por la mayoría de las personas.
- Puede calcularse cuando los datos son numéricos, o sea, puede no existir.
- Es única y fácil de calcular.
- Toma en cuenta todos los valores del conjunto de datos de forma individual; esto es, recorre el conjunto completo de datos.
- Si existen valores muy alejados de la mayoría, entonces se distorsiona mucho y deja de reflejar la realidad existente.

Observa nuevamente el conjunto de datos de la situación inicial sobre la masa de las seis primeras piezas de repuesto ¿Cuál es la masa más frecuente? Seguramente observaste que es 50 kg. ¿Qué nombre recibe en el conjunto de datos?

Recuerda que:

La **moda** es el dato que más se repite o la categoría de datos que tiene mayor frecuencia absoluta en un conjunto de datos. Se determina por conteo.

En ocasiones un conjunto de datos puede tener más de una moda y esto ocurre cuando son varios los datos que más se repiten, también puede no tener moda, por ejemplo:

En un grupo de nueve estudiantes se comprobó mediante una encuesta de opinión sobre sus preferencias por las manifestaciones culturales. Tres de ellos prefieren teatro; otros tres, la danza; dos la música y uno las artes plásticas. Como puedes apreciar existe mayor preferencia por el teatro y la danza, lo que te indica que existen dos datos que más se repiten, lo que muestra que hay más de una moda.

Al mismo grupo se le preguntó sobre sus preferencias por la práctica del deporte y se comprobó que tres de ellos prefieren el béisbol; tres, el atletismo, y el resto, voleibol.

Como puedes apreciar no existe mayor preferencia por alguno de estos tres deportes, lo que te indica que no existe un dato que más se repita, lo que te indica que no hay moda.

Es usualmente empleada para estudiar situaciones de la vida, cuando son utilizados datos cualitativos, pues no depende de cálculos como ocurre con la media aritmética.

La moda se puede utilizar, por ejemplo, para:

Indicar la música más preferida por los estudiantes de un grupo.
Indicar la nota más frecuente que se obtuvo en una prueba aplicada en un grupo.
Identificar el horario preferido por los pobladores de una ciudad en una encuesta.

Recuerda las características de la moda:

- Es muy sencilla tanto para determinarla como para interpretarla.
- Se utiliza tanto para datos cuantitativos como cualitativos.
- No requiere cálculos, basta hacer conteos.
- Puede no existir o no ser única.

Cuando te sea necesario calcular la media aritmética o determinar la moda para hacer el análisis de situaciones, problemáticas o fenómenos de la vida, es bueno que te hagas algunas preguntas tales como:

¿Cuál de las medidas caracteriza mejor el conjunto de datos? ¿Es posible calcular la media? ¿Con qué valores hay que operar para calcular la media? ¿Cómo se calcula la media? ¿Qué significado tiene este dato dentro del conjunto de datos? ¿Cuál es el valor más frecuente? ¿Qué información me aporta la media y moda para la situación que estoy analizando? ¿Cómo explica la media y la moda la cualidad o características del mundo real que estoy estudiando? ¿Cuáles son los datos más cercanos a la media? ¿Cuáles son los más alejados de la media? ¿Cuáles datos tienen una frecuencia más baja?

Estas y otras preguntas que te harás te facilitarán hacer el análisis de la situación planteada y arribar con mayor facilidad a conclusiones.

La informática también brinda recursos que permiten determinar la media y la moda de un conjunto de datos.

Ejercicios

1. En un grupo de 15 estudiantes seleccionados de una secundaria básica para hacer un análisis de las notas finales obtenidas por estos en sexto grado, en la asignatura

Matemática, se registraron los resultados siguientes: 100, 70, 50, 90, 90, 80, 60, 60, 90, 70, 90, 60, 100, 50, 70.

1.1 Al hacer el análisis correspondiente se emitieron diferentes criterios. ¿Puedes ayudar a determinar el criterio más correcto? Selecciónalo marcando con una X.

a) ___ Todas las frecuencias absolutas son iguales.

b) ___ La frecuencia relativa correspondiente a la nota de 100 puntos es $\frac{10}{15}$.

c) ___ La media aritmética está alrededor de 75.

d) ___ La moda es 40.

e) ___ Hay seis estudiantes con notas iguales o superiores a 80 puntos.

1.2 ¿Te fue posible rápidamente determinar el criterio más correcto? ¿Por qué?

1.3 Construye una tabla de frecuencia absoluta y relativa y analiza nuevamente las alternativas descritas en el 1.1. A qué conclusión puedes llegar.

2. Juan preguntó a sus compañeros del círculo de interés de Matemática la cantidad de hermanos que tiene cada uno y registró en la pizarra el resultado siguiente:

1 2 0 3 3 4 4 3 1 2 4 3 1 3 0

a) ¿Qué tanto por ciento del total de sus compañeros tiene más de dos hermanos, pero no más de cuatro?
b) Determina la media y la moda de la cantidad de hermanos que tienen los compañeros de Juan.
c) Explica cómo determinar la media aritmética y la moda cuando los datos estén agrupados en una tabla de frecuencias.

3.* La media de cinco números es 6, si se elimina uno de los cinco números la media se convierte en 7. ¿Cuál es el número eliminado?

¡! *La Feria del Libro y los estudiantes de séptimo grado*

¿Cómo determinar la media aritmética y la moda cuando los datos están agrupados en una tabla de frecuencia?

Los estudiantes de un grupo de séptimo grado visitaron la pasada Feria del libro.

Un estudiante decidió representar el número de sus compañeros que compró cada cantidad diferente de libros en una tabla de frecuencia. Las distintas categorías las puedes apreciar en la tabla 1.6.

Tabla 1.6

Categoría según libros comprados	**Frecuencia absoluta**
No compraron libros	2
Compraron 2 libros	8
Compraron 4 libros	6
Compraron 5 libros	2
Compraron 6 libros	4
Compraron 8 libros	2
Compraron 10 libros	1

Su profesor de Matemática le pidió que calculara la media aritmética y determinara la moda de la cantidad de libros comprados por los estudiantes.

Para calcular la media aritmética, ¿procederías de manera similar a como calculaste la masa de las seis piezas de repuesto del problema propuesto al inicio del epígrafe 1.2.4?

Como puedes apreciar aquí, para cada dato (cantidad de libros) ya está determinada la frecuencia absoluta, por lo que la cantidad de sumandos se puede reducir haciendo uso del cálculo de los productos que se obtienen al multiplicar la cantidad de libros comprados por la frecuencia absoluta.

La suma de estos productos se divide por la cantidad total de observaciones y de esta forma obtenemos la media aritmética aplicando la fórmula siguiente:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + ... + x_n \cdot f_n}{n}$$

R ¡! Luego en este caso sería:

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 2 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 8 \cdot 2 + 10 \cdot 1}{25} =$$

$$= \frac{0 + 16 + 24 + 10 + 24 + 16 + 10}{25} = \frac{100}{25} = 4$$

Fíjate que el total de estudiantes del grupo que asistieron a la feria es 25, porque es la suma de las frecuencias absolutas que es igual a la cantidad total de datos; por lo que se realizaron 25 observaciones. Entonces: ¿Cuál es la moda? En este caso basta observar la tabla e identificar el valor más frecuente.

Seguramente te darás cuenta que en la categoría de la tabla estudiantes que compraron 2 libros hay más casos, es la que más se repite, es la de mayor frecuencia. Luego, se puede concluir que la moda es la categoría estudiantes que compraron 2 libros, que tiene frecuencia 8, porque 8 estudiantes compraron 2 libros. En este caso, basta observar la tabla e identificar el valor más frecuente.

Ejercicios

4. La tabla 1.7 muestra la distribución de frecuencia de los puntos anotados por los jugadores, de un equipo de baloncesto, al finalizar un juego.

Tabla 1.7

Cantidad de puntos anotados	0	4	6	10	15	20
Frecuencia	2	1	2	4	2	1

Escribe verdadero (V) o falso (F) según corresponda

a) ____ El equipo está formado por 12 jugadores.

b) ____ El equipo anotó 55 puntos.

c) ____ La media de puntos anotados por jugador fue 8.

d) ____ Más de la mitad de los jugadores del equipo anotó más de 10 puntos.

e) ____ La moda de los puntos anotados es 10.

5. El gráfico en la figura 1.24 muestra la cantidad de estudiantes que participaron en los concursos de Matemática, Español, Historia y Biología de un municipio.

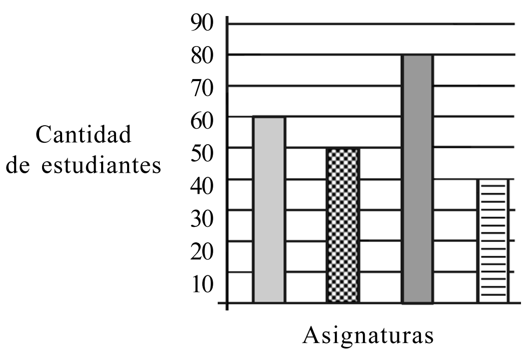


Figura 1.24

La mayor participación de los estudiantes fue en Matemática y la menor cantidad de participantes fue en Biología. Participaron más estudiantes en Español que en Historia.

a) Identifica el tipo de gráfica:______________.

b) Marca con una X la respuesta correcta. Se puede afirmar que:

1) ____Participaron en total 80 estudiantes.

2) ____El 40 % de los participantes fue en Biología.

3) ____La media de participantes por asignaturas está alrededor de 58.

4) ____Participaron en Español 20 estudiantes menos que en Biología.

c) ¿Qué porcentaje de estudiantes participaron en Matemática?

d) ¿Cómo procederías, si tuvieras que hacer el análisis de los resultados de los estudiantes de tu grado en los concursos a nivel de escuela?

6. Un estudiante de secundaria básica analiza que el promedio de las notas de 4 de las cinco asignaturas de Ciencias es de 83 puntos. Determina: la menor nota que puede sacar en la prueba de la otra asignatura; para tener 85 puntos de promedio.

7. Del periódico *Trabajadores,* con fecha del 14 de mayo de 2012, se extrajeron los siguientes datos sobre la actuación de seis de los equipos que han participado en las Ligas Mundiales de Voleibol.

Italia participó en 346 juegos y ganó 247, Bulgaria ganó 118 y perdió 80, Brasil participó en 361 y perdió 75, Cuba participó en 319, de ellos, ganó 198 y perdió 121; Japón solo ganó 55 de los 230 en que participó y Francia, de los 209 juegos en que participó, ganó 96 y perdió 113.

a) ¿Qué información te brindan esos datos?

b) Construye una tabla de forma tal que los países queden organizados en forma descendente de acuerdo con la cantidad total de juegos en que participaron. ¿En qué tipo de gráfico representarías los datos? ¿Por qué?

c) Si fueras a seleccionar qué país obtuvo mejores resultados en esos juegos, ¿cuál seleccionarías? Fundamenta tu respuesta.

8. A continuación se muestran las calificaciones de 15 y 30 estudiantes de dos grupos en una prueba de Matemática:

Grupo A

Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Calificación	80	90	40	80	50	90	90	70	80	70	80	60	90	80	60

Grupo B

Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Calificación	80	50	80	40	50	70	90	90	50	70	80	70	80	80	90	100	90

Estudiante	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Calificación	100	50	50	60	90	80	80	100	70	60	80	90	80

8.1 Construye una tabla de frecuencias que muestre los resultados de las calificaciones de ambos grupos.

8.2 Determina:

a) La media aritmética de las calificaciones de los estudiantes de cada grupo.
b) La moda.
c) El porciento de estudiantes aprobados en cada grupo.

8.3 Haz un análisis de los resultados anteriores y de la calidad de las calificaciones de los estudiantes y selecciona el grupo que consideres con mejores resultados. Argumenta el porqué de tu elección.

8.4 Si tuvieras que representar gráficamente los datos anteriores, ¿qué tipo de gráfico utilizarías?

9. En la tabla 1.8 se esconde información sobre las edades, en años, de un grupo de estudiantes de séptimo grado:

Tabla 1.8

Edad	**FA**	**FR**
11	7	0,2
12	21	
13		

a) Complétala.
b) ¿Cuál es el promedio de edades?
c) ¿Qué edad tiene la mayoría de los estudiantes?
d) ¿Qué gráfico consideras más idóneo para ilustrar la información que se muestra? ¿Por qué?

10.* ¿Existirá algún conjunto de datos en el que coincidan numéricamente la media aritmética y la moda? Ejemplifícalo.

R ¡! Después de haber recordado y estudiado los conceptos, propiedades y procedimientos para el procesamiento de datos descritos en el epígrafe y haber resuelto los ejercicios propuestos, ya debes estar en condiciones de responder la pregunta que te propusimos al inicio del tema: *cómo realizarías el estudio que te permita hacer una valoración sobre los criterios manifestados por los electores en la Asamblea de rendición de cuentas de la circunscripción.*

Para ello te proponemos que realices el conjunto de actividades que te damos a continuación:

1. Visita el consultorio del médico de la familia de la localidad y entrevístate con el doctor, la doctora o la enfermera para explicarle los objetivos del trabajo que estás realizando.
   Solicita y registra los siguientes datos:
   a) Población total que es atendida en el consultorio.
   b) Cantidad de personas por grupos de edades.
   Menores de 2 años, de 2 a 6, de 7 a 13, de 14 a 30, de 31 a 64, 65 o más.
   c) Cantidad de consultas diarias realizadas durante la última quincena.
   d) Cantidad de visitas de terreno realizadas durante los seis últimos meses.
   e) Cantidad de mujeres embarazadas de: 14 a 18 años, de 19 a 25, de 26 a 35, de 36 a 40, más de 40 años.
   f) Cantidad de mujeres con edad de realizarse la prueba citológica y cantidad de mujeres que se la han realizado.

2. En la localidad pregunta a la población su criterio sobre la atención que recibe del consultorio médico.
   Para ello elabora un cuestionario que te permita recoger la información que deseas.
   Entrevista a jóvenes y adultos, entre ellos: trabajadores, amas de casa y personas de la tercera edad.

3. Una vez registrada la información:

3.1 Organiza los datos recopilados y cuantifícalos.

3.2 Represéntalos en una tabla de frecuencias absoluta y relativa.

3.3 Represéntalos en el tipo de gráfico que consideres más apropiado para cada caso.

3.4 Determina porcentajes, medias y modas que te permitan hacer valoraciones.

3.5 Elaborar un informe por escrito en el que:

- Expliques el procedimiento utilizado para obtener la información.
- Resumas los resultados obtenidos de los datos recopilados.

– Expreses los criterios dados por la población en relación a la atención que reciben.
– Valores, la atención que se da por el consultorio médico de tu localidad a la población que es atendida.

1.3 El concepto de número racional

Hasta ahora has estudiado los números naturales y los números fraccionarios, dados estos últimos por fracciones, expresiones decimales finitas y expresiones decimales infinitas periódicas; todo lo relacionado con ellos forman parte de ese arsenal matemático con que cuentas para resolver diversas situaciones de la vida práctica, inclusive las de la propia Matemática. Un nuevo conjunto numérico llamará tu atención y verás que nos acercamos a dar respuesta a la pregunta de Alejandro, protagonista de la situación inicial de la unidad; es por ello que ahora te invitamos a recordar algunos aspectos fundamentales sobre la teoría de conjuntos.

1.3.1 Conjuntos y sus relaciones

El concepto de *conjunto* es fundamental en todas las ramas de la Matemática. Podemos caracterizar a un conjunto como una lista, colección o grupos de objetos bien definidos, objetos que, como se verá en los ejemplos, pueden ser cualesquiera: números, personas, letras, objetos geográficos, etc. Estos objetos se llaman *elementos* o *miembros* del conjunto.

Mostremos ejemplos particulares de conjuntos.

No.	Ejemplos
1	Los números 1,2; 3; 5 y 77.
2	El número fraccionario que satisface la igualdad 2, $2x + 1 = 5$.
3	Las consonantes del abecedario español.
4	Las personas que habitan el planeta Tierra ahora mismo.
5	Los estudiantes de séptimo grado de tu escuela cuyo primer apellido comienza con la letra A.
6	Las profesoras que asistieron hoy a tu escuela.
7	Los países Venezuela, Bolivia y Ecuador.
8	Las ciudades capitales de Europa.
9	Los números en que el nombre del numeral comienza con la letra D.
10	Los ríos del continente africano.

Fíjate en que los conjuntos de los ejemplos No. 1 y No. 7 vienen *definidos*, o sea, presentados, enumerando de hecho sus elementos y, que en el resto de los ejemplos, se definen enunciando propiedades, o sea, reglas que deciden si un objeto particular es o no elemento del conjunto.

Es usual denotar los conjuntos por letras mayúsculas de nuestro abecedario: *A, B, X, Y,* y cuando es necesario se representan los elementos por letras minúsculas.

Al tener en cuenta la cantidad de elementos de un conjunto existen conjuntos finitos e infinitos.

Un conjunto es finito si consta de un cierto número de elementos diferentes, es decir, si al contar los diferentes elementos del conjunto el proceso de contar puede acabar. Si no, el conjunto es infinito.

Ejemplo 1:

El conjunto X formado por los estudiantes de séptimo grado de tu escuela en el momento en el que lees este ejemplo es un conjunto finito.
El conjunto de los números pares es un conjunto infinito.
El conjunto R formado por los puntos que pertenecen a un lado del $\Delta\ ABC$ es un conjunto infinito.

Ejemplo 2:

2.1 Analiza cuidadosamente los siguientes conjuntos y determina qué tienen en común

a) Pájaros que pueden volar hacia atrás.
b) Los cubanos que han ido al cosmos.
c) Los números pares que son primos.

Respuesta: Todos se expresan al enunciar características que deciden que pertenecen a ese conjunto y todos están formados por un solo elemento.

a) El colibrí es el único pájaro que puede volar hacia atrás.
b) Solo Arnaldo Tamayo Méndez.
c) Solo el número 2.

Los conjuntos que están formados por un solo elemento se llaman conjuntos unitarios.

2.2 ¿Cuántos elementos forman estos conjuntos?

a) Números naturales que son a la misma vez pares e impares.
b) Triángulos que son rectángulos y equiláteros.
c) Puntos geográficos cubanos, que están ubicados simultáneamente en el Cabo de San Antonio y en la Punta de Maisí.

Respuesta: Es fácil darse cuenta de que estos conjuntos carecen de elementos.

Los conjuntos que no tienen elementos se llaman conjuntos vacíos. Si el conjunto es vacío, se denota por el símbolo: ϕ y de esta manera: $\{\ \}$

Los conjuntos se expresan de diferentes formas:

Descriptiva: al especificar las propiedades más representativas de sus elementos, se hace de dos formas: con palabras y con símbolos (forma constructiva).

Ejemplo 3:

C es el conjunto formado por los números primos menores que 35 y mayores que 10.

Aquí el conjunto C se expresa con palabras.

Y aquí con símbolos $C = \{n \in \mathbb{N}\text{: } n \text{ es primo y } 10 < n < 35\}$

Esta forma permite expresar tantos conjuntos finitos, como infinitos.

Por extensión: al expresar cada uno de sus elementos, también se hace con palabras y con símbolos, sin ordenamiento determinado de esos elementos (notación tabular).

Ejemplo 4:

Aquí el conjunto C se expresa con palabras.

C: conjunto formado por el 11, el 13, el 17, el 19, el 23, el 29 y el 31.

Y aquí con la notación tabular: $C = \{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$.

Fíjate en que los elementos se separan por coma (,) o punto y coma (;) y se encierran entre llaves y que $C = \{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\} = \{17, 13, 11, 31, 23, 29, 19\}$.

Para representar el conjunto nulo, se procede de igual manera que en la forma constructiva.
Seguro que te diste cuenta de que esta manera de expresar conjuntos solo es válida cuando estos son finitos.
Al graficar mediante los llamados diagramas de Venn-Euler[32] o de Venn, o sea, representar un conjunto con un área plana; quedaría expresado el conjunto C como muestra la figura 1.25.
Son muy útiles para representar cualquier tipo de conjunto al tener en cuenta la cantidad de elementos que lo forman.
En los conjuntos se pueden establecer relaciones.

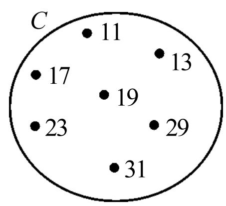


Figura 1.25

– *Relación de pertenencia*

Si un objeto x es elemento de un conjunto A, es decir, si A contiene a x como uno de sus elementos, se escribe $x \in A$, que se lee "x pertenece a A" o "x está en A". Si por el

[32] John Venn (1834-1923) matemático británico. Se destacó por sus investigaciones en la rama de la Lógica Matemática. Es especialmente conocido por su método de representación gráfica de proposiciones (según su cualidad). Leonhard Euler (1707-1783) matemático y físico suizo. El más brillante del siglo XVIII.

contrario, un objeto no es elemento de un conjunto A, es decir, si A no contiene a x entre sus elementos, se escribe: $x \notin A$. Fíjate que se utiliza una línea inclinada (puede ser recta) que tacha el símbolo para indicar lo contrario o la negación del significado del símbolo.

Ejemplo 5:

Sea el conjunto $D = \{d \in \mathbb{N}: d \text{ es divisor de } 12\}$

De ahí que $1 \in D, 2 \in D, 3 \in D, 4 \in D, 6 \in D, 12 \in D, 8 \notin D, 5 \notin D$ y $7 \notin D$.

Ejemplo 6:

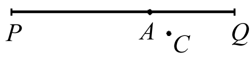


Figura 1.26

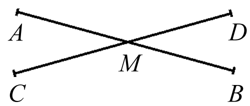


Figura 1.27

$A \in \overline{PQ}$, $C \notin \overline{PQ}$

$M \in \overline{AB}$

$M \in \overline{CD}$

– *Relación de inclusión*

Si todo elemento de un conjunto K también es elemento de un conjunto M, entonces se dice que K es un subconjunto de M. Más sencillo: K es un subconjunto de M si $x \in K$ indica que $x \in M$. Se denota esta relación así: $K \subset M$, que también se puede leer "K está contenido en M".

Si K no es subconjunto de M, es decir, si $K \not\subset M$, entonces hay por lo menos un elemento de K, que no es elemento de M.

Ejemplo 7:

Sean los conjuntos:

$D = \{d \in \mathbb{N}: d \text{ es divisor de } 12\}$ $\quad B = \{1, 2, 4, 6\}$

$F = \{1, 2, 4, 8, 9, 5\}$ y $\quad E = \{71, 17\}$

Se tiene que: $B \subset D$, $B \not\subset F$, $E \not\subset F$

Ejemplo 8:

$r \subset \alpha \quad p \not\subset \alpha$

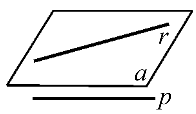


Figura 1.28

En la teoría de conjuntos se plantea que todo conjunto es subconjunto de sí mismo y que el conjunto vacío se considera subconjunto de todo conjunto.

Hay que utilizar con mucho cuidado las relaciones de pertenencia e inclusión.

Ejemplo 9:

$4 \in B$ indica que el elemento 4 es un elemento del conjunto B, pero $\{4\} \subset B$ expresa que el conjunto unitario formado por el elemento 4 es un subconjunto del conjunto B.

Ahora observa detenidamente los conjuntos B y F, ¿hay algún elemento que coincide? ¿Cuál?

Respuesta: Tres elementos pertenecen a B y a F: 1, 2 y 4. ¿Podremos decir que existe un conjunto formado por los elementos 1, 2 y 4?

El ejercicio que acabas de analizar guarda estrecho vínculo con una de las operaciones con conjuntos, operaciones que van a asignar nuevos conjuntos a pares de conjuntos A y B, aquí hablaremos de dos de ellas:

Intersección. La intersección de dos conjuntos K y M, en símbolos, $(K \cap M)$ es el conjunto de los elementos que pertenecen al conjunto K y a M simultáneamente, es decir, tanto a K como a M.

Ejemplo 10:

$B \cap F = T = \{1, 2, 4\}$

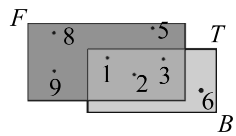


Figura 1.29

Ejemplo 11:

$\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{M\}$

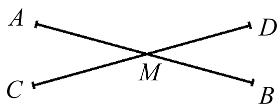


Figura 1.30

Auxiliándonos de los diagramas de Venn para expresar los conjuntos B y F, tenemos lo siguiente:

Si observamos los elementos del conjunto E y los del conjunto B, podemos plantear que no tienen elementos comunes; estos se denominan **conjuntos disjuntos.** Puedes decir también que la intersección de estos conjuntos es el conjunto vacío. Simbólicamente $E \cap B = \phi$ expresados con los diagramas de Venn, como se muestra en la figura 1.31 tenemos:

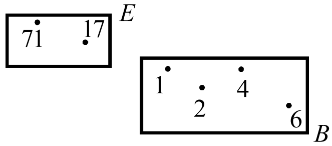


Figura 1.31

– *Unión*

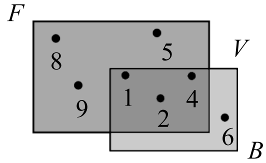


Figura 1.32

La unión de dos conjuntos K y M, en símbolos ($K \cup M$) es el conjunto de los elementos que pertenecen a uno u otro conjunto, es decir, bien a K o a M.

$B \cup F = V = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\}$
$B \cup F = F \cup B = V$

– *Relación de igualdad*

Si un conjunto M es igual a un conjunto N ($M = N$) entonces $N = M$. Si aplicamos los aspectos de la Teoría de Conjuntos tratados en este epígrafe, podemos afirmar que:

El conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) es un subconjunto del conjunto de los números fraccionarios ($\mathbb{Q}_+$), en símbolos: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}_+$

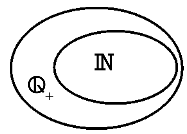


Figura 1.33

De ahí que proposiciones como estas son correctas: $\mathbb{Q}_+ \not\subset \mathbb{N}$, $11{,}34 \notin \mathbb{N}$, $6 \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{N} = \mathbb{Q}_+$.

Si expresamos con dos diagramas de Venn los conjuntos numéricos que conocemos hasta el momento, tenemos lo siguiente:

Los números naturales son números fraccionarios, pero el conjunto numérico más restringido al que pertenecen estos números, es precisamente el conjunto de los números naturales.

1.3.2 Los números enteros negativos

Después de haber recordado temas importantes de la Teoría de Conjuntos, queremos que leas cuidadosamente este texto científico:

Especialistas de un grupo espeleológico espirituano, localizaron en el macizo montañoso de Guamuhaya la cavidad cársica más alta de Cuba, ubicada a 1 024 m sobre el nivel del mar; también en la serranía de esas elevaciones se encuentra la gruta más profunda del país, que según su última medición, en el 2007, está ubicada a 4 404 m por debajo del nivel del mar.[33]

Fíjate ahora en algo: para medir cuán alta está La furnia de los perros, nombre que pusieron los descubridores a tan singular cueva, y lo profunda que está la cueva Cuba-Hungría, se toma como referencia el nivel del mar.

[33] Órgano de prensa *Granma,* 28 de febrero de 2012.

En casos como estos es necesario considerar longitudes en sentido contrario a un nivel de referencia dado. Para establecer una diferencia entre estas longitudes se emplea un signo que permita distinguirlas. Ese es el signo menos, que ya tú conoces: "–".

Luego, podemos dar a conocer tan extremos datos así: La furnia de los perros se ubica a $1\ 024\ \text{m}$ y la más recóndita cueva cubana está a $-440\ \text{m}$ (con respecto al nivel del mar), como aparece en la figura 1.34.

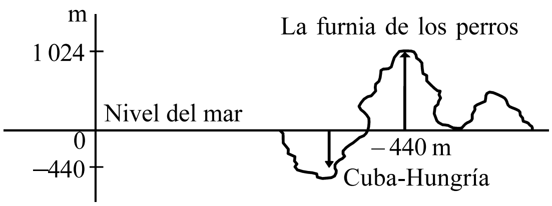


Figura 1.34

Veamos otras situaciones.

El **déficit comercial** de una nación es una cantidad negativa que demuestra que en un período de tiempo determinado el país compró al exterior más de lo que vendió.

Ejemplo 1:

El déficit comercial ecuatoriano llegó a – 1 313 000 000 USD entre enero y octubre de 2010, principalmente por aumento de las importaciones de vehículos, neumáticos, refrigeradores, celulares y otros artículos.[34]

Ejemplo 2:

De enero a diciembre de 2011, la economía española presentó un déficit de $-46\ 375\ 000\ 000€$, debido a unas ventas valoradas en doscientos catorce mil cuatrocientos cuarentaiocho millones de euros y unas importaciones por doscientos sesenta mil ochocientos veintitrés millones.[35]

Ejemplo 3:

La figura 1.35 muestra un mapa que nos indica la temperatura de un área geográfica europea el 2 de febrero de 2012; fíjate cómo se auxilian del signo menos para expresar los valores de temperatura por debajo de 0°C.[36]

[34] Órgano de prensa *Granma,* 27 de enero de 2011.

[35] *www.prensa-latina.cu,* consultado el 29 de febrero de 2012.

[36] Búsqueda en *Google* el 29 de febrero de 2012.

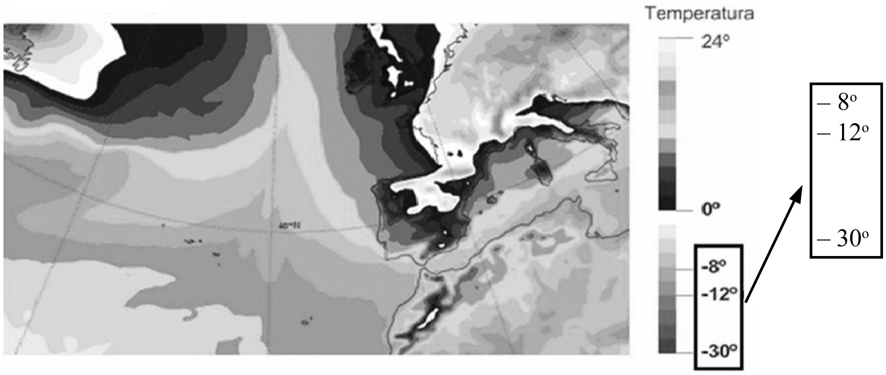


Figura 1.35

Ejemplo 4:

En una competencia realizada en La Rioja, España, el 23 de enero de 2012; entre otras cosas, describe el comentarista que el viento sopló en contra en ocasiones con rachas fuertes de – 4 m/s; así es difícil lograr buenas marcas, pero los atletas estuvieron ahí para intentarlo y hubo resultados interesantes.

Ejemplo 5:

En el siguiente anuncio se utiliza el signo menos para dar a conocer que el precio de una blusa tiene un descuento del 20 % o del 30 % bajo determinadas condiciones. El nivel de referencia es el precio de la blusa en un momento dado, de ahí la ventaja de asumirla.

BLUSAS
Contigo

¡Esta es su oportunidad!
– 20 % si llevas dos prendas.
Si llevas tres o más **– 30 %**

Ejemplo 6:

El mapamundi que muestra la figura 1.36 está dividido en una serie de bandas llamadas husos horarios. Cada huso está delimitado por meridianos. Al cruzar estos, la hora cambia hacia delante o hacia atrás según se cruce el huso en dirección este u oeste. El número que se encuentra en la parte baja de cada huso indica la variación horaria entre este y el huso 0, que es el meridiano de Greenwich. Este es el meridiano de partida, de modo que al este la variación es positiva y al oeste es negativa, o sea, cuando vemos que el número de la parte baja está precedido del signo menos. Así, un viajero que va hacia el oeste deberá atrasar su reloj una hora cada vez que cruce un huso distinto.[37]

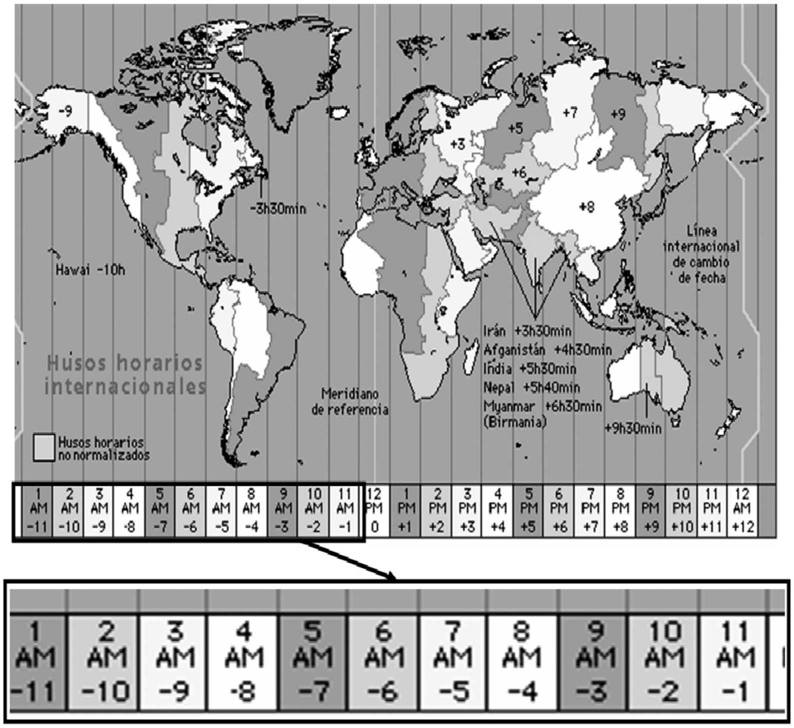


Figura 1.36

Ejemplo 7:

En la figura 1.37 ilustramos dos móviles que parten de un mismo punto 0 y que se han desplazado en sentido contrario (opuesto) por un camino recto.

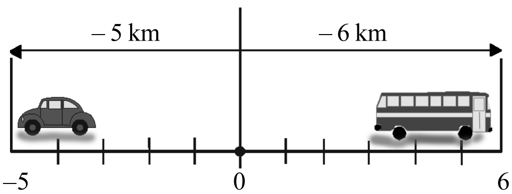


Figura 1.37

Al cabo de cierto tiempo, el ómnibus recorrió 6 km y el automóvil 5 km, pero en **sentido opuesto** con respecto al punto de partida 0. Para diferenciar el sentido de

[37] Ejemplo elaborado con la colaboración del Lic. René Alberto Cantero Pérez, especialista en Geografía.

ambos desplazamientos, también hemos empleado el signo "–", como habrás podido observar.

No olvidemos que un número precedido del signo "–" que conociste al comenzar esta unidad, fue el que hizo que Alejandro, protagonista de la historia del inicio, se hiciera muchísimas preguntas.

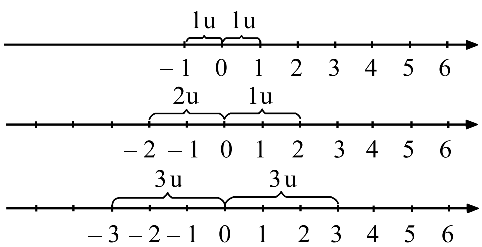
Esperamos que te hayas convencido de que en el mundo existen cantidades negativas, que, junto a las positivas, de belleza el mundo visten.

Los griegos no trabajaron con números negativos, a pesar de que los comerciantes tenían que calcular, es cierto, con deudas por una parte y con saldo activo por otra. Sin embargo, en la sociedad esclavista en que cualquier actividad productiva y cualquier forma de trabajo se trataba con desprecio, existía un profundo abismo entre la teoría y la práctica.[38]

Figura 1.38

En general, sobre una línea horizontal y a partir de un punto de ella, se consideran las cantidades en un sentido como *positivas* y las tomadas en sentido contrario como *negativas*. Por convenio, se consideran positivas las cantidades tomadas hacia la derecha y negativas las tomadas hacia la izquierda, a partir de un punto dado.[39]

Veamos por el momento de qué manera se representan geométricamente dichas cantidades (fig. 1.39).



Y así sucesivamente…

Figura 1.39

[38] Colectivo de autores: *Matemática 7,* 1979.

[39] Consideraciones similares se tienen en cuenta también sobre una línea vertical; en este caso son positivas las cantidades tomadas hacia arriba y negativas las tomadas hacia abajo, a partir de un punto dado.

Ya sabes que en el rayo numérico se representan los números fraccionarios. Ahora bien, para representar las cantidades negativas (situadas a la izquierda del cero) tenemos que ampliar el rayo numérico a una recta.

De esta forma, a partir de ahora consideraremos una recta numérica, como muestra la figura 1.40.

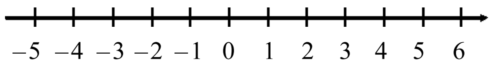


Figura 1.40

La saeta a la derecha indica el sentido positivo. Los números naturales aparecen representados a la derecha del cero en la recta numérica. En la semirrecta opuesta (a la izquierda del cero) se representan los números negativos, que se denotan precedidos del signo "–".

Observa que para cada número natural existe un número negativo, tal que ambos están situados en la recta numérica *simétricamente* con respecto al cero.

Ejemplo 8:

Por ejemplo: -1 y 1; -5 y 5; -6 y 6. A estos pares de números se les da el nombre de *números opuestos*. Dos números enteros opuestos se diferencian solo en el signo:

El opuesto de 5 es – 5 El opuesto de – 4 es 4

El opuesto de 0 es 0 (caso particular) El opuesto de a es $-a$. Para todo $a \in \mathbb{Z}$.

Definición:

> El conjunto formado por los números naturales y sus opuestos, constituye ***el conjunto de los números enteros,*** el cual se denota por $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$. Es un conjunto infinito.

Los números enteros, que están situados en la recta numérica a la derecha de cero, reciben el nombre de *números enteros positivos.*

Los números enteros, que están situados en la recta numérica a la izquierda de cero, reciben el nombre de *números enteros negativos,* los cuales se denotan precedidos del signo "–".

Los números enteros positivos y el cero reciben el nombre de *números enteros no negativos* (se identifican con los números naturales).

Los números enteros positivos pueden también escribirse precedidos del signo "+"; así por ejemplo, puede escribirse + 3 en lugar de 3, + 27 en lugar de 27.

Los números enteros negativos y el cero reciben el nombre de *números enteros no positivos.*

¡Al menos, ya sabemos que el – 5, que vio Alejandro en la libreta, en la situación inicial del capítulo, es un número entero!

Desde ahora te adelantamos que en el conjunto de los números enteros encontraremos qué número satisface igualdades como esta: $3 + x = 2$.

1.3.3 Módulo o valor absoluto de un número entero

Veamos una vez más la recta numérica (fig. 1.41):

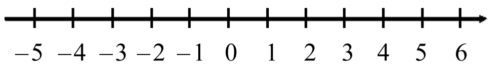


Figura 1.41

Escoge dos números naturales y dos enteros negativos, ¿cuál es la distancia que hay de cada número entero al cero? Imaginemos que escogimos 3, 5, – 2 y – 4.

La distancia de 3 al cero es 3.
La distancia de 5 al cero es 5.
La distancia de – 2 al cero es 2.
La distancia de – 4 al cero es 4.
¿Qué significa esta distancia en cada caso?

Esta distancia se representa por un número al que llamaremos *valor absoluto* o *módulo*.

El *valor absoluto* o *módulo* de un número entero es la distancia desde el punto correspondiente del número en la recta numérica hasta el cero en dicha recta. Se determina de la forma siguiente:

> Si el número entero es positivo, su módulo es el propio número.
> Si el número entero es negativo, su módulo es el opuesto del propio número.
> El módulo de cero es cero.

El valor absoluto se representa colocando al número entre dos rayas verticales: | |.

Ejemplo 1:

| 3 | se lee “módulo de 3” o también “valor absoluto de 3”. (fig. 1.42)
| – 5 | se lee “módulo de – 5” o también “valor absoluto de – 5”.

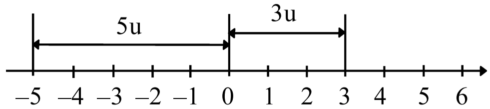


Figura 1.42

Observa que:

El módulo de cualquier número entero ***nunca es negativo.***

Escoge dos números enteros que sean opuestos y halla el módulo de cada uno. Compara los resultados obtenidos.

Algunos ejemplos: 31 212 y –31 212; – 4 678 890 y 4 678 890; 888 y – 888.

El módulo de 31 212 es 31 212.	El valor absoluto de – 31 212 es 31 212.
$\lvert -4\,678\,890 \rvert = 4\,678\,890$	$\lvert 4\,678\,890 \rvert = 4\,678\,890$
El valor absoluto de 888 es 888.	La distancia de – 888 al cero es 888.

Los resultados obtenidos son iguales.

De forma general:

Dos números enteros opuestos tienen ***el mismo módulo.***

Al retomar lo estudiado sobre la teoría de conjuntos, tenemos lo siguiente (fig. 1.43):

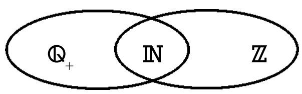


Figura 1.43

El conjunto de los números naturales es el más restringido de los conjuntos estudiados.

El conjunto de los números enteros no es denso porque entre dos números enteros consecutivos no existe otro entero, por eso en él existe el antecesor y el sucesor de un número y en su momento lo podrás hallar como mismo lo hacías en el conjunto de los números naturales.

Recuerda que:

- Todos los números enteros mayores que cero se consideran positivos, y sus opuestos se consideran negativos.
- El cero no es positivo ni negativo, luego el opuesto del cero es el propio cero.
- El conjunto formado por el cero y todos los números enteros positivos, se denomina conjunto de los números enteros no negativos.
- El conjunto formado por el cero y todos los números enteros negativos, se denomina conjunto de los números enteros no positivos.

- Los números opuestos están situados en la recta numérica simétricamente respecto al cero.
- Los números enteros que solo se diferencian en el signo, se llaman opuestos, por ejemplo, 20 y –20 son números opuestos.
- El módulo o valor absoluto de cualquier número entero nunca es negativo. Dos números enteros opuestos tienen el mismo módulo, por ejemplo:
- | –20 | = 20 y | 20 | = 20; luego, | –20 | = | 20 |.

Ejercicios

1. En el espacio en blanco coloca el signo que corresponda $(\in, \notin, \subset, \not\subset)$ de forma tal que obtengas proposiciones verdaderas:

a) -1 __ $\mathbb{N}$ b) $\{1\,234\}$ __ $\mathbb{N}$ c) $\mathbb{N}$ __ $\mathbb{Z}$ d) $\left\{3\frac{1}{2};\ 4\frac{1}{7}\right\}$ __ $\mathbb{Q}_+$

e) 0 __ $\mathbb{Z}$ f) $\{-5;\ -7;\ 0\}$__ $\mathbb{Z}$ g) -100 __ $\mathbb{N}$ h) $\left\{85;\ 29;\ 60\,006;\ \frac{1}{4}\right\}$ __ $\mathbb{Q}_+$

i) $4,\overline{111}$__ $\mathbb{Q}_+$ j) $\left\{5;\ 4;\ \frac{1}{4}\right\}$__ $\mathbb{N}$ k) $\frac{1}{83}$__ $\mathbb{Z}$ l) $\left\{0;\ 5;\ \frac{1}{3}\right\}$__ $\mathbb{Q}_+$

m) 4 __ $\mathbb{Z}$ n) 1,23 __ $\mathbb{Q}_+$ ñ) 0__ $\mathbb{N}$ o) $\{-252;\ -79;\ -10\}$ __ $\mathbb{Z}$

2.* Anachel echó en una bolsa tarjetas marcadas con los números naturales del 1 al 20 y otras veinte con los opuestos de estos. Cada vez que selecciona una tarjeta, ¿qué posibilidad tiene de extraer una que tenga un número entero?

3. Es posible representar en un rayo numérico las siguientes cantidades. ¿Por qué?

a) antecesor de 100 000
b) el opuesto de 4
c) cuatrocientas setentaisiete milésimas
d) el opuesto de 2 552
e) el cero
f) el opuesto de – 7

g) el menor número natural que sucede a $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$

4. Dado el siguiente listado de números:

$17;\ -3;\ 5\frac{1}{8};\ 0;\ -25\,250\,250;\ 11,3;\ -3\,003;\ 5,34\overline{5}$

Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas (V) o falsas (F). Escribe V o F en la línea dada. De las que consideres falsas, justifica por qué lo son.

En el listado:

a) ___ aparecen cinco números fraccionarios.

b) ___ hay tres números naturales.

c) ___ solo los números negativos son números enteros.

d) ___ al hallar el opuesto a cada uno de los números negativos que aparecen, obtenemos números naturales.

e) ___ el valor absoluto de cada uno de los números enteros que aparecen en la lista, difiere de la distancia del cero en la recta numérica.

5.* ¿Cuántos pares ordenados $(x; y)$ de números enteros no negativos existen tales que:

a) $x + y = 4$ b) $x + y = 20$ c) $x + y = n$, $n \in \mathbb{N}$?

1.3.4 El conjunto de los números racionales

Estudiantes del círculo de interés Lo que me contó un número negativo salieron a la "caza de esas cantidades", varios de los resultados llamaron su atención desde el punto de vista matemático, veamos tres de ellos para entender por qué:

Lee cuidadosamente cada uno:

1. ***¡Al cierre!*** Récord mundial de temperatura en Azizia y Vostok

El récord mundial absoluto de calor lo posee la localidad libia El Azizia, que el 13 de septiembre de 1922 registró 58°C, mientras que el de frío corresponde a – 89,2°C en el lago antártico Vostok, el 21 de julio de 1983. La temperatura media anual más baja pertenece a la Meseta Antártica con – 56,6°C.[40]

Aquí las cantidades negativas – 89,2 y – 56,6 llamaron su atención, sabemos que son temperaturas por debajo de 0 °C, pero esos números no son enteros.

2. ***¡Al cierre!:*** Cuidemos la casa común

Esta es la variación neta anual de la superficie forestal 2000-2005 según la (FAO, 2007).[41]

En esta, solo aparece un número entero: el cero, en algunos techos de las barras y en el eje horizontal del gráfico, se han ubicado números negativos que no conocemos aún, todos nos indican que en ese período de tiempo ha ido disminuyendo la superficie forestal en la mayoría de las áreas geográficas (fig. 1.44).

[40] Oscar Rodríguez Díaz: *Geografía de las curiosidades* y órgano de prensa *Juventud Rebelde,* 29 de agosto de 2007.

[41] *Cambio Climático. Universidad para todos,* tabloide, parte 2.

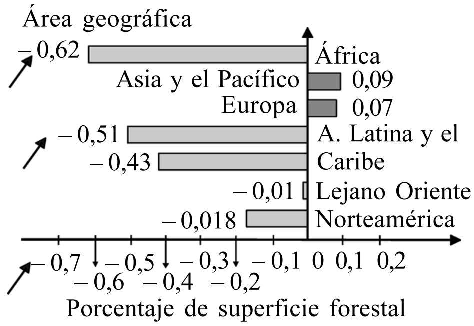


Figura 1.44

3. ***¡Al cierre!:*** ¡Qué frío!

La ola de frío europea de inicios de 2012, congeló esta parte del planeta, aquí un ejemplo: en el sudeste de ***Polonia*** *se registraron las temperaturas más bajas de Europa, tras alcanzar los – 38,5 °C.*[42]

El gélido valor de temperatura tampoco es un número entero.

¡– 89,2; – 56,6; – 0,62; – 0,51; – 0,43; – 0,18; – 0,01; – 0,7; – 0,6; – 0,5; – 0,4; – 0,3; – 0,2; – 0,1 y – 38,5!

¿Qué números son esos? ¿Son opuestos de números fraccionarios, que no son números naturales? ¿Pueden ser ubicados en la recta numérica? ¿Cómo hacerlo?
En este epígrafe responderás estas interrogantes.

Definición:

El conjunto formado por los números fraccionarios y sus opuestos, constituye *el conjunto de los números racionales,* el cual se denota por $\mathbb{Q}$.

Este conjunto es infinito.

R ¡!: ¡La base de la potencia que llamó la atención de Alejandro es un número racional, ya que es un número fraccionario!

Los números que sobresalían en las tres situaciones son números racionales, pues son opuestos de números fraccionarios, veamos algunos:

El opuesto de 89,2 es – 89,2
El opuesto de 56,6 es – 56,6
El opuesto de 0,62 es – 0,62
El opuesto de 0,51 es – 0,51
El opuesto de *a* es – *a*. Para todo a $\in$ $\mathbb{Q}$.

Dos números racionales opuestos se diferencian solo en el signo.

[42] Búsqueda en *Google* el 29 de febrero de 2012.

Se cumple que a cada número racional corresponde un punto en la recta numérica.

No debe existir dificultad para representar en la recta numérica números enteros; de forma general, para representar números racionales, primero trazamos una recta y situamos un punto al cual se le hace corresponder el cero, luego se determinan segmentos iguales a la derecha y a la izquierda del cero. El procedimiento para representar los números racionales positivos es el mismo que ya conoces, pues como tú bien sabes esos números son números fraccionarios.

Veamos de qué manera representar en la recta numérica dos valores que llamaron la atención en la situación No. 1 (fig. 1.45):

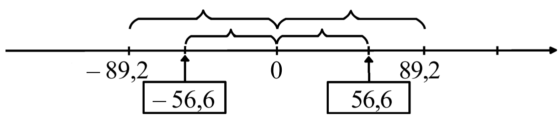


Figura 1.45

Ya sabes que el eje horizontal del gráfico de barras que aparece en la situación No. 2 de este epígrafe, cuidemos la casa común, es una recta numérica en la que fue preciso ubicar varios números racionales.

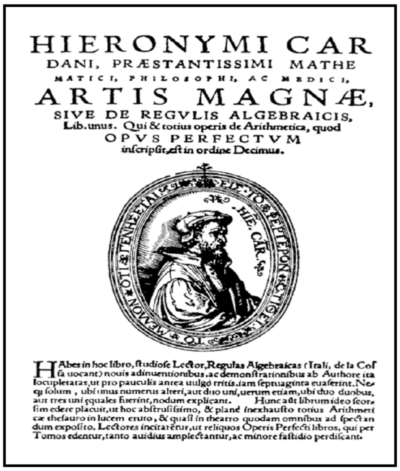
Recuerda que:

- Los números racionales que están situados en la recta numérica a la derecha de cero, reciben el nombre de *números racionales positivos.*
- Los números racionales que están situados en la recta numérica a la izquierda de cero, reciben el nombre de *números racionales negativos*. Los cuales se denotan precedidos del signo "–".
- Los números racionales positivos y el cero reciben el nombre de *números racionales no negativos* y se identifican con los números fraccionarios.

Los números racionales positivos pueden también escribirse precedidos del signo "+"; así por ejemplo, puede escribirse + 0,8 en lugar de 0,8, $+\frac{1}{2}$ en lugar de $\frac{1}{2}$, etcétera.

La introducción del concepto de número negativo en Occidente no fue tarea fácil (fig. 1.46). El primer occidental que los utilizó fue el matemático milanés Girolamo Cardano en su obra Ars Magna *(1545). Cardano se refirió a estos números como numeri ficti (números inventados). Otro matemático, Michael Stifel (1487-1567) excelente algebrista e introductor de los números negativos por la misma época, los llamó números "absurdos".*[43]

[43] Colectivo de autores. *El mentor de matemáticas,* 2008.


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscriptũ est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neq; solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Figura 1.46

Ya sabes que todo número fraccionario puede ser escrito como el cociente de dos números naturales siempre que el divisor sea diferente de cero. O sea, $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, representa un número fraccionario.

¿Todo elemento de $\mathbb{Z}$ puede escribirse como el cociente de dos números enteros?

Sí, comencemos por los números naturales: Todo número natural *a* se puede escribir de la forma: $\frac{a}{1}$, $a \in \mathbb{N}$ y todo número natural es un número entero.

Ejemplo 1:

a) $34 = \frac{34}{1} = \frac{68}{2} = \frac{102}{3}$; $0 = \frac{0}{1}$; $17 = \frac{34}{2} = \frac{68}{4} = \frac{85}{5}$

b) Todo número entero se puede escribir como el cociente de dos números enteros:

$$-12 = -\frac{24}{2} = -\frac{36}{3} \ldots$$

Recuerda que:

- Todo número racional pueden escribirse siempre en la forma: $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.

  Los números racionales se escriben como expresiones decimales, cuyo desarrollo es finito o infinito periódico y los que son sus opuestos también pueden escribirse de esta forma.

Ejemplo 2:

El opuesto de 5,66 y de 10,8 pueden escribirse en la forma $\frac{p}{q}$, *con* $q \neq 0$ y son respectivamente: $-5{,}66 = -\frac{283}{50}$, $-10{,}\overline{8} = -\frac{98}{9}$.

Recuerda que:

- El *valor absoluto o módulo* de un número racional es la distancia desde el punto correspondiente del número en la recta numérica hasta el cero en dicha recta.
- El valor absoluto de un número racional, se determina de la forma siguiente:
  - Si el número racional es positivo, su módulo es el propio número.
  - Si el número racional es negativo, su módulo es el opuesto del propio número.
  - El módulo de cero es cero.
- El módulo de cualquier número racional *nunca es negativo.*
- Dos números racionales opuestos tienen el mismo módulo.

Ejemplo 3:

1. ¿Cuál es la distancia del número $3{,}\overline{34}$ al cero?
2. Halla el valor absoluto de – 6,77.
3. ¿Qué números racionales tienen por módulo 34 567?

Respuestas

1. La distancia del número $3{,}\overline{34}$ al cero es $3{,}\overline{34}$ u.
2. El valor absoluto de – 6,77 es $|-6{,}77| = 6{,}77$.
3. Los números racionales 34 567 y – 34 567 tienen por módulo 34 567, pues dos números racionales opuestos tienen el mismo módulo.

R ¡! Ya quedaron solucionadas todas las interrogantes de los integrantes del círculo de interés y fueron tratados otros importantes aspectos acerca del conjunto de los números racionales. Ahora veamos que:

Recuerda que:

- El conjunto de los números fraccionarios $\mathbb{Q}_+$ es un subconjunto del conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$. En símbolos $\mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{Q}$.
- También se cumple: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ y además: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, por consiguiente: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.
- Ya conoces $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}_+$.

Ejemplo 4:

a) Las relaciones conjuntistas anteriores se ilustran en el diagrama de la figura 1.47.

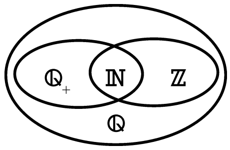


Figura 1.47

b) Como puedes observar: $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}_+ = \mathbb{N}$.

Entre dos números racionales cualesquiera, que sean diferentes, siempre se encuentran otros números racionales. Esto significa que *el conjunto de los números racionales es denso,* sin embargo, no cubren toda la recta numérica.

El conjunto numérico más restringido al que pertenecen los números racionales es el conjunto de los números racionales.

Recuerda que:

- La generalización de la forma que tienen de escribirse los números racionales $\left(\frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z};\, q \in \mathbb{Z},\, q \neq 0\right)$ permite que puedan escribirse como fracción común (parte de una unidad) y como expresión decimal, sea finita o infinita periódica.
- El conjunto de los números racionales es un conjunto denso, porque entre dos números racionales siempre es posible encontrar otro número racional.
- A todo número racional le corresponde un punto de la recta numérica, pero todo punto de la recta numérica, no es un número racional.
- Los signos más y menos de los números racionales toman significación según el contexto.
- El módulo de cualquier número racional nunca es negativo.

Ejercicios

1. Representa en una recta numérica los números racionales siguientes. Fundamenta el procedimiento utilizado en cada caso. Escoge uno de los números, determina el opuesto y ubícalo en la recta.

   $$-3\frac{1}{4};\ \frac{4}{3};\ 0;\ -1{,}5;\ 2{,}4;\ \frac{1}{2};3{,}2;\ -0{,}4;\ -2\frac{1}{2}$$

2. En la figura 1.48 aparecen representados con letras, varios puntos sobre la recta numérica. Selecciona de los números racionales siguientes los que responden a estos puntos.

$0{,}5;\ 1{,}6;\ -1{,}4;\ -\frac{3}{2};\ 2{,}2;\ 2\frac{1}{2};\ -\frac{16}{10};\ -2{,}4$

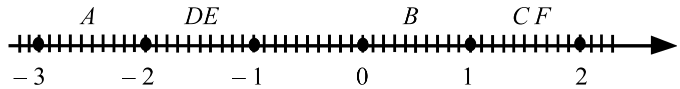


Figura 1.48

3. Determina, apoyándote en una recta numérica, entre que números enteros consecutivos están los números racionales siguientes.

a) 3,7 b) – 2,8 c) $-\frac{3}{5}$ d) 0,49 e) – 1,2

4. Determina cuáles de las proposiciones siguientes son falsas. Fundamenta tu respuesta.

a) $0{,}75 \in \mathbb{Q}$ b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ c) $-3 \in \mathbb{N}$ d) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}_+$ e) $-\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ f) $-0{,}3 \in \mathbb{Q}_+$

5. Determina el valor absoluto de los números racionales siguientes:

$5;\ -5;\ 7{,}8;\ -\frac{3}{4};\ 0;\ 3{,}4;\ -1{,}75$

6. Sean $A = \sqrt{81} + 25 : 2$ y $B = 4^3 - 4 \cdot 7$

   a) ¿Son números racionales *A* y *B*? ¿Por qué?
   b) ¿Cuál de los dos es mayor?
   c) Halla el opuesto de cada uno de ellos.
   d) ¿Cuántos números enteros hay entre *A* y el opuesto de *B?*
   e) ¿Cuántos números racionales hay entre el opuesto de *A* y el antecesor de *B?*
   f) ¿Cuál es la razón entre el módulo de *A* y el valor absoluto de *B?*

7. Determina los números racionales que satisfacen las ecuaciones siguientes:

   a) $|x| = 3$ b) $|y| = 0$ c) $|b| + 2 = 3{,}5$ d) $|z| = -4$ e)* $|a+b| = |a| + |b|$
   para $a,\ b,\ x,\ y \in \mathbb{Q}$

8. Un cartel como el siguiente observó Víctor Enrique en una librería camino a su escuela:

   Él se preguntó: ¿será verdad lo del ahorro? Rosa, la monitora de Matemática de su grupo, le explicó lo siguiente: $44 - \frac{25}{100} \cdot 44 = 33$, por eso lo del ahorro es verdad, ya que tienes a tu favor $ 11, 00.
   ¿Estás de acuerdo con ella? ¿Por qué?

Hoy

GRAN REBAJA

Si llevas 3 o más.
Combínalos como quieras, aquí tienes un ejemplo:
☺ *Humor y Matemática*
☺ *Mi sexualidad*
+☺ *Yo quiero ser...*
$ 44,00
Llevándote los tres, $ 33,00.
¡Más de $ 10,00 de ahorro!

9. En un libro de *Historia de la Humanidad,* Léster encontró la figura 1.49; en ella utilizan números negativos para representar los años antes de nuestra era, o sea, antes del año 0. Por ejemplo, 250 a.n.e. es expresado como – 250.
   Selecciona siete hechos de la Historia Antigua, recuerda su fecha y ubícala en una recta numérica creada por ti a partir de ese criterio.

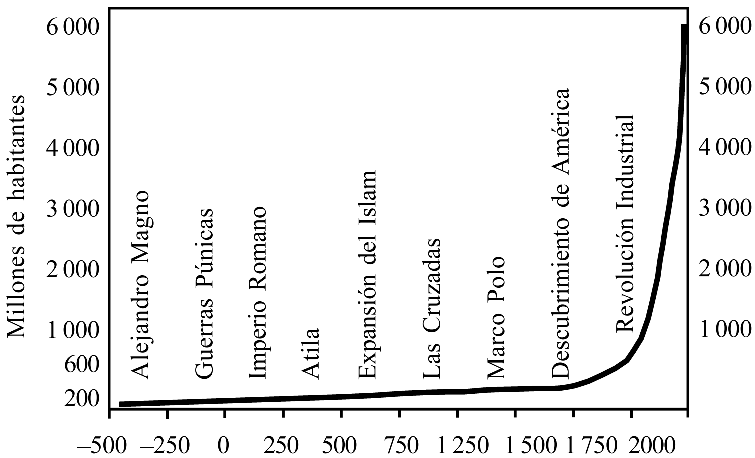


Figura 1.49

1.3.5 Orden de números racionales

¡! Analicemos algunas problemáticas del acontecer mundial:

1. ***¡Al cierre!:*** ¿Más frío o menos?

   En la temporada invernal cubana 2010-2011 hubo 16 frentes fríos y en la del 2009 2010, 25. [44]
   ¿En cuál de las dos temporadas hubo más frentes fríos?

[44] Órgano de prensa *Granma,* 30 de abril de 2011.

R ¡! Es muy fácil responder que hubo más frentes fríos en la del 2009-2010, pues 25 > 16. Aquí aplicamos todo lo que conocemos de comparación en el conjunto de los números naturales, ubiquemos estas dos cantidades en una recta numérica (fig. 1.50).

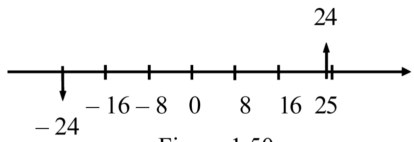


Figura 1.50

Fíjate que 16 está ubicado más a la izquierda que 25, este es otro criterio que podemos utilizar para comparar.

2. ***¡Al cierre!:*** Ola de frío en Europa

Una ola de frío azotó Europa del Este, en Serbia llegó a registrarse la temperatura de – 20°C y en Rumania de – 27°C.[45]

¿En cuál de las dos naciones hubo más frío?

R ¡! Hubo más frío en el país que la temperatura fue menor. Es más que evidente que hubo más frío en Rumania con sus 27°C por debajo de 0°C. ¿Podremos afirmar que – 27 < – 20? Ubiquemos estos dos números en la recta numérica:

En la recta numérica (fig. 1.51), – 27 está ubicado más a la izquierda que – 20, ¿será este un buen criterio para comparar números racionales? Sí, pues lo usamos para comparar números fraccionarios y estos son números racionales.

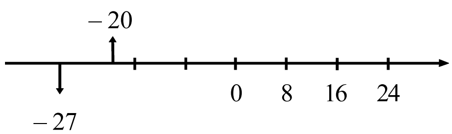


Figura 1.51

En general, la relación de orden que ya conoces para los números fraccionarios, la haremos extensiva para los números racionales.

Recuerda que:

De dos números racionales diferentes, es menor el que está situado más a la izquierda en la recta numérica.

[45] Órgano de prensa *Granma,* 31 de enero de 2012.

Ejemplo 1:

Observa la recta numérica de la figura 1.52:

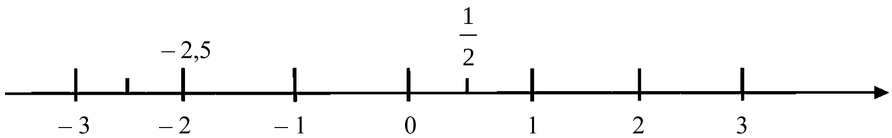


Figura 1.52

– 3 < – 2,5 porque – 3 está situado a la izquierda de – 2,5 en la recta numérica.

Así también $-2 < -1$; $-1 < 0$; $0 < \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} < 1$; etcétera.

En la práctica al comparar dos números racionales cualesquiera debes tener en cuenta que los números racionales no negativos se comparan como los números fraccionarios. Los números racionales negativos son menores que los números racionales no negativos, de dos números racionales negativos es menor el que tenga mayor módulo.

Ejemplo 2:

Compara los números racionales siguientes:

a) – 3 y 1,4 b) – 5 y – 2

Solución:

a) – 3 < 1,4 porque los números negativos son menores que los números no negativos.
b) – 5 < – 2 porque | – 5 | > | – 2 | (5 > 2)

Recuerda que:

- Para ordenar un grupo de números racionales debes tener en cuenta que:
  - de dos números racionales cualesquiera, es menor el que esté más a la izquierda en la recta numérica;
  - de dos números racionales positivos, es mayor el que tiene mayor módulo;
  - de dos números racionales negativos, es mayor, el que tiene menor módulo;
  - el cero es mayor que cualquier número negativo y menor que cualquier número positivo.

Ejercicios

1. Ordena los siguientes números racionales en orden decreciente. Fundamenta.

   $-1{,}75;\ -8;\ \frac{1}{10};\ 1;\ 0{,}5;\ -1{,}6$

2. En esta recta numérica de la figura 1.53 se ubicaron varios números racionales representados por letras. (La distancia entre dos puntos consecutivos es igual a la unidad de medida "u" que se ha considerado).

   Subraya las proposiciones verdaderas.

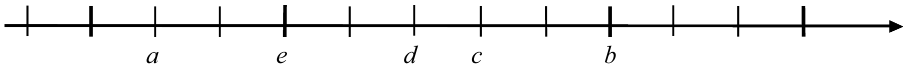


Figura 1.53

   $a > d$ $\quad a < e$ $\quad b > c$ $\quad c > e$ $\quad a < b$ $\quad d > c$

3. Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera para cada caso.

   - $\frac{3}{4} < \frac{6}{5}$ porque ____.
   - El número – 100 pertenece al conjunto de los números _____________.
   - $-\frac{1}{21}$ _____ $-\frac{2}{42}$ porque tienen igual módulo.
   - El conjunto de los números fraccionarios es un subconjunto del conjunto _______________.
   - $0 > -\frac{1}{2}$ porque____.
   - El módulo de –2,45 es_________.

4. Se buscan dos números racionales que sean mayores que $-\frac{1}{4}$ y menores que 0,1. Selecciona cuál de las parejas de números siguientes cumple la condición dada:

   $-0{,}25$ y 0 $\qquad -\frac{1}{3}$ y $0{,}02$ $\qquad -0{,}2$ y $\frac{1}{100}$ $\qquad -0{,}15$ y $0{,}2$

5. ¿Cuál de los siguientes números racionales está más cerca de $-\frac{1}{2}$? Selecciona la respuesta correcta:

$-\frac{1}{3}$ $-\frac{3}{10}$ $-0{,}600$ $-0{,}05$

6. Escribe en notación tabular el conjunto formado por tres números negativos que sean:

menores que $-0{,}4$ mayores que $-\frac{3}{2}$ divisibles por 2

7. Halla los valores de C y F si:

$C = 17{,}28 : 0{,}12 - 3^2$ $E = -9\,099$

D es veinticinco milésimas $F = \sqrt[3]{729} + \frac{7}{4} + 1$

Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas (V) o falsas (F). Escribe V o F en la línea dada. Justifica tu respuesta.

a) ___ El conjunto formado por *C, E, D* y *F* es un subconjunto del conjunto de los números racionales.
b) ___ Solo el valor de *E* es un número entero.
c) ___ El mayor valor es el de *F.*
d) ___ El menor de los valores es el de *D.*
e) ___ El conjunto numérico más restringido al que pertenecen los valores de *D* y *F* es el de los números fraccionarios.
f) ___ El que tiene mayor módulo es *F.*
g) ___ El que tiene menor valor absoluto es *D.*
h) ___ En la recta numérica el opuesto de *F* queda más cerca de 0, que el opuesto de *C.*
i) ___ El opuesto del mayor número de doce cifras, divisible por 6 es mayor que el valor de *E.*
j) ___ Al sustituir el asterisco por 1, se cumple que: $-9{*}99 < -9\,099$.

8. En la figura 1.54 aparece un envase de helado cubano, de la marca Alondra.

Fíjate que en él se especifica un dato sobre su conservación.

A partir de este dato, selecciona marcando una X, a cuál de las temperaturas dadas se puede conservar este helado. Argumenta tu respuesta.

Selecciona las respuestas correctas marcando con una X en la línea dada. Argumenta.

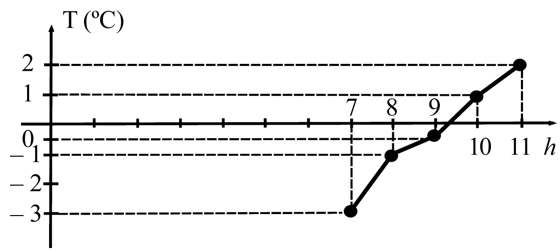
a) ___– 21°C b) ___– 22°C c) ___– 19°C d) ___0°C

Figura 1.54

9. ***¡Insólito!*** Con el propósito de satisfacer las exigencias de los aparatos electrónicos del futuro se ha creado una batería de papel. La “nueva pila” tiene inigualables cualidades, por ejemplo, opera en una amplia gama de temperaturas, desde la máxima de 150°C, hasta la mínima de – 70°C.[46]

   ¿En cuántos valores enteros, de temperatura; puede funcionar la pila?

10. Como parte de una investigación sobre el estado del tiempo, en un área geográfica europea se ilustró con un gráfico (fig. 1.55) el comportamiento de la temperatura en las primeras horas de la mañana en la ciudad española de Soria, este fue el resultado de una de las mediciones:



Estudio sobre el estado del tiempo

Figura 1.55

   a) ¿Qué tipo de gráfico se utilizó? ¿Consideras que fue el más idóneo? ¿Por qué?
   b) ¿A qué hora la temperatura fue mayor? ¿Cuándo fue menor? ¿Es correcto decir que a medida que avanzó el día subió la temperatura?
   c) Los valores de temperatura, ¿son números racionales? Justifica tu respuesta.
   d) ¿En algún momento la temperatura fue de 0°C?

[46] *www.solociencia.com*, 20 de marzo de 2012.

11. El 5 de enero de 2012 el órgano de prensa *Granma* informa:

¡Mínima de 4,1 grados en Tapaste!

Consulta la información que allí se brinda y responde las preguntas siguientes:

a) ¿Qué valores de temperatura están representados por números racionales?
b) ¿Cuántos valores son menores que 10°C?
c) ¿Entre qué números enteros consecutivos se encuentran los valores a los que se hace referencia en la noticia?
d) ¿Qué números enteros hay entre el menor y mayor valor de temperatura que se menciona en la noticia?
e) Halla el opuesto de cada uno de los valores que aparecen e investiga con tu profesor de Geografía en qué espacios geográficos pueden reportarse temperaturas como esas.
f) Investiga sobre las temperaturas más frías en tu provincia en la temporada invernal más próxima al momento en el que realizas este ejercicio y elabora un ejercicio como este. Si lo deseas únete a dos estudiantes.

12. Al atleta jamaicano Usain Bolt (1986 -) le llaman el Relámpago; en tres oportunidades ha superado el récord establecido en cualquier época: 37,5 km/h. A continuación algunos datos (tabla 1.9) que así lo confirman:[47]

Tabla 1.9

Velocidad (km/h)	Marca (segundos)	Distancia (m)	Velocidad del viento (m/s)	Fecha
37, 631	14,35	150	No aparece el dato.	17.05.09
37,578	9,58	100	+ 0,9	16.08.09
37,520	19,19	200	– 0,3	20.08.09
37,306	19,30	200	– 0,9	20.08.08
37,152	9,69	100	0	16.08.08
37,113	19,40	200	+0,8	3.09.11
37,037	9,72	100	+1,7	31.05.08

a) ¿Son racionales todas las cantidades que aparecen en la tabla? ¿Por qué?
b) ¿Qué marca obtuvo el día en que el aire estuvo más en su contra?
c) ¿Qué día el viento fue su mayor aliado?
d) ¿Aparecen en la tabla parejas de números opuestos? ¿Cuáles son? Ubícalos en la recta numérica.

[47] Publicación mensual *La Calle del Medio,* No. 41, septiembre 2011.

e) ¿Qué gráfico estadístico utilizarías para describir con la evolución del atleta al correr 100 m? Hazlo con los datos que se brindan.
f) Pregunta a tu profesor de Educación Física sobre el logro del hombre más rápido del planeta más cercano al momento en que realizas este ejercicio y enriquece la tabla.
g)* Para confirmar la velocidad, Alicia hizo lo siguiente:

1 km = 1 000 m por eso 150 m = 0,15 km
1 h = 3 600 s por eso 14, 35 s = 0, 003 986 111h
0,15 km **:** 0, 003 986 111h = 37, 63066 ≈ 37, 631

¿Estás de acuerdo con ella?

1.4 Operaciones con números racionales

Ya has visto que vivimos rodeados de números racionales. Constantemente se impone trabajar aritméticamente con ellos. Hoy día, con el uso de las computadoras y otros medios auxiliares de cálculo, es posible realizar una gran cantidad de operaciones matemáticas con rapidez y absoluta confiabilidad. Utilizar estos medios de la manera más provechosa tiene su base fundamental en el conocimiento de los conceptos, leyes y procedimientos matemáticos que seamos capaces de dominar; por eso te invitamos a seguir operando con números racionales.

1.4.1 Adición de números racionales

¡! En la búsqueda de cantidades negativas, a partir de una tarea que indicó su profesora, Ana encontró la noticia siguiente:

(...) La población de Puno (Perú) soporta una temperatura de 23°C bajo cero, y podría descender 7°C más.[48]

Ella quiso averiguar qué temperatura pudo haber alcanzado esta área geográfica, para ello se auxilió de la gráfica de la figura 1.56 y realizó el correspondiente análisis:

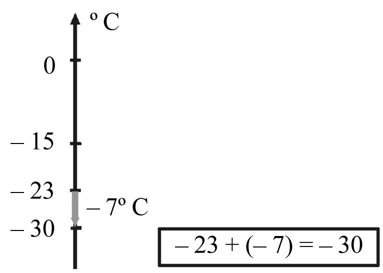


Figura 1.56

[48] Órgano de prensa *Granma,* 17 de julio de 2003.

Como puedes ver, tuvo que adicionar dos números racionales negativos y piensa que la temperatura puede llegar a los – 30°C.

Veamos la que encontró María Elena:

El Lago Enriquillo, ubicado en el sur de República Dominicana, es un lugar único en el mundo y, al mismo tiempo, una rareza de la Naturaleza, pues su superficie está 40 m por debajo del nivel del mar. La isla Cabritos, dentro de este embalse, en su punto más alto se levanta 20 m por encima de la superficie.[49]

Ella se preguntó si esta isla queda bajo el nivel del mar, para ello también buscó ayuda en la gráfica de la figura 1.57 y analizó lo siguiente:

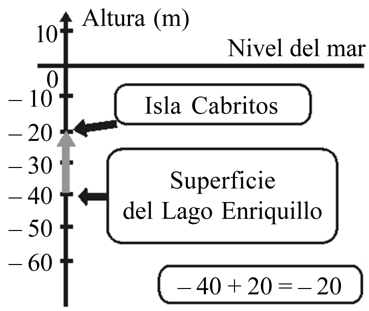


Figura 1.57

Por lo que concluyó que la Isla Cabritos está a – 20 m (con respecto al nivel del mar) al adicionar dos números racionales de signos diferentes. ¿Tendrán razón Ana y María Elena?

R ¡! Tienen razón, veamos por qué la adición de un número racional es un número racional único.

Para adicionar dos números racionales vamos a considerar dos casos, atendiendo a los signos de los sumandos.

Primer caso:

Los dos sumandos tienen signos iguales, ya sean ambos positivos o negativos.

Recuerda que:

Para adicionar dos números racionales positivos se utiliza el mismo procedimiento de la adición de números fraccionarios.

[49] Semanario *Orbe* del 22 al 28 de octubre de 2005.

Ejemplo 1:

El resultado de la adición de los números racionales 2 y 3 es 5 (2 + 3 = 5); el de los números racionales $\frac{1}{5}$ y $\frac{3}{5}$ es $\frac{4}{5}$ $\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4}{5}\right)$.

En ambos casos hemos aplicado el procedimiento que ya conoces de grados anteriores.

Veamos ahora cómo se procede para adicionar dos números racionales negativos.

Consideremos los números racionales negativos – 2 y – 3. El resultado de la adición de estos números es – 5 y se puede obtener gráficamente como se ilustra en la figura 1.58

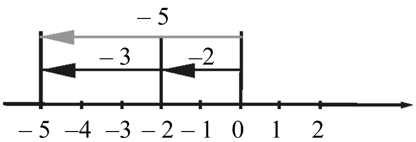


Figura 1.58

En la gráfica se visualiza que:
– 2 + (– 3) = – 5
Este mismo resultado se obtiene si aplicamos el procedimiento siguiente:

> Para adicionar dos números racionales negativos:
> 1. Se adicionan los módulos.
> 2. Al resultado se le pone el signo "–".

Ejemplo 2:

Calcula:

a) – 2 + (– 3) b) 3,5 + 1 c) – 3,2 + (– 4) d) $-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)$

Solución:

a) – 2 + (– 3)

1. Se adicionan los módulos de los sumandos:
   2 + 3 = 5 (|– 2| = 2) ; (|– 3| = 3)
2. Se pone al resultado el signo "–".
   – 2 + (– 3) = – 5

b) 3,5 + 1 = 4,5 — Se procede como con los números fraccionarios.

c) – 3,2 + (– 4) = – 7,5 — Porque 3,2 + 4,3 = 7,5 y se pone al resultado el signo "–".

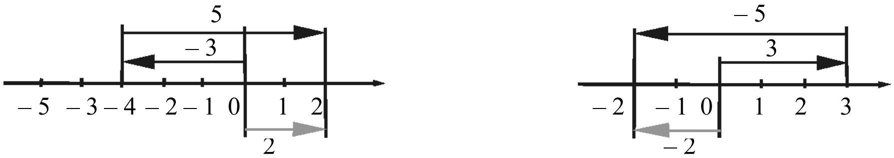
d) $-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{4}$ $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\right)$

Segundo caso:

Los dos sumandos tienen signos diferentes, es decir, un sumando es positivo y el otro es negativo.

En las figura 1.59 se ilustran gráficamente la adición de dos números racionales con signos diferentes.

a) Adición de – 3 y 5 b) Adición de 3 y – 5



Obtenemos – 3 + 5 = 2 Obtenemos 3 + (– 5) = – 2

Figura 1.59

Estos mismos resultados se obtienen aplicando el procedimiento siguiente:

> Para adicionar dos números racionales con signos diferentes:
>
> 1. Se sustrae del mayor módulo de estos números el menor.
> 2. Al resultado se le pone el signo del número de mayor módulo.

Ejemplo 3:

Calcula:

a) 3 + (– 5) b) – 8 + 10 c) – 7,5 + 6 d) $\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{6}\right)$ e) – 7,4 + 7,4

Solución:

a) 3 + (– 5)

1. Se sustraen del mayor módulo de estos números el menor:

$5-3=2\ \left(|3|=3;\ \ |-5|=5\right)\ \ (5>3)$

b) – 8 + 10 = 2

2. Se pone al resultado el signo del número que tiene mayor módulo ("–" en este caso): 3 + (– 5) = – 2 pues 10 – 8 = 2 y el resultado es positivo (ya que el sumando que tiene mayor módulo es positivo).

c) –7,5 + 6 = – 1,5

7,5 – 6 = 1,5 y el resultado lleva el signo del sumando de mayor módulo.

d) $\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}$

$\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$ y el resultado es positivo

e) $-7{,}4 + 7{,}4 = 0$

Pues en este caso, como los dos sumandos tienen igual módulo, la diferencia de estos es cero: (7,4 - 7,4 = 0). Esto ocurre siempre cuando los dos sumandos son números opuestos.

Recuerda que:

- La suma de dos números racionales opuestos es *igual a cero.*
- Si los dos números tienen signos iguales, adiciona sus módulos, y al resultado le colocas el mismo signo.
- Si los dos números tienen signos diferentes, sustrae del que tiene mayor módulo el de menor módulo y al resultado colócale el signo del número que tiene mayor módulo.
- La suma de dos números racionales opuestos es cero.

Ejercicios

1. Calcula:

a) $-3\,291 + (-78\,006)$

b) $-1\,174 + (-17{,}23)$

c) $-\frac{1}{2} + (-55)$

d) $-25 + (-25)$

e) $3\frac{1}{4} + \frac{3}{8}$

f) $2\,343\,771 + 289$

2. Efectúa:

a) $-1\,149 + 23\,587$

b) $-71{,}2 + 25{,}7$

c) $-154 + 36$

d) $-1\,818 + 82$

e) $-34{,}34 + 20$

f) $-\frac{5}{9} + \frac{5}{9}$

g) $-12 + \frac{7}{8}$

h) $-213{,}4 + 25$

i) $6\,660 + (-7{,}77)$

j) $25 + (-17{,}2)$

3. Calcula:

a) $35{,}61 + 794{,}39$

b) $54{,}29 + (-71{,}54)$

c) $-\frac{1}{9} + \left(-\frac{7}{15}\right)$

d) $\frac{1}{11} - \frac{1}{11}$

e) $-\frac{1}{3} + (-0{,}28)$

f) $-154 + 154$

g) $-2\,818 + 82$

4. Completa la tabla 1.10. Fundamenta tu proceder en cada caso.

Tabla 1.10

a	3	1,2	1,9	– 7	– 9,3
b		– 2		– 1,5	10
$a + b$	10				
$a + b < a$			F		
$a + b > a$			F		

Leyenda
F: falso
V: verdadero

5. Sean:

$A = -35 + 18{,}4$ $\quad$ $B = -69 + (-76)$ $\quad$ $C = \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{25}$

a) Halla los valores de *A, B* y *C*.
b) Todos los resultados obtenidos, ¿son números racionales? ¿Por qué?
c) ¿Es C un número entero? Justifica tu respuesta, halla su módulo y llámale *D*.
d) ¿Cuál es el opuesto del valor de *B*?
e) ¿Entre qué números enteros consecutivos se encuentra el valor de *A*?
f) Determina el antecesor de *B* y llámale *E*.
g) ¿Cuántos números enteros hay entre *P* y *F* si $P = D + E$ y $F = -17$?

¡! Analiza cuidadosamente la situación siguiente:

Daniel ya sabe adicionar números racionales, por eso el domingo llevó el registro de los depósitos (con números positivos) y extracciones (con números negativos) de la caja de la cafetería de su papá. Este fue el resultado de lo anotado en los primeros quince minutos de trabajo:

$$25 + (-2) + 40 + (-15) + 10 + (-5) + 3 + (-1) + 50 + (-20)$$

Él quiere saber cuál fue el resultado de todas las operaciones hasta ese momento y se pregunta si es posible colocar primero los sumandos positivos y después los negativos para facilitar el cálculo, ¿podrá hacerlo?

Sabe que en la adición de números fraccionarios es posible cambiar de lugar los sumandos de una adición, así como agruparlos para obtener la suma de la manera más sencilla, por lo que piensa que su respuesta será afirmativa.

Veamos qué propiedades cumple la adición en el conjunto de los números racionales, para salir de dudas y responder la pregunta que se hizo Daniel.

Recuerda las propiedades de la adición de números racionales:

- **Propiedad conmutativa** de la adición de números racionales:
  Para todo a, $b \in \mathbb{Q}$: $a + b = b + a$
- **Propiedad asociativa** de la adición de números racionales:
  Para todo a, b, $c \in \mathbb{Q}$; $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$

Ejemplo 4:

a) Observa que $-7 + 2 = -5$ y también $2 + (-7) = -5$, es decir, el orden en que se tomen los sumandos no altera la suma.
b) En la adición $-4 + 3 + (-5)$ podemos asociar los sumandos de formas diferentes:

$(-4 + 3) + (-5) = -1 + (-5) = -6$
$-4 + [3 + (-5)] = -4 + (-2) = -6$

Como puedes ver, el resultado es el mismo en ambos casos. Por eso la adición de números racionales es: conmutativa y asociativa. Estas propiedades se pueden aplicar para resolver ejercicios de adición en la forma más ventajosa que consideres.

R ¡! Por tanto, Daniel tiene razón y puede colocar sus anotaciones de la manera siguiente:

$25 + 40 + 10 + 3 + 50 + (-2) + (-15) + (-5) + (-1) + (-20)$
$= 128 + (-43) = 85$

Ejercicios

6. Efectúa:

a) $3 + (-7) + 17$
b) $121 + (-65) + (-73)$
c) $-498 + 6 + 40$
d) $-31 + 84 + (-1) + 48$
e) $-25{,}2 + 532 + 253 + (-74{,}8)$
f) $1 + (-0{,}76) + (-0{,}24)$
g) $\frac{4}{15} + \left(-\frac{1}{23}\right) + \frac{2}{25} + \left(-\frac{1}{69}\right)$
h) $-\frac{1}{2} + 5 + 6\frac{1}{2} + (-11)$

7. Selecciona tres números racionales de forma tal que la suma de ellos coincida con uno de los sumandos.

1.4.2 Sustracción de números racionales

El Panorama Económico y Social. Cuba 2010. Primera edición de la Oficina Nacional de Estadística (ONE) brindó información sobre la evolución y desarrollo de varios indicadores demográficos, económicos y sociales que reflejaron el comportamiento de nuestro país durante el año 2010.

Cuando Rocío y Amado, dos estudiantes de séptimo grado, consultaron este documento en el sitio digital: *www.one.cu,* con el objetivo de enriquecer el mural "La Matemática de la Vida", tres números les llamaron la atención a ellos. Puedes verlos en la cuarta columna de la tabla 1.11.

Tabla 1.11

Cuba: Indicadores demográficos: 2010			
Concepto	**2009**	**2010**	**Dif. 10-09**
Población residente al 31 de dic. (U)	11 242 628	11 240 841	–1 787
Mujeres	5 611 885	5 611 483	–402
Hombres	5 630 743	5 629 358	–1 385

Eran diferencias que daban como resultado negativo, sabían que la diferencia es el resultado de la sustracción.

– ¿qué era eso de una diferencia negativa?,
– ¿cómo se hacía esa operación matemática?,
– ¿tendrá que ver el resultado con el hecho de que los valores del año 2010 son más pequeños que los del año 2009?

Con lo que conoces hasta ahora, ¿puedes tú ayudar a Rocío y a Amado a responder estas interrogantes? Claro que no, ahora conocerás cómo ayudar a Rocío y a Amado.

La sustracción de números racionales puede reducirse a la adición.

Recuerda que:

Para sustraer un número racional de otro, adicionamos al minuendo el opuesto del sustraendo.

Ejemplo 1:

Calcula:

a) $3 - 7$ b) $-5 - 2$ c) $-3 - (-4)$ d) $3{,}5 - 6$

Solución:	1. Transformemos la sustracción en una adición
a) 3 – 7	(El opuesto de 7 es – 7)
3 + (– 7)	2. Efectuamos la adición aplicando el procedimiento estudiado para la adición de números racionales con signos diferentes (en este caso).
3 + (– 7) = – 4	
por tanto	
3 – 7 = – 4	como – 5 + (– 2) = – 7 tenemos que:
b) – 5 – 2 = – 5 + (– 2)	5 – 2 = – 7
c) – 3 – (– 4) = – 3 + 4 = 1	(El opuesto de – 4 es 4 y la sustracción se transforma en una adición).
d) 3,5 – 6 = – 2 ,5	ya que 3,5 + (– 6) = – 2,5

Recuerda que:

La sustracción de números racionales siempre puede realizarse.

R ¡! Veamos ahora cómo se obtuvo una de las diferencias que llamaron la atención de esos dos estudiantes:

1. Transformemos la sustracción en una adición:

   11 242 628 – 11 240 841 = 11 242 628 + (–11 240 841)

   (El opuesto de 11 240 841 es – 11 240 841).

2. Efectuamos la adición aplicando el procedimiento estudiado para la adición de números racionales con signos diferentes:

   = – 1 787

   Por tanto, 11 242 628 – 11 240 841 = – 1 787

Ejemplo 2:

¡Al cierre!: Déficit de la economía española

De enero a diciembre de 2011, la economía española; presentó un déficit de – 46 375 000 000 ***€,*** *debido a unas ventas valoradas en doscientos catorce mil cuatrocientos cuarentaiocho millones de euros y unas importaciones por doscientos sesenta mil ochocientos veintitrés millones.*[50]

Si un déficit comercial está dado porque la diferencia entre exportaciones e importaciones es una cantidad negativa, vamos a verificar la información que se brinda:

Fíjate que: 214 448 000 000 – 260 823 000 000 = – 46 375 000 000

[50] *www.prensa-latina.cu,* 29 de febrero de 2012.

¿Cuál es la distancia en metros entre las cuevas extremas de Cuba? Considera que son extremos de un segmento perpendicular a la línea imaginaria que es el nivel del mar.

Los datos ya los tienes: 1 024 – (– 440) = 1 024 + 440 = 1 464

La diferencia es de 1 464 m.

Recuerda que:

En el conjunto de los números racionales, la sustracción es la operación inversa de la adición y puede efectuarse sin restricción, adicionando al minuendo el opuesto del sustraendo.

Ejercicios

1. Calcula:

a) $5 - 9$ b) $-7 - 3$ c) $-1 - 1$ d) $6 - (-9)$ e) $-4 - (-11)$

f) $4{,}6 - 6{,}4$ g) $-5 - 8{,}5$ h) $\frac{1}{10} - \frac{3}{5}$ i) $-\frac{3}{4} - \frac{1}{6}$ j) $-\frac{4}{9} - \left(-\frac{5}{12}\right)$

2. La tabla 1.12 presenta singulares accidentes geográficos:[51]

Tabla 1.12

Espacio geográfico	**Punto culminante (m)**	**Mayor depresión (m)**
América del Norte	Mc Kinley (6 194)	Valle de la Muerte (– 86)
América Central	Tajumulco (4 220)	Fondo del cráter de la Laguna de Apoyo (– 200).
América del Sur	Aconcagua (6 962)	Salinas Grandes (– 40)
África	Kilimanjaro (5 891,8)	Lago Assal (– 155)
Eurasia	Everest (8 844,43)	Mar Muerto (– 416,6)
Australia	Kosciusko (2 228)	Lago Eyre (– 15)
Antártida	Macizo de Vinson (4 897)	Fosa subglacial Bentley,[52] (– 2 555)

[51] *Wikipedia,* 15 y 20 de marzo de 2012.

[52] Es el lugar más bajo de la tierra no cubierto por océano, aunque sí por hielo.

a) ¿Qué altitud y qué profundidad está representada por un número racional?
b) ¿En qué área geográfica se ubica el mayor punto culminante?
c) Dada la información de la tabla 1.12, ¿cuál es la mayor depresión?
d) Di si la proposición siguiente es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta:

   "La media aritmética (en metros) de las alturas de los puntos culminantes americanos es 5 788".

e) Donde sea posible, halla la diferencia entre un punto ubicado en la mayor depresión y otro ubicado en el punto culminante. Imagina que son los extremos de un segmento perpendicular a la línea imaginaria que representa el nivel del mar.
f) Piensa en la manera de elaborar dos escalas para ilustrar la información de la tabla en un gráfico de barras.

3. Estos datos de aeropuertos fueron extraídos de la *Wikipedia* el 20 de marzo de 2012:

   "El aeropuerto comercial de más altitud es el Qamdo Bangda, Tíbet, a 4 334 m sobre el nivel del mar y el de menor altitud es el de Schiphol, Holanda, a – 3,0 m con respecto al nivel del mar".

   ¿A qué distancia se encuentra un aeropuerto del otro?
   Supón que se encuentran en la misma recta vertical con respecto al nivel del mar.

Recuerda que:

- En la práctica, para sustraer un número racional de otro, se procede directamente, interpretando cada caso como una adición.
- En lo adelante adición o sustracción de números racionales (independientemente de los signos que tengan sus términos) la denominaremos suma algebraica.
- La notación en forma de suma algebraica simplifica la escritura de los sumandos, pues no es necesaria la utilización de paréntesis.

Ejemplo 3:

Calcula las sumas algebraicas siguientes:

a) $-5+8-6$ b) $4-9+1-3$

Solución:

En estos casos, puedes reordenar y agrupar los sumandos en la forma que te sea más conveniente para realizar los cálculos.

a) $-5+8-6$

Observa que puedes calcular:

$-5+8-6=-11+8=-3$ o $-5+8-6=3-6=-3$

b) $4-9+1-3$

Aquí puedes calcular, por ejemplo:

$4-9+1-3=5-12=-7$ o $4-9+1-3=-5-2=-7$

Recuerda:

Toda adición de números racionales (independiente de los signos que tengan los sumandos) la denominamos **suma algebraica** y te servirá de mucho para hallar el antecesor y sucesor de un número entero.

Recuerda que:

Para efectuar esta suma algebraica debes aplicar la forma más ventajosa.

Los números negativos sobresalieron después del descubrimiento de Las Américas (fig. 1.60), cuando la producción y el comercio experimentaron un impetuoso adelanto. En las oficinas de las casas de negocio los números negativos llegaron a ser un instrumento común y corriente de los encargados de la contabilidad de pequeños y grandes negocios.[53]

¡Presentes!

Figura 1.60

[53] Colectivo de autores: *Matemática 7,* 1979.

Ejercicios

4. Efectúa:

a) – 124 + 10 b) 35 – 69,7 c) – 80,8 – 20,2

d) $5-\frac{1}{11}$ e) $-\frac{23}{42}+2$ f) $\frac{1}{14}+\frac{3}{10}-\frac{4}{35}$

g) $\frac{11}{12}+\frac{17}{30}-\frac{7}{36}-\frac{2}{15}$ h) $-1{,}75+\frac{2}{9}-15{,}25$ i) $\frac{6}{7}-0{,}77-\frac{13}{7}-0{,}23$

5. Sea $P=\left\{25;-37{,}2;\frac{1}{4};-0{,}754;-127\ 734\ 066\right\}$

a) ¿Es subconjunto del conjunto de los números enteros? ¿Por qué?
b) ¿Existen dos elementos cuya suma algebraica sea menor que – 10?
c) Escoge tres elementos cuya suma algebraica sea un número racional que se ubica a la izquierda de – 35 en la recta numérica.
d)* ¿Qué dos elementos cumplen con la condición siguiente: La suma algebraica de sus opuestos es un número que equidista de cero y de – 50,5?
e) ¿Cuál es el numeral del módulo de la diferencia entre el mayor y el menor elemento del conjunto *P*?

¡! Veamos ahora la situación siguiente:

Dada la información que aparece en el esquema de la figura 1.61, extraído de la revista *National Geographic* de septiembre de 1998, sobre el planeta Marte, responde:

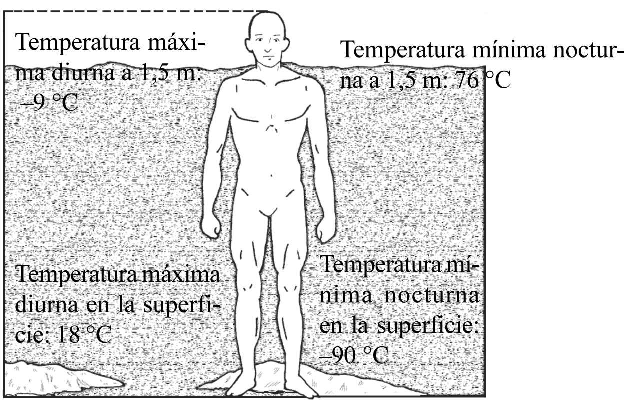


Figura 1.61

a) ¿Cuánto asciende la temperatura máxima diurna de 1,5 m a la superficie?
b) ¿Cuánto desciende la temperatura mínima nocturna de 1,5 m a la superficie?

Para responder el a), es necesario determinar qué valor de n satisface la igualdad: $-9 + n = 18$ y para resolver el b), hay que hallar el valor de m que hace que sea verdadera la igualdad:

$-76 - m0 - 90.$

Si es <u>n</u> lo que asciende y <u>m</u> lo que desciende la temperatura en cada caso.
Para ello es necesario saber si la sustracción en el conjunto de los números racionales es la operación inversa de la adición.
Al igual que para los números fraccionarios, en el conjunto de los números racionales se cumple que:

La sustracción de números racionales es la operación inversa de la adición.

Por ejemplo, calcular la sustracción $5 - 8$ equivale a encontrar un número racional x tal que, $x + 8 = 5$; este número es -3; $5 - 8 = -3$, ya que $-3 + 8 = 5$.
Ahora te presentaremos otros ejemplos en los que tenemos que aplicar que la sustracción de números racionales es la operación inversa de la adición.

Ejemplo 4:

4.1 Calcular la sustracción $5 - 8$ equivale a encontrar un número racional x tal que $x + 8 = 5$; este número es -3; $5 - 8 = -3$ ya que $-3 + 8 = 5$.

4.2 Halla el valor de x que satisface la igualdad:

a) $x + 5 = 3$ b) $-6 + x = -7$ c) $5 - x = 8$

Solución:

a) $x + 5 = 3$ (El + 5 pasa *restando*, es decir, con la operación inversa).

$x = 3 - 5$
$x = -2$

Comprobación

Miembro izquierdo		**Miembro derecho**
$-2 + 5$	Comparación $3 = 3$	3
$= 3$		Luego: $x = -2$

b) $-6 + x = -7$

$x = -7 - (-6)$ (El -6 pasa con la operación inversa).
$x = -7 + 6$
$x = -1$

Comprobación

Miembro izquierdo		**Miembro derecho**
$-6 + (-1)$		-7
$= -7$	Comparación $-7 = -7$	Luego: $x = -1$

c) $5 - x = 8$ (El 5 pasa con la operación inversa).

$-x = 8 - 5$
$-x = 3$

Como $-x$ (el opuesto de x) es 3, entonces $x = -3$

Comprobación

Miembro izquierdo		**Miembro derecho**
$5 - (-3)$		8
$= 8$	Comparación $8 = 8$	Luego: $x = -3$

Ya estás en condiciones de darte cuenta de que la solución de la ecuación $3 + x = 2$ es el número entero -1.

R ¡! Para responder la situación inicial tenemos que:

$-9 + n = 18$, $n = 18 - (-9) = 18 + 9 = 27$, de ahí que la temperatura máxima diurna asciende 27°C de 1,5 m a la superficie.
$-76 - m = -90$, $-m = -90 - (-76) = -90 + 76 = -14$, por eso la temperatura mínima diurna desciende 14°C desde 1,5 m a la superficie.

Recuerda que:

> La sustracción es la operación inversa de la adición, y en el conjunto de los números racionales puede efectuarse sin restricción, adicionando al minuendo el opuesto del sustraendo para pasar a ser una suma algebraica.

Ejercicios

6. Busca en cada caso el valor de la variable para que se cumpla la igualdad:

a) $x + 402 = -678$ b) $y - 91 = -35{,}35$ c) $34 + a = 0$

d) $-85+b=-85$ e) $-\frac{9}{100}-d=0{,}02$ f) $z+\frac{5}{6}=-\frac{2}{3}$

7. La suma de dos números es igual a 25. Si uno de los sumandos es – 9, calcula el otro sumando.

8. La diferencia entre dos números es igual a – 8.
   a) Calcula el minuendo si el sustraendo es 15.
   b) Calcula el sustraendo si el minuendo es – 2.

1.4.3 Multiplicación de números racionales

¡! Un grupo de estudiantes de séptimo grado, realizó una competencia de ortografía con el vocabulario técnico de la asignatura Matemática, que consistió en el dictado de 10 palabras de diferente dificultad ortográfica. Por cada error tenían que anotarse – 0,25 puntos y como ya saben adicionar números racionales, decidieron que la suma sería su calificación. Fíjate que mientras más pequeño es el número de la calificación, más errores tuvo el estudiante. En la figura 1.62 aparecen las notas de seis de los estudiantes evaluados.[54]

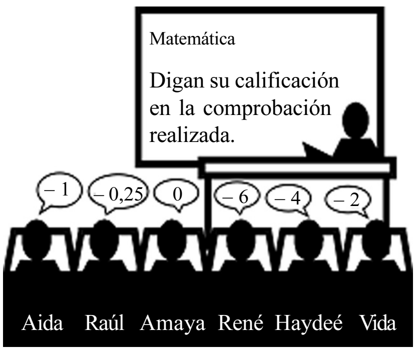


Figura 1.62

El profesor pregunta:

a) ¿Podremos afirmar que la nota de Aida es cuatro veces la de Raúl?
   Si la nota de Aida, fue – 1, es porque adicionó $-0{,}25$ cuatro veces, o sea, $-0{,}25-0{,}25-0{,}25-0{,}25=-1$; por lo que ya tenemos una idea bastante clara de que $-1=4\cdot(-0{,}25)$.

[54] Ejercicio elaborado con la colaboración de la MSc. Gretel Moya Trobajo, Metodóloga Nacional de Español-Literatura de Secundaria Básica en el Curso 2011-2012.

Casi lo podemos asegurar y ya vamos conociendo algo de la multiplicación de números racionales, sin embargo, ¿qué pasaría si quisiéramos multiplicar $\frac{1}{5}$ y $-0{,}25$; $-\frac{1}{7}$ y $-\frac{1}{19}$?

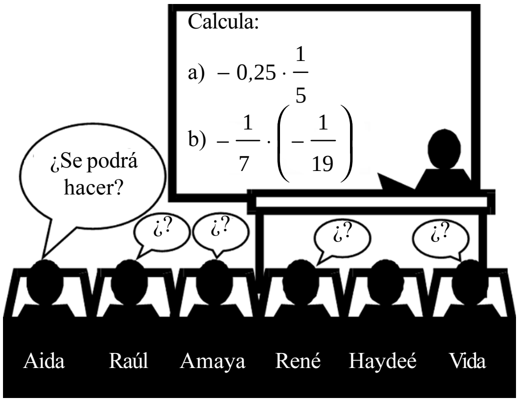


Figura 1.63

Para responder estas preguntas hay que conocer la multiplicación en el conjunto de los números racionales.

El resultado de multiplicar dos números racionales es un número racional único y se llama producto. A continuación te presentamos el procedimiento para la multiplicación de números racionales.

Recuerda que para multiplicar dos números racionales:

1. Se multiplican sus módulos.
2. Si los factores tienen signos *iguales*, el producto es *positivo*; si los factores tienen signos *diferentes*, el producto es *negativo*.
3. Si uno de los factores es cero, el producto es cero.

Ejemplo 1:

Calcula:

a) $3 \cdot 5$ b) $-3 \cdot (-5)$ c) $-4 \cdot 8$

d) $4 \cdot (-8)$ e) $-0{,}5 \cdot (-4)$ f) $-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$

Solución:

a) $3 \cdot 5 = 15$

b) $-3 \cdot (-5) = 15$

Observa en ambos casos que los dos factores tienen *signos iguales* y por eso el producto es *positivo.*

c) $-4 \cdot 8 = -32$

d) $4 \cdot (-8) = -32$

En ambos casos que los dos factores tienen *signos diferentes* y por eso el producto es *negativo.*

e) $-0{,}5 \cdot (-4) = 2$

Como el b)

f) $-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$

Como el c)

R ¡! Ya confirmamos que $4 \cdot (-0{,}25) = -1$ y puedes ayudar a los estudiantes a resolver el segundo ejercicio que el profesor propuso.

Ejercicios

1. Determina sin calcular, cuáles de los siguientes productos son positivos y cuáles son negativos. Fundamenta cada caso.

   a) $-17{,}17 \cdot (-22)$ b) $381 \cdot 99$ c) $-25 \cdot 1001$ d) $78{,}5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$

2. Calcula:

   a) $-25 \cdot (-12)$ b) $3{,}24 \cdot (-5)$ c) $-8{,}76 \cdot 0{,}01$ d) $25 \cdot \left(-\frac{1}{50}\right)$

   e) $\frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$ f) $\left(-\frac{24}{25}\right) \cdot \left(-\frac{5}{576}\right)$ g) $0 \cdot (-222)$ h) $17{,}67 \cdot (-1)$

   i) $-1 \cdot 214{,}3$ j) $-1{,}75 \cdot \frac{4}{9}$

3. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son falsas? Fundamenta tu respuesta.

   a) $2{,}5 \cdot (-2) = -5$ b) $0 \cdot (-7) = -7$ c) $-2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$

   d) $-1 \cdot 4{,}5 = -4{,}5$ e) $0{,}5 \cdot (-2) = -10$ f) $\frac{1}{2} \cdot (-10) = 5$

   g) $-1{,}5 \cdot (-5{,}6) = 9$ h) $-1 \cdot (-28{,}5) = -28{,}5$

4. Si el producto de dos números racionales es – 24 y uno de los factores es:

   a) 12 b) – 4 ¿Cuál es el otro factor?

5. Indica en cada caso un número racional x de modo que se cumplan las desigualdades siguientes.

   a) $-3x \quad 6$ b) $2x < -1$ c) $-4x < -4$

   d) $5x \quad -20$ e) $-8x < 8$ f) $-7x > 7$

6. Determina en cada caso si a debe ser un número racional positivo o negativo, para que las siguientes relaciones sean verdaderas. Fundamenta.

   a) $5a > 0$ b) $8a < 0$ c) $-3a < 0$ d) $-9a > 0$ e) $2a < a$ f) $-6a < a$

7. ¿De cuántas formas diferentes, pueden expresarse los siguientes números como producto de dos números enteros?

   a) – 16 b) 24 c) $-\frac{51}{3}$

   ¿En el conjunto de los números racionales la multiplicación es una suma abreviada?

¡! Dos estudiantes quieren realizar este ejercicio de la manera más simple posible y se han dado cuenta que si pudieran conmutar 1 989 232 y – 2, todo sería más sencillo. ¿Por qué?

$$\boxed{-0{,}5 \cdot 1\,989\,232 \cdot (-2)}$$

¿Se cumple la propiedad conmutatividad en la multiplicación de números racionales? Se cumple, por tanto, la manera en que piensan es correcta.

La multiplicación de números racionales tiene las mismas propiedades que la multiplicación de números fraccionarios.

Recuerda las propiedades de la multiplicación de números racionales:

- **Propiedad conmutativa** de la multiplicación de números racionales:

  Para todo $a, b \in \mathbb{Q}$; $a \cdot b = b \cdot a$

- **Propiedad asociativa** de la multiplicación de números racionales:

  Para todo $a, b, c \in \mathbb{Q}$; $a \cdot b \cdot \mathrm{c} = (a \cdot b)\, c \cdot = a \cdot (b \cdot c)$

- **Propiedad distributiva** de la multiplicación de números racionales:

  Para todo $a, b, c \in \mathbb{Q}$; $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Ejemplo 2:

a) Observa que $-5 \cdot 2 = -10$ y también $2 \cdot (-5) = -10$; es decir, el orden de los factores no altera el producto. Como puedes ver, el resultado es el mismo en ambos casos.

b) En la multiplicación 2 · (– 3) · (– 4) podemos asociar los factores de formas diferentes:

$[2 \cdot (-3)] \cdot (-4) = -6 \cdot (-4) = 24$ o $2 \cdot [\,(-3) \cdot (-4)\,] = 2 \cdot 12 = 24$

Como puedes ver, el resultado es el mismo en ambos casos. Por eso la adición de números racionales es: conmutativa y asociativa. Estas propiedades se pueden aplicar para resolver ejercicios de adición en la forma más ventajosa que consideres.

c) En $4 \cdot (-0{,}5 + 2)$ puedes multiplicar el 4 por cada sumando y luego adicionar los productos, o sea: $4 \cdot (-0{,}5 + 2) = 4 \cdot (-0{,}5) + 4 \cdot 2 = -2 + 8 = 6$
Observa que llegamos al mismo resultado si primero efectuamos la adición.
$4 \cdot (-0{,}5 + 2) = 4 \cdot (1{,}5) = 6$

En resumen: la multiplicación de números racionales es conmutativa, asociativa y distributiva con respecto a la adición.

R ¡! El ejercicio $(-0{,}5 \cdot 1989\,232 \cdot -2)$, que los dos estudiantes quieren resolver de la manera más simple posible, se soluciona así:
Se pueden conmutar 1 989 232 y – 2, entonces:

$-0{,}5 \cdot (-2) \cdot 1989\,232 = 1 \cdot 1989\,232 = 1989\,232$

Ejercicios

8. Calcula:

a) $-4 \cdot (-7\,997) \cdot 1{,}25 \cdot (-22)$ b) $-\dfrac{27}{14} \cdot \dfrac{56}{9}$ c) $-24 \cdot \dfrac{7}{29} \cdot \left(-\dfrac{29}{7}\right) \cdot (-14)$

d) $4{,}4 \cdot \left(\dfrac{1}{196}\right) \cdot (-49)$ e) $3{,}3 \cdot 4 \cdot \dfrac{1}{99}$ f) $-14 \cdot \dfrac{5}{87} \cdot \left(-\dfrac{87}{5}\right) \cdot (-25)$

9. Dados: $-78 \cdot 954 = -74\,412$ y $-78 \cdot 212 = -16\,536$. Halla el producto de – 78 y 1 166.

10. Si multiplicamos los elementos del conjunto *A,* ¿cuántos números racionales diferentes puedes obtener?, si $A = \{-3;\ -2;\ 2;\ 7\}$

11.* Sean $a, b \in \mathbb{Q}$. Demuestra que $|a-b| = |b-a|$, considera estas tres posibilidades:

$a > b \qquad a < b \qquad a = b$

Para determinar el signo de un producto de varios números racionales debes tener en cuenta la cantidad de factores negativos que intervengan.

Recuerda que:

> Un producto de números racionales es *positivo* si la cantidad de factores negativos es *par,* y es *negativo* si la cantidad de factores negativos es *impar*.

Ejemplo 3:

Calcula:

a) – 2 · (– 5) · 3 · (– 1) b) – 4 · (– 3) · (– 1) · (– 2)

Solución:

a) – 2 · (– 5) · 3 · (1) = – 30 Observa que como intervienen *3 factores negativos*, el producto es *negativo*.

b) – 4 · (– 3) · (– 1) · (– 2) = 24 Observa que como intervienen *4 factores negativos*, el producto es *positivo*.

Recuerda que, en la multiplicación:

> - Si los dos números tienen signos iguales, efectúa la operación indicada con los módulos y al resultado colócale signo positivo,
> - si los dos números tienen signos diferentes, efectúa la operación indicada con los módulos y al resultado colócale el signo negativo.

Ejercicios

12. Lee detenidamente y responde:

Sean: $A = (-2)\cdot(-0{,}54)\cdot\frac{1}{2}\cdot 55\cdot\left(-1\frac{23}{27}\right)$;

$B = 2\ 479\ 810\cdot(-0{,}75)\cdot\frac{1}{3}\cdot(-9)\cdot 4\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)$

12.1 Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas (V) o falsas (F). Escribe V o F en la línea dada. Justifica en cada caso tu respuesta.

a) ___ A y B son números negativos.

b) ___ Dos factores de A son números enteros.

c) ___ Todos los factores de B son números opuestos de números fraccionarios.

d) ___ A y B se ubican a la izquierda de cero en la recta numérica.

12.2 Selecciona la respuesta correcta marcando con una X en la línea dada. Argumenta.

12.2.1. El valor de A es:

a) ___ un número natural. b) ___ un número menor que – 56.

c) ___ un número fraccionario. d) ___ – 55.

12.2.2 El valor de B:

a) ___ no es un número entero. b) ___ tiene nueve cifras.

c) ___ no es un número racional. d) ___ es el opuesto de un número menor que cero

12.2.3 Los valores de A y B se encuentran entre los números enteros:

a) ___ 2 479 810 y – 54 b) ___ 247 981 000 y 2

c) ___ – 300 000 000 y – 53 d) ___ – 43 y – 247 981 000

12.3 Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera para cada caso.

a) El módulo del valor de A es mayor que _______.

b) El valor de B es menor que ________.

13.* Sustituye en la multiplicación siguiente las letras diferentes por cifras distintas para que la operación resulte correcta.

$$-3 \cdot ALAS = -VOLAR$$

14. ¿De qué manera puedes hallar el opuesto de un número auxiliándote de la multiplicación de números racionales?

15. Determina tres factores de forma tal que el producto de ellos sea igual a uno de los factores.

1.4.4 División de números racionales

¡! Imagina que quisiéramos responder de la manera más racional, cuántos errores ortográficos tuvo cada uno de los estudiantes que participaron en la competencia de ortografía. La vía más idónea sería dividir el resultado por $-0{,}25$. Por ejemplo la de Haydeé es $-4:(-0{,}25)$, pero, ¿cómo proceder en este caso?

El resultado de dividir dos números racionales siendo el divisor diferente de cero, es un número racional único; que se llama cociente.

A continuación te presentamos el procedimiento a seguir para la división de números racionales.

Recuerda que:

Para dividir dos números racionales:

1. Se halla el cociente de sus módulos
2. Si el dividendo y el divisor tienen *signos iguales,* el cociente es *positivo;* si el dividendo y el divisor tienen *signos diferentes,* el cociente es *negativo.*
3. En el conjunto de los números racionales, la división por cero tampoco puede realizarse.

Ejemplo 1:

Calcula:

a) $20 : 5$ b) $-20 : (-5)$ c) $-12 : 4$

d) $12 : (-4)$ e) $-1{,}8 : (-2)$ f) $\frac{1}{3} : \left(-\frac{2}{5}\right)$

Solución:

a) $20 : 5 = 4$

b) $-20 : (-5) = 4$

Como en ambos casos el dividendo y el divisor tienen *signos iguales,* el cociente es *positivo.*

c) $-12 : 4 = -3$

d) $12 : (-4) = -3$

Observa que en estos dos casos el dividendo y el divisor tienen *signos diferentes* y por eso el cociente es *negativo.*

e) $-1{,}8 : (-2) = 0{,}9$ f) $\frac{1}{3} : \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{5}{6}$

R ¡! Ya sabes cómo hallar cuántos errores tuvieron los estudiantes, Haydée tuvo 16, que es el resultado de – 4 : (– 0,25),

Ejercicios

1. Calcula:

   a) 33,76 : (– 24) b) – 264 : 0,3 c) – 11 330 : (– 55)

   d) 0,9 : (– 0,15) e) $-\frac{44}{75}$: (– 11) f) – 5,125 : 12,5

   g) 1 717 : (– 1) h) 0, 791 : 9,99 i) $0:1,\overline{3}$

   j) 39 : 0

2. Determina cuáles de las siguientes relaciones son falsas. Fundamenta tu respuesta.

   a) – 544 : 2 = – 272 b) – 600 : (– 5) < 0 c) – 12,8 : (– 12,8) = – 1

3. Para un estudio sobre el clima, han sido registrados los valores de temperaturas de cinco días del mes de enero, escogidos al azar en cinco lugares diferentes del planeta a la misma hora,[55] tal como se muestra en la tabla 1.13.

Tabla 1.13

Temperaturas (en °C)

Lugares \ Días	**1er**	**2^{o}**	**3er**	**4^{o}**	**5^{o}**
Toronto	–21	–17,3	–20,3	–17	–21
Beijing	–19	–17	–10	–15,1	–16
Bogotá	–10	–8	–9,3	–15,5	–7
Moscú	–25	–24,8	–20	–22	–28
Área de la Antártida	–31	–38	–36	–39	–38

   a) ¿Son enteros todos los números que aparecen en la tabla?
   b) Halla la temperatura media, por lugar, en esos cinco días.

[55] Ejercicio elaborado con la colaboración del Lic. René Alberto Cantero Pérez, especialista en Geografía.

c) Ubica los resultados obtenidos en una recta numérica que simule un termómetro.
d) ¿En qué lugar la temperatura media fue mayor? ¿En cuál fue menor?

¡! ¿Qué hacer para responder esta interrogante?

¿Qué número satisface la igualdad $x : (-7) = -10$?

Al tener en cuenta lo que conocemos de división de números racionales, el valor de x es 70, porque $70 : (-7) = -10$. Para ello hay que saber si en el conjunto de los números racionales la división es la operación inversa de la multiplicación, al igual que ocurre con la adición y la sustracción.

Recuerda que:

La división de números racionales es la operación inversa de la multiplicación.

Ejemplo 2:

Para calcular el cociente $-12 : 6$ esto equivale a encontrar un número racional x, tal que $x \cdot 6 = -12$, este número es **– 2;** $\frac{-12}{6} = -2$, ya que $-12 \cdot 6 = -12$.

Basándonos en lo anterior, les mostraremos dos ejercicios, cuya resolución implica saber que la división y la multiplicación de números racionales son operaciones inversas.

Ejemplo 3:

Determina en cada caso el valor de la variable para que se cumpla la igualdad.

a) $2y = -10$ b) $\frac{p}{-8} = -5$ c) $-3q = -15$

Solución:

a) $2y = -10$ (El 2 se transpone con la operación inversa, dividiendo).

$y = \frac{-10}{2}$

$y = -5$

Comprobación

Miembro izquierdo		**Miembro derecho**
$2 \cdot (-5)$	Comparación $-10 = -10$	-10
$= -10$	Luego: $y = -5$	

$$\frac{p}{-8} = -5$$

b) $p = -5 \cdot (-8)$ (El – 8 se transpone con la operación inversa, multiplicando).

$p = 40$

Comprobación

Miembro izquierdo **Miembro derecho**

$\frac{40}{-8}$ -5

$= -5$

Comparación $-5 = -5$

Luego: $p = 40$

c) $-3q = -15$ (El – 3 se transpone con la operación inversa, dividiendo).

$q = -15 : (-3)$

$q = 5$

Comprobación

Miembro izquierdo **Miembro derecho**

$-3 \cdot 5$ -15

$= -15$

Comparación $-15 = -15$

Luego: $q = 5$

R ¡! Ya podemos afirmar que el valor que satisface la ecuación $x : (-7) = -10$, es: 70.

Ejercicios

4. Resuelva las ecuaciones siguientes. Fundamenta.

a) $-4x = 48$ b) $12x = -60$

c) $3a = -11{,}7$ d) $-10b = -15$

e) $\frac{x}{5} = -6$ f) $-0{,}5z = -12$

g) $\frac{1}{2}\ a = -3$ h) $-\frac{3}{7}y = \frac{9}{49}$

5. Si el producto de dos números racionales es – 12,8 y uno de los factores es:

a) – 8 b) 0,4 Calcula el otro factor.

6. El cociente de dos números racionales es – 4.

a. Calcula el dividendo si el divisor es – 15.
b. Calcula el divisor si el dividendo es 84.

¡! En el buzón de la Matemática de séptimo grado, se ha propuesto la actividad siguiente (fig.1.64):

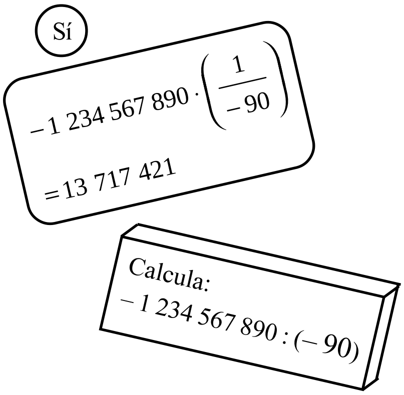


Figura 1.64

Para realizar este ejercicio utilizando el dato que nos dan, se impone averiguar si $-1\ 234\ 567\ 890 : (-90)$ $= -1\ 234\ 567\ 890 \cdot \left(\frac{1}{-90}\right)$ o lo que es lo mismo, indagar si existe el recíproco de un número racional diferentes de cero y si puede interpretarse la división como la multiplicación del dividendo por el recíproco del divisor.

Recuerda que:

- Para todo número racional a, diferente de cero, existe el número racional $\frac{1}{a}$ denominado *recíproco de a.*
- Para dividir dos números racionales, podemos multiplicar el dividendo por el recíproco del divisor $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$, $(a, b \in \mathbb{Q}, b \neq 0)$.

Ejemplo 4:

En este ejemplo, el recíproco de:

a) -3 es $\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{2}$ *es* $\frac{1}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{1} = -2$ c) $-\frac{4}{5}$ *es* $-\frac{5}{4}$

R ¡! Ya estamos en condiciones de responder el ejercicio del buzón, de la manera más rápida, sucede que $-1\ 234\ 567\ 890 : (-90) = -1\ 234\ 567\ 890 \cdot \left(\frac{1}{-90}\right) =$ $= 13\ 717\ 421$

Ejercicios

7. Adiciona a ciento veinticinco diezmilésimas el cociente de 6 y el recíproco de – 4.

8. Si – 346,5 : 3,3 = – 105, calcula $-346{,}5 \cdot \frac{10}{33}$.

1.4.5 Operaciones combinadas con números racionales

¡! Así hicieron Jorge Pedro y Pedro Antonio este ejercicio: Calcula – 84 : 12 · 5

Esta es la respuesta de Jorge Pedro.

– 84 : 12 · 5
= – 7 · 5 = – 35

Esta es la de Pedro Antonio.

– 84 : 12 · 5
= – 84 : 60
= – 1,4

¿Quién tendrá la razón?

Para ello es necesario saber qué operación se realiza primero al combinar multiplicación y división, fíjate que los resultados no son iguales, por lo que se impone un orden.

Recuerda que:

> En ejercicios donde aparezcan combinadas multiplicaciones y divisiones (o varias divisiones) estas deben efectuarse según el orden en que aparezcan.

Ejemplo 1:

Calcula:

a) – 24 : 4 · 0,5 b) $40 : (-2) : \frac{1}{4}$

Solución:

a) – 24 : 4 · 0,5 = – 6 · 0,5 = – 3 b) $40 : (-2) : \frac{1}{4} = -20 : \frac{1}{4} = -80$

Observa que en ambos casos hemos efectuado las operaciones en el mismo orden en que están; si se procede de otra forma el resultado obtenido no es correcto.

R ¡! Ya te habrás dado cuenta de que es Jorge Pedro el que tiene la respuesta correcta, ya que Pedro Antonio no respetó el orden operacional correspondiente.

Ejercicios

1. Calcula:

a) $515 : 5 \cdot 3$

b) $-205 : \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}$

c) $-350 \cdot 1{,}6 : (-24)$

d) $2{,}8 : (-4) \cdot 0{,}5$

e) $-155 \cdot 0{,}4 : 2 \cdot 13$

f) $-0{,}1 \cdot 2 : 0{,}5 \cdot (-4)$

g) $42 : \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 10 : (-24)$

h) $-36 : 4{,}5 : \left(-1\frac{1}{3}\right) \cdot 4$

i) $605 : (-0{,}605) : (-16) \cdot \frac{2}{5}$

j) $-42{,}4 : (-0{,}8) \cdot 10 : (-2)$

Ejemplo 2:

Un buzo desciende 38 m bajo el nivel del mar para observar un extraño pez de colores. Después asciende 21 m porque le parece ver un animal peligroso. Vuelve a sumergirse una cantidad de metros, que coincide con el doble de lo que ya había subido, para observar con atención los restos de un barco hundido. Finalmente sube 13 m porque ve otro pez de colores. ¿A cuántos metros bajo el nivel del mar se encuentra entonces?

Para responder esta situación, basta con resolver este ejercicio de operaciones combinadas:

$-38 + 21 - 2 \cdot 21 + 13$

$= -38 + 21 - 42 + 13$ — Al tener en cuenta lo que se plantea en el problema.

$= -38 - 42 + 21 + 13$ — Al aplicar que la suma algebraica es conmutativa.

$= -80 + 34 = -46$

Por tanto, el buzo se encuentra a – 46 m con respecto al nivel del mar.
Gráficamente tendríamos algo así (fig.1.65):

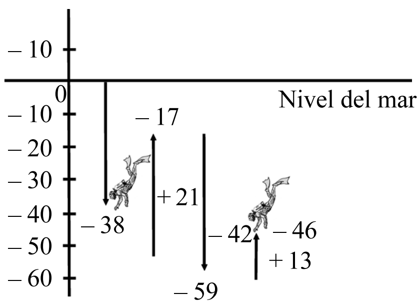


Figura 1.65

Fíjate que no tienes todavía un orden operacional en el conjunto de los números racionales para resolver un ejercicio como este:

Calcula: $-38 + 21 - 2 \cdot 21 + 13$

Podrías hacer lo siguiente: $-17 - 2 \cdot 21 + 13$, ¿pero cómo saber si se hace primero la multiplicación o la suma algebraica?

Veamos:

En la solución de ejercicios donde aparecen combinadas las diferentes operaciones con números racionales, debes tener en cuenta el orden en que ellas se realizan, así como si intervienen signos de agrupación.

Recuerda que:

1. Se resuelven las operaciones encerradas en paréntesis.
2. Se realizan las multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparecen.
3. Se realizan las sumas algebraicas que resultan al final.

Ejemplo 3:

Calcula: $-5 - 6 : 0{,}4 \cdot (-2) + 3$

Solución:

$= -5 - 15 \cdot (-2) + 3$ porque $-6 : 0{,}4 = -15$
$= -5 + 30 + 3$ porque $-15 \cdot (-2) = 30$
$= 28$

Entonces en nuestro ejercicio ya sabemos que:
$-17 - 2 \cdot 21 + 13 = -17 - 42 + 13 = -59 + 13 = -46$

Ejercicios

1. Calcula:

a) $515 : 5 \cdot 3$

b) $-205 : \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}$

c) $-350 \cdot 1{,}6 : (-24)$

d) $2{,}8 : (-4) \cdot 0{,}5$

e) $-155 \cdot 0{,}4 : 2 \cdot 13$

f) $-0{,}1 \cdot 2 : 0{,}5 \cdot (-4)$

g) $42 : \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 10 : (-24)$

h) $-36 : 4{,}5 : \left(-1\frac{1}{3}\right) \cdot 4$

i) $605 : (-0{,}605) : (-16) \cdot \frac{2}{5}$

j) $-42{,}4 : (-0{,}8) \cdot 10 : (-2)$

2. Efectúa las operaciones siguientes:

a) $-8+3\cdot 2$ b) $4{,}5\cdot 2-9$

c) $5+3:(-3)$ d) $-5\cdot(4-11)$

e) $-\frac{7}{2}\cdot 2+3-4:(-0{,}5)$ f) $8{,}25+0{,}6\cdot 5:(-1{,}5)-7$

g) $-10{,}2+\frac{5}{2}:(-10)-2\cdot\frac{7}{8}$

3. Sean:

$P=-28$ $Q=6{,}25$ $R=\frac{1}{7}$ $T=144$ $U=-0{,}\bar{3}$

3.1. ¿Es U un número racional? ¿Por qué?

3.2. Sustituye y calcula para los valores dados de las variables:

a) $P-Q\cdot T$ b) $T-P\cdot R$

c) $-T+P\cdot(-R)$ d) $-T:36+49\cdot R+P\cdot Q$

e) $P:4-Q:0{,}25-T:R$

4. Inspirados en la labor de científicos de su país,[56] adolescentes holandeses experimentan en la creación de una reserva de semillas vegetales, como una forma de proteger los principales cultivos en caso de que ocurra una catástrofe. Para ello cuentan con un terreno que debe mantenerse helado permanentemente, pues es preciso que las simientes se puedan conservar a una temperatura media[57] de – 18°C.
Con lo que conoces de la media aritmética y el cálculo numérico en el conjunto de los números racionales, ayúdalos a completar una tabla como esta (tabla 1.14):

Tabla 1.14

Mes	**E**	**F**	**M**	**A**	**M**	**J**	**J**	**A**	**S**	**O**	**N**	**D**
Temperatura máxima (°C)												

5.* El precio de un pantalón aumentó su décima parte. A la semana siguiente, lo rebajaron un 10 %. ¿Cuándo era más barato, antes de aumentar su precio o después de la rebaja?

[56] Semanario *Orbe* del 24 al 30 de junio de 2006.

[57] Ellos han considerado que la temperatura promedio de un terreno se calcula hallando el promedio de las temperaturas máximas de cada mes.

6. Una finca dedicada a la siembra de cítricos tiene una extensión de 853 ha y 13 áreas. Por cada metro cuadrado se cosechan 205 toronjas para la exportación y se desechan 9 de cada ciento. ¿Cuántas unidades se comercializan?

7. Cada vez que una pelota cae al piso rebota $\frac{2}{3}$ de la altura desde la cual cayó. Si se quiere que a la cuarta vez rebote 64 cm, ¿desde qué altura debe caer la primera vez? Selecciona el resultado que corresponda.

   216 cm   3 240 cm   486 cm   2 160 cm

1.4.6 Potenciación de exponente entero y de base un número racional

¡! Como parte de su búsqueda para realizar el trabajo investigativo *Números con nombres*, Talía encontró la información siguiente:

> *El 29 de septiembre de 2008, el proyecto de Informática distribuida GIMPS logró encontrar el mayor número primo,*[58] *y todo gracias a la conjunción de la eficacia de cálculo de decenas de miles de computadoras, que aplican una serie de cálculos para tratar de demostrar, uno a uno, que un número es primo o no.*

Hallan el mayor número primo conocido: $2^{43\,112\,609} - 1$

Sabe que este inmenso número es un número racional, pues es un número natural, como ahora estudia el conjunto de los números racionales, se pregunta si los números $M = (-2)^{43\,112\,609} - 1$, $K = 2^{-43\,112\,609} - 1$ y $L = (-2)^{-43\,112\,609} - 1$ son números racionales y si son naturales, quiere averiguar si son primos.

¿Habrán encontrado un número primo mayor que el dado en el momento que realizas este? A lo mejor.

En este epígrafe estaremos estudiando contenidos que permitirán responder la interrogante de Talía y la de Alejandro.

En el conjunto de los números fraccionarios, los productos en que todos los factores son iguales, pueden escribirse en forma abreviada utilizando la potenciación.

Ejemplo 1:

$0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}5^4 = 0{,}0625$

El exponente indica el número de veces que debe tomarse la base como factor; el producto resultante recibe el nombre de potencia.

[58] *Google* en: *www.taringa.net.*, 21 de marzo de 2012.

El producto resultante recibe el nombre de potencia de base $\underline{a}$ y exponente $\underline{n}$.

La operación de calcular la potencia se llama potenciación.

En el conjunto de los números racionales:

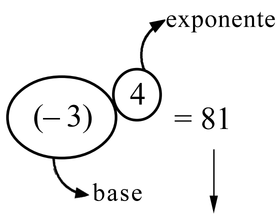
Los productos de la forma $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$, en que todos los factores son iguales, pueden escribirse en forma abreviada utilizando la *potenciación.*

En este caso se escribe $(-3)^4$, lo cual indica que (-3) debe tomarse como factor 4 veces $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$

Definición:

> Si a es un número racional cualquiera y n un número natural (diferente de cero), entonces a^n (significa enésima potencia de a) indica que a debe tomarse como factor n veces.
>
> $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a;$ (n factores a) , si $n = 1$ tenemos $a^1 = a$
>
> El producto resultante recibe el nombre de potencia de base a y exponente n.
> La operación de calcular la potencia se llama potenciación y su resultado es único.

Aquí el exponente (4) también indica el número de veces que debe tomarse la base (– 3) como factor y el producto resultante (81) recibe el nombre de potencia.



Potencia de base – 3 y exponente 4

Recuerda que:

> En particular, las potencias de exponente 2 y 3 reciben el nombre de **cuadrados** y **cubos** respectivamente.

$(-4)^2 = 16 \rightarrow$ el cuadrado de -4 es 16; $5^3 = 125 \rightarrow$ el cubo de 5 es 125.

Ejemplo 2:

Calcula: a) $(-3)^2$ b) 2^4 c) $\left(\frac{1}{4}\right)^3$

Solución:

a) $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$

b) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$

Observa que en cada caso se toma la base como factor tantas veces como indica el exponente.

Ejemplo 3:

Escoge uno de los cálculos del "Deleite numérico" de la tabla 1.15 y compruébalo con lo que acabas de aprender de potenciación en el conjunto de los números racionales. Por ejemplo:

Tabla 1.15

D E L E I T E	$(-1)^3 = 0^3 - 1 - 0 \cdot 6$ $(-2)^3 = (-1)^3 - 1 - 1 \cdot 6$ $(-3)^3 = (-2)^3 - 1 - 3 \cdot 6$ $(-4)^3 = (-3)^3 - 1 - 6 \cdot 6$ $(-5)^3 = (-4)^3 - 1 - 10 \cdot 6$ $(-6)^3 = (-5)^3 - 1 - 15 \cdot 6$ $(-7)^3 = (-6)^3 - 1 - 21 \cdot 6$ $(-8)^3 = (-7)^3 - 1 - 28 \cdot 6$ $(-9)^3 = (-8)^3 - 1 - 36 \cdot 6$ $(-10)^3 = (-9)^3 - 1 - 45 \cdot 6$	N U M É R I C O

$(-10)^3 = (-10) \cdot (-10) \cdot (-10) = -1\,000$
$(-9)^3 - 1 - 45 \cdot 6$
$(-9)^3 = (-9) \cdot (-9) \cdot (-9) = -729$
$= -729 - 1 - 270 = -1\,000$

Analiza cuidadosamente los ejercicios realizados:

¿Qué sucede con el signo del resultado de las potencias de exponente par?

$(-3)^2$ 2^4

El signo es más, o sea, el resultado es positivo, sea la base un número positivo o negativo.

Observa que: $(-3)^2 \neq -3^2$
$9 \neq -9$

En el caso de -3^2 que el resultado es -9, se determina el opuesto de 3^2

¿Qué sucede con el signo del resultado de las potencias de exponente impar?

$\left(\frac{1}{4}\right)^3$, $(-10)^3$ y $(-9)^3$

El signo es menos, o sea, el resultado es negativo, si la base es un número negativo y el signo es más, si la base es un número positivo.

¿Siempre se cumplirá esto?

Como para calcular a^n tenemos que hallar el producto de n factores iguales, es conveniente tener en cuenta que:

Recuerda que:

- Una potencia de *base positiva* siempre es *positiva.*
- Una potencia de *base negativa,* es *positiva* si el exponente es *par* y es *negativa* si el exponente es *impar.*

Ejemplo 4:

Calcula:

a) 5^4 b) $(-1)^6$ c) $(-2)^5$

Solución:

a) $5^4 = 625$ b) $(-1)^6 = 1$ c) $(-2)^5 = -32$

Cuando la base es negativa, debe siempre escribirse entre paréntesis para evitar errores.

R ¡! Respondamos parte de las preguntas de Talía: M es un número racional por ser el exponente un número impar. $M = (-2)^{43\,112\,609} - 1$, este es un número entero negativo.

Ejercicios

1. Calcula: a) $(-6{,}2)^2$ b) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$ c) $(-3)^4$ d) $(-2)^5$

2. Indica, sin calcular en cada caso, cuáles de las siguientes potencias son positivas y cuáles son negativas. Fundamenta.

a) 5^6 b) $(-4)^{55}$ c) $(-3)^{8\,879}$ d) $0{,}2^7$ e) $(-1)^{100\,000}$

f) $\left(-\frac{2}{9}\right)^9$ g) $(-2{,}5)^7$ h) $(-0{,}1)^{67}$ i) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3$

3.* Con los datos que aparecen a continuación se ha definido la operación aritmética Corazón ($\heartsuit$) de la manera siguiente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\heartsuit} = (a^2+b)(a-b^2)$$

$m.c.d(a,b)=1,$

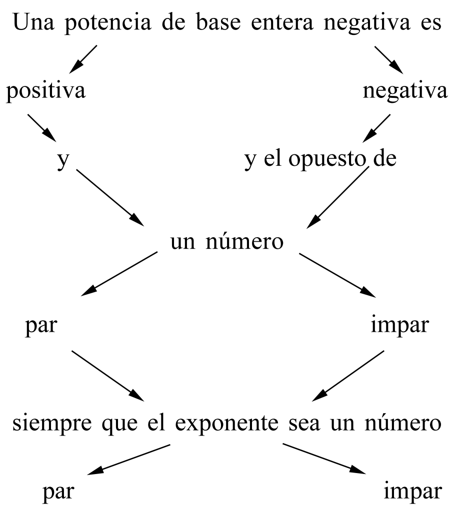
a, b *son números enteros*

$b \neq 0$

Demuestra que:

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{\heartsuit} + \left(1\frac{1}{2}\right)^{\heartsuit} - (0{,}2)^{\heartsuit}}{\frac{3^{\heartsuit}}{10}} = -18$$

4. Después de la primera clase de potenciación en el conjunto de los números racionales, la estudiante Yolanda elaboró el cuadro sinóptico siguiente:



¿Estás de acuerdo con el trabajo realizado? Si no estás de acuerdo justifica tu respuesta con ejemplos.

5.* Halla $(-1)^1 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 2 + (-1)^3 \cdot 3 + (-1)^4 \cdot 4 + (-1)^5 \cdot 5 + \ldots + (-1)^{1\,728} \cdot 1\,728$.
Si $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + 1\,727 = 746\,496$ y $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 1\,728 = 747\,360$.

Producto de potencias de igual base

¡! Expresa A de forma tal que aparezca solo una potencia de base 3, si $A = 3^{20} \cdot 3^{25}$.

Con ayuda de los recursos que nos brindan las nuevas tecnologías, pudieras resolver un problema como este, porque puedes hallar 3^{20}, al multiplicar el número 3 por el mismo 20 veces, de hecho el resultado es 3 486 784 401; también puedes calcular 3^{25}, al multiplicar el número 3 por el mismo 25 veces, aquí el resultado es 847 288 609 443; puedes multiplicar los dos valores y obtener 2 954 312 706 550 833 698 643 y conocer además que este señor número es 3^{45}, pero…, imagina que no lo tienes ahora, ¿qué hacer? Te invitamos a conocer lo siguiente.

Recuerda que:

Al multiplicar potencias de igual base se obtiene una potencia de la misma base, cuyo exponente es la *suma* de los exponentes.

Ejemplo 1:

En un caso particular puedes ver que:

$$3^3 \cdot 3^2 = \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3)}_{3 \text{ factores}}\ \underbrace{(3 \cdot 3)}_{2 \text{ factores}} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{5 \text{ factores}} \text{ Luego: } 3^3 \cdot 3^2 = 3^{3+2} = 3^5$$

Esta propiedad puede expresarse, en general como sigue: $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

Ejemplo 2:

Calcula:

a) $2^5 \cdot 2^3$ b) $(-3)^2 \cdot (-3)^4$ c) $x^2 \cdot x^3 \cdot x^4$

Solución:

a) $2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8 = 256$

b) $(-3)^2 \cdot (-3)^4 = (-3)^{2+4} = (-3)^6 = 729$

c) $x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 = x^{2+3+4} = x^9$

R ¡! Si al calcular el producto potencias de igual base, se mantiene la base y se suman los exponentes, en nuestro ejemplo, para calcular el valor de A, afirmamos que: $3^{20} \cdot 3^{25} = 3^{45}$ y ya está resuelto el problema.

Potencia de una potencia

A continuación otra situación:

¡! Rubén Darío se prepara para representar a su grupo en el MATEMATICAZO, tope competitivo de los estudiantes de séptimo grado de su escuela, por ello quiere resolver, de la manera más fácil, el ejercicio siguiente:

Si $(-m)^n = 64$, halla $P = (-m)^{4n} - 5$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$

Dados sus conocimientos analizó que solo tenía estas ocho posibilidades a partir del dato que se brinda en la tabla 1.16.

Tabla 1.16

m	n	$(-m)^{4n} - 5$
64	1	$(-64)^{4\cdot 1} - 5$
-64	1	$64^{4\cdot 1} - 5$
8	2	$(-8)^{4\cdot 2} - 5$
-8	2	$8^{4\cdot 2} - 5$
4	3	$(-4)^{4\cdot 3} - 5$
-4	3	$4^{4\cdot 3} - 5$
2	6	$(-2)^{4\cdot 6} - 5$
-2	6	$2^{4\cdot 6} - 5$

Con el auxilio de una calculadora científica encontró el resultado en cada caso, siempre fue el mismo: 16 777 211, aunque sabe que en el tope no podrá utilizarla.

Al pensar en otra vía escribió lo siguiente (tabla 1.16 a)):

Tabla 1.16 a)

$(-m)^{4n}$
$= (-m)^n \cdot (-m)^n \cdot (-m)^n \cdot (-m)^n$
$= 64 \cdot 64 \cdot 64 \cdot 64$

Halló el producto le restó 5 y obtuvo el mismo resultado: 16 777 211.

Sin embargo, existe una propiedad de la potencia que permite hallar el resultado de una manera más sencilla.

Recuerda que:

Al calcular la potencia de una potencia, se obtiene otra potencia cuyo exponente es el *producto* de los exponentes.

Ejemplo 1:

$(5^2)^3 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2$ (según la definición de potencia)
$= 5^{2+2+2}$ (por propiedad del producto de potencias de igual base)
$= 5^{2 \cdot 3}$ (ya que $2 + 2 + 2 = 2 \cdot 3$)
$= 5^6$ Luego: $(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$

Esta propiedad puede expresarse, en general, como sigue: $\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$

Ejemplo 2:

Calcula:

a) $(3^4)^2$ b) $[(-2)^3]^4$ c) $(x^5)^3$

Solución:

a) $(3^4)^2 = 3^{4 \cdot 2} = 3^8 = 6\ 561$

b) $[(-2)^3]^4 = (-2)^{3 \cdot 4} = (-2)^{12} = 4\ 096$

c) $(x^5)^3 = x^{5 \cdot 3} = x^{15}$

Observa que en cada caso se mantiene la base y se multiplican los exponentes.

R ¡! Podemos escribir $P = ((-m)^n)^4 - 5 = 64^4 - 5 = 16\ 777\ 211$ y explicarle por qué a Rubén Darío. ¿Podemos escribir $P = ((-m)^n)^4 - 5 = 64^4 - 5 = 16\ 777\ 211$?

Cociente de potencia de igual base

¡! Veamos otra situación: Calcula el valor de B: C si $B = 2^{50}$ y $C = 2^{48}$.

Este ejercicio vamos a resolverlo, con los recursos que brinda la Informática.
Auxiliándonos de una de las aplicaciones utilizadas con mayor frecuencia la "Calculadora",[59] podemos hallar 2^{50} y 2^{48}.

Para resolver 2^{50} debes colocar el dos (2), luego presionar la tecla x^y y después el 50, así se repite el mismo procedimiento para 2^{48} como se muestra a continuación.

2 x^y 50 1125 899 906 842 624 2 x^y 48 281 474 976 710 656

[59] A ella se accede cuando dentro del menú de la barra de **Inicio** hacemos clic en **Programas**, después **Accesorios** y por último **Calculadora**, en el *Word* 97-2003.

Pero, también podemos dividir ambas cantidades y percatarnos de que su cociente es 4. ¡Compruébalo tú mismo(a)!

¿Qué sucedería si no tuviésemos a mano una o varias súper calculadoras para realizar un ejercicio como este u otro parecido?

Una ventaja tenemos: las bases de estas potencias son iguales, aquí necesitamos otra propiedad de la potencia.

Recuerda cómo calcular el cociente de potencias de igual base:

Al dividir potencias de igual base, se obtiene una potencia de la misma base, cuyo exponente es la *diferencia* de los exponentes.

Ejemplo 3:

En este ejemplo puedes ver que se cumple lo siguiente:

$$\frac{4^5}{4^3} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4} = 4^2 = 4^{5-3} \text{ Luego: } \frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2$$

Esta propiedad se expresa, en general, de la forma siguiente:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad con \quad a \neq 0}$$

Ejemplo 4:

Calcula:

a) $\frac{(-2)^6}{(-2)^2}$ b) $\frac{3^4}{3^3}$

Solución:

a) $\frac{(-2)^6}{(-2)^2} = (-2)^{6-2} = (-2)^4 = 16$

b) $\frac{3^4}{3^3} = 3^{4-3} = 3^1 = 3$

Observa que en cada caso, al calcular el cociente, se mantiene la base y se restan los exponentes.

R ¡! Haciendo uso de esta propiedad, resolveremos la situación que se solucionó con ayuda de la calculadora $B : C = 2^{50} : 2^{48} = 2^{50-48} = 2^2 = 4$

Potencias de exponente cero y exponente negativo

¡! Después de conocer las propiedades de la potencia, **Cociente de potencia de igual base**, Ramiro realiza los ejercicios siguientes:

Efectúa: a) $\dfrac{(-2)^{142}}{(-2)^{144}}$ b)$(-6{,}1)^{20} : (-6{,}1)^{20}$

Al responder el a), se tiene que $\dfrac{(-2)^{142}}{(-2)^{144}} = (-2)^{142-144} = (-2)^{-2}$, no sabe qué hacer con ese resultado, piensa en otra manera, por eso procede así:

$\dfrac{(-2)^{142}}{(-2)^{144}} = \dfrac{(-2)^{142}}{(-2)^{142}\cdot(-2)^{2}} = \dfrac{1}{(-2)^{2}}$. Efectuando la simplificación correspondiente.

Entonces $(-2)^{-2} = \dfrac{1}{(-2)^{2}}$, ¿siempre será así?

Al responder el b), se obtiene que $(-6{,}1)^{20} : (-6{,}1)^{20} = (-6{,}1)^{0}$ y al simplificar, el resultado es 1, entonces $(-6{,}1)^{0} = 1$, ¿siempre será así? Los dos resultados son correctos.

En la definición de potencia que vimos no se incluye el caso del exponente cero, ni el del exponente negativo. El inciso a) del ejercicio de Ramiro indica la posibilidad de que el exponente sea cero y ya sabíamos, dada la curiosidad de Alejandro que existen potencias de exponente menor que cero. A continuación se ilustra una manera de definirlas.

Recuerda que:

- Todo número racional, diferente de cero, elevado al exponente cero, es igual a uno.

  $a^{0} = 1 \ (a \in \mathbb{Q};\ a \neq 0)$

- Todo número racional, diferente de cero, elevado a un exponente negativo, es igual a una fracción cuyo numerador es 1 y su denominador es el mismo número racional con el exponente positivo.

  $a^{-k} = \dfrac{1}{a^{k}} \ (a \in \mathbb{Q};\ a \neq 0;\ k \in \mathbb{N})$

Con lo anterior se ha extendido la definición de potencia de exponente natural a exponente entero, para la cual se cumplen todas las propiedades que se estudian en este epígrafe.

Ejemplo 5:

Calcula:

a) 8^0 b) $\left(-\frac{1}{3}\right)^0$ c) 3^{-3} d) $(-2)^{-4}$

Solución:

a) $8^0 = 1$ b) $\left(-\frac{1}{3}\right)^0 = 1$

c) $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$ d) $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$

R ¡! Ya estamos en condiciones de responder la famosa pregunta de Alejandro al inicio de la unidad y de terminar de responder las de Talía.

$$V_c = 10\,000\,(1 + 0{,}081\,6)^{-5}$$

Ya sabemos que en el factor, que no es el 10 000, la base es el número racional 1,081 6 y el exponente es el número negativo – 5, si te encuentras ante una situación como esta y no dispusieras de las tablas que se utilizan en la Matemática Financiera para ello y tampoco tuvieses una calculadora científica, ya cuentas con un recurso matemático para hallar cuánto es $1{,}081\ 6^{-5}$, pues $1{,}081\ 6^{-5} = \frac{1}{1{,}081\ 6^5}$.

Ya te habrás dado cuenta de que *K* y *L* (los números encontrados por Talía en el trabajo investigativo, números con nombres) son números racionales, aunque no naturales.

$$K = 2^{-43\ 112\ 609} - 1 = \frac{1}{2^{43\ 112\ 609}} - 1 \text{ y } L = (-2)^{-43\ 112\ 609} - 1 = \frac{1}{(-2)^{43\ 112\ 609}} - 1 =$$

$$= -\frac{1}{2^{43\ 112\ 609}} - 1$$

Potencia de un producto

¡! En el cartel aparece una misión que se plantea a los alumnos de séptimo grado en una de las secciones del boletín *El piropo matemático,* promotor del interés por la asignatura.

Intentemos resolverlo, asumamos la sugerencia, que es escribirlo como un producto en el que uno de los factores es una potencia de 10.

El piropo matemático

PUBLICACIÓN MENSUAL A FAVOR DE LA MATEMÁTICA

La misión

El número $2^{924} \cdot 5^{917}$ tiene 920 cifras.

Demuéstralo.

<u>Sugerencia</u>: Escríbelo como uno de la forma $a \cdot 10^n$,
$a, n \in \mathbb{N}$

Al menos, tenemos en las bases de las potencias 2 y 5, cuyo producto es 10. Vamos a escribir el factor 2^{924} como un producto en el que aparezca la potencia 2^{917}, queda así: $2^{917} \cdot 2^7$, entonces $2^{924} \cdot 5^{917} = 2^{917} \cdot 2^7 \cdot 5^{917} = 2^{917} \cdot 5^{917} \cdot 2^7$ al aplicar la conmutatividad de la multiplicación.

Al asociar los dos primeros factores, nos encontramos con un producto de potencias en las que el exponente es el mismo, hasta ahora no tenemos una propiedad que nos permita trabajar con productos con estas características. Esa propiedad existe:

Recuerda cómo calcular la potencia de un producto:

Para elevar un producto indicado a un exponente, se eleva cada factor a dicho exponente.

Ejemplo 1:

a) $(x \cdot y)^3 = (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot (x \cdot y)$ (por definición de potencia)
$= (x \cdot x \cdot x) \cdot (y \cdot y \cdot y)$ (aplicando propiedades conmutatividad y asociatividad)
$= x^3y^3$ (por definición de potencia)

b) De igual manera si es necesario $x^3 \cdot y^3 = (x \cdot y)^3$

Y es precisamente esa propiedad la que necesitamos para cumplir la misión:

Entonces $2^{924} \cdot 5^{917} = 2^{917} \cdot 5^{917} \cdot 2^7 = 10^{917} \cdot 2^7 = 128 \cdot 10^{917}$ por lo que es fácil concluir que tiene 920 cifras, 917 del factor 10^{917} y 3 del factor 128.

Potencia de un cociente

¡! Veamos otra situación relacionada con las propiedades de las potencias. Al llegar al aula los estudiantes de un grupo de séptimo encontraron en la pizarra lo siguiente (fig. 1.66):

Figura 1.68

Tú también puedes atreverte y demostrar que esa igualdad se cumple.

Escribe la base de la potencia que aparece en el miembro izquierdo de la igualdad como el producto de dos números racionales.

Obtienes $\left(a \cdot \dfrac{1}{b}\right)^n = a^n \cdot \left(\dfrac{1}{b}\right)^n$ al aplicar la propiedad **potencia de un producto.**

$\left(\dfrac{1}{b}\right)^n = \underbrace{\dfrac{1}{b} \cdot \dfrac{1}{b} \cdot \dfrac{1}{b} \cdot \ldots \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{1^n}{b^n}}_{n \text{ veces}}$ por definición de potencia y de producto de fracciones.

$a^n \cdot \left(\dfrac{1}{b}\right)^n = a^n \cdot \dfrac{1}{b^n}$ por definición de potencia.

$a^n \cdot \dfrac{1}{b^n} = a^n : b^n$ por propiedad de la división de números racionales

R ¡! De ahí que: $(a : b)^n = a^n : b^n$, $b \neq 0$ igualdad que había que probar.

Recuerda que:

Para elevar un cociente indicado a un exponente, se elevan el dividendo y el divisor a dicho exponente.

Ejemplo 1:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^4 = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \text{ (por definición de potencia)}$$

$= \dfrac{x \cdot x \cdot x \cdot x}{y \cdot y \cdot y \cdot y}$ (por definición del producto de fracciones) $= \dfrac{x^4}{y^4}$ (por definición de potencia)

Ejemplo 2:

Calcula:

a) $(3m)^2$ b) $\left(\dfrac{2}{b}\right)^3$; con $b \neq 0$ c) $\left(\dfrac{a^{-2} \cdot b}{c}\right)^4$; con $(a, c) \neq 0$

Solución:

a) $(3m)^2 = 3^2 \cdot m^2 = 9m^2$ b) $\left(\dfrac{2}{b}\right)^3 = \dfrac{2^3}{b^3} = \dfrac{8}{b^3}$; $b \neq 0$

c) $\left(\dfrac{a^{-2} \cdot b}{c}\right)^4 = \dfrac{\left(a^{-2} \cdot b\right)^4}{c^4} = \dfrac{a^{-8} b^4}{c^4} = \dfrac{b^4}{a^8 c^4}$; $(a, c) \neq 0$

En resumen:

- Una potencia de base positiva siempre es positiva.
- Una potencia de base negativa, es positiva si el exponente es par y negativa si el exponente es impar.
- Las potencias de exponente entero satisfacen las igualdades siguientes.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(a : b)^n = a^n : b^n$; $(b \neq 0)$
$a^m : a^n = a^{m-n}$; $a \neq 0$	$a^0 = 1$ $(a \in \mathbb{Q}; a \neq 0)$
	$a^{-k} = \dfrac{1}{a^k}$ $(a \in \mathbb{Q}; a \neq 0; k \in \mathbb{N})$

Estas son las igualdades relacionadas con la potenciación que se estudian en séptimo grado, de las que te queda mucho por aprender.

En el libro Elementos, *el famosísimo Euclides (fig. 1.67) recopila gran parte del saber matemático de su época. La colosal obra está formada por trece volúmenes, los libros VII, VIII y IX son de Aritmética, en uno de ellos aparece esta propiedad de la potencia que ya conoces:*[60]

$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$

[60] Herbert W. Turnbull: *Grandes Matemáticos,* 1984.

Figura 1.67

Disfrútalas y reflexiona con ellas, fíjate que junto al cálculo con números racionales te permiten dar solución a las más diversas situaciones de la vida práctica, incluso a partir de ahora podrás resolver ecuaciones en las que la variable aparece en el exponente de una potencia, por ejemplo: $2^x = (2^2)^3$ al aplicar en el miembro derecho; la propiedad **Potencia de una potencia**, se obtiene que $2^x = 2^6$, puesto que el resultado de la potenciación es único y las bases de las potencias son iguales, para que la igualdad se cumpla solo hace falta que sean iguales los exponentes, de ahí que $x = 6$.

Ejercicios

6. Calcula:

   a) $\left(-1{,}2\overline{7}\right)^0$ b) $(-8)^{-1}$ c) $(0{,}125)^{-3}$ d) $98 : 7^2 + 94^0 - 2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$

7. Calcula aplicando las propiedades de la potencia que más convenga en cada caso:

   a) $4^{2\,073} \cdot 4^{-2\,069}$ b) $(-6{,}8)^{25} : (-6{,}8)^{23}$

   c) $(2^5)^{-2}$ d) $(-0{,}062\;5)^{-24} \cdot 16^{-24}$

   e) $30{,}24^2 : (-0{,}36)^2$ f) $(a^{-19})^4 \cdot a^{76}$

   g) $\dfrac{2^8 \cdot 2^3}{8^4}$

8.* Si $4^x - 4^{x-1} = 48$, ¿cuál es el valor de x?

9. Lee detenidamente y responde:

9.1 Clasifica las proposiciones siguientes en verdaderas (V) o falsas (F). Escribe V o F en la línea dada. Justifica en cada caso tu respuesta.

a) ___ $-a^n = (-a)^n,\ n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Q}$ b) ___ $a^x + a^y = a^{x+y},\ a \in \mathbb{Q},\ x, y \in \mathbb{Z}$

c) ___ $7^2 \cdot 7^3 = 49^6$ d) ___ $1^c = 1,\ c \in \mathbb{Z}$

9.2 Selecciona la respuesta correcta marcando con una X en la línea dada. Argumenta.

9.2.1 Si $m^{12} \cdot m^{18} : m^{27}$ entonces:

a) ___ $= m^{-3}$ b) ___ $= m^{21}$ c) ___ $= m^3$ d) ___ $= m^0$

9.2.2 Si r satisface la igualdad $\dfrac{\frac{1}{5}\left(r^2\right)^{-5}}{r^{-9} : (-7)} = -\dfrac{14}{25}$ entonces:

a) __ $r = -2{,}5$ b) ___ $r = -0{,}4$ c) ___ $r = 2{,}5$ d) ___ $r = 0{,}4$

9.2.3 $P = \dfrac{35^{300} \cdot 7^{-198}}{25^{151} \cdot 7^{100}}$ por eso:

a) ___ $P = 1\ 225$ b) ___ $P = 196$ c) ___ $P = 1{,}96$ d) ___ $P = 19{,}6$

9.2.4 Sean los números $X = 3^{40}, Y = 5^{30}$ y $T = 7^{20}$, entonces se cumple que:

a) ___ $X < Y < T$ b) ___ $T < X < Y$ c) ___ $Y < X < T$ d) ___ $T < Y < X$

1.4.7 Notación científica o exponencial

¡! Gema, la profesora de Matemática, quiso una vez más hacer reflexionar a los estudiantes acerca de la importancia de una correcta higiene personal y colectiva, por ello leyó a sus estudiantes fragmentos de un singular relato:[61]

Examinemos a modo de ejemplo la rapidez con que se multiplica la mosca doméstica de toda conocida. Aceptemos que cada mosca deposita 120 huevecillos y que lamentablemente están dadas todas las condiciones para que durante el verano tengan tiempo de aparecer 7 generaciones, en cada una de las cuales la mitad son machos y la mitad hembras. Supongamos que la mosca deposita por primera vez los huevos el 15 de abril y que cada hembra, en 20 días, crece lo suficiente para depositar ella misma nuevos huevos. En ese caso, la reproducción se desarrollará en la forma siguiente:

A comienzo de mayo nacen 120 moscas. El 5 de mayo, 60 moscas depositan 120 huevos; a mediados de mayo aparecen 60 · 120 = 7 200 moscas.

[61] Y. Perelmán: *Matemáticas Recreativas,* 1982.

El 25 de mayo cada una de la 3 600 hembras, deposita 120 huevos, por eso a comienzos de junio nacen 3 600 · 120 = 432 000 moscas.
El 14 de junio las 216 000 moscas depositan 120 huevos cada una, a finales de junio habrá 216 000 · 120 = 25 920 000 moscas.

Gema propuso a sus estudiantes calcular hasta concluir que el primero de septiembre nacen 355 923 200 000 000 moscas. ¡Compruébalo tú mismo(a)!

Todos quedaron convencidos de lo imprescindible que es la limpieza y van a confeccionar un relato parecido a este con la multiplicación del indeseable Aedes Aegypti, para mostrarla en la próxima audiencia sanitaria, pero muchos le comentaron a su profesora si no existía la posibilidad de operar con números más pequeños, pues las multiplicaciones se hicieron muy difíciles y hubo momentos en los que se equivocaron con tantos ceros; ella respondió que sí, veamos.

Ahora que ya conoces cómo calcular cualquier potencia con exponente entero, introduciremos una notación que nos permite escribir números muy grandes o muy pequeños "en una forma breve", llamada **notación científica o exponencial.**

Los siguientes números se han escrito en notación decimal y en notación científica:

Notación decimal		Notación científica
625,3	$\longleftrightarrow$	$6{,}253 \cdot 10^{2}$
0,000 387	$\longleftrightarrow$	$3{,}87 \cdot 10^{-4}$
981 000	$\longleftrightarrow$	$9{,}81 \cdot 10^{5}$

Observa que en notación científica el número se expresa como el **producto de una potencia de 10 y un número mayor o igual que 1 y menor que 10.**

Ejemplo 1:

Expresa en notación científica los números siguientes:

a) 234 000 b) 0,000 002 6

Solución:

a) $2\ 34\ 000 = 2{,}34 \cdot 10^{5}$ b) $0{,}000\ 002\ 6 = 2{,}6 \cdot 10^{-6}$

La coma se corre 5 lugares a la izquierda.

La coma se corre 6 lugares a la derecha.

c) Los virus son diminutos, miden aproximadamente 0, 000 002 5 cm, 50 000 rinovirus, los que provocan los catarros, <u>cabrían en un poquitín más que un milímetro</u>.[62] Verifica la información que aparece subrayada y ¡piensa en ella la próxima vez que estornudes sin taparte la boca!

[62] *¿Sabía que...?*, Edición Espasa Calpe, 2007.

Solución:

Para saber qué longitud se obtendría si ese ejército de rinovirus se dispusiera en línea recta, uno junto al otro, basta con multiplicar la longitud de uno de ellos por 50 000. Conviene escribir el tamaño de un virus en notación exponencial.

$0,\ 000\ 002\ 5 = 2,5 \cdot 10^{-6}$ y hacer lo mismo con la cantidad de rinovirus,

$50\ 000 = 5 \cdot 10^4$, esto hará los cálculos más sencillos: $2,5 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 0^4 = 12,5 \cdot 10^{-2}$ al aplicar las propiedades de la multiplicación y las de la potencia. La longitud es de $12,5 \cdot 10^{-2}$ cm, al expresar esa longitud en milímetros obtenemos 1,25 mm y se corrobora lo pedido.

Recuerda cómo expresar un número en notación científica:

> Se corre la coma decimal (hacia la izquierda o hacia la derecha) todos los lugares que se necesitan para obtener un número mayor o igual que 1 y menor que 10 y se multiplica ese número por una potencia de 10.
>
> - El módulo del exponente de esa potencia es el número de lugares que se ha corrido la coma.
> - El signo de ese exponente será *más*, si se corrió la coma hacia la izquierda, y será *menos*, si se corrió hacia la derecha.

Ejemplo 2:

Escribe en notación decimal los siguientes números que están expresados en notación científica:

a) $5,67 \cdot 10^4$ b) $2,3 \cdot 10^{-5}$

Solución:

a) $5,67 \cdot 10^4 = 56\ 700$ b) $2,3 \cdot 10^{-5} = 0,\ 000\ 023$

Corro la coma 4 lugares. Corro la coma 5 lugares.

Recuerda cómo expresar la notación científica en notación decimal:

> Para expresar en notación decimal un número dado en notación científica:
>
> Sencillamente se efectúa el producto que aparece indicado en dicha notación científica, el producto del número por la potencia de 10.
>
> ¿Cómo? En el número se corre la coma decimal, la cantidad de lugares que indica el módulo del exponente de la potencia de 10: hacia la derecha si el signo de este es más y hacia la izquierda si es menos.
>
> Si es necesario se completan con ceros los lugares.

Ejercicios

1. Completa la siguiente poesía con las palabras que te indican y con lo que conoces de la notación científica:

científica	exponencial	diez	uno
módulo	número	positivo	derecha

¡Infinitamente grandes, infinitamente pequeñas![63]

I) Esas sabias cantidades,
que parecen terroríficas.
De una forma las abrevio:
con la notación ____________.

II) Y recuerda Juan Ramón
una idea muy especial:
Afirma con gran pasión,
que esa útil notación
se apellida ________________.
De un producto tú te auxilias
si la vas a utilizar.
Un factor, dice Jerez
es un hermoso valor,
que es siempre menor que ______
y mayor o igual que _____.
El otro, me dice Bruno,
es una hermosa potencia
que tiene por base _____.
Y la coma decimal
tú la tienes que correr
hasta encontrar el ______
que nos contaba Jerez.

III) ¿Qué cuál es el exponente
de la potencia de Bruno?
Así recuerda y retoma
Hortensia, la inteligente:
El ___________ del exponente
de la potencia de Bruno
es el __________ de lugares,
que se ha corrido la coma.
Si a la izquierda la has corrido,
sí, me refiero a la coma,
el susodicho exponente
siempre será _____________.
Y negativo será
el ya citado exponente
si la renombrada coma
a la ________ has corrido.
Y sí que sirve de mucho
esta notación de ciencia,
tú tranquilo, no te apresures
úsala con gran paciencia.

IV) Grandes, muy grandes, enormes,
y también chicas, muy chicas,
Las escribo en forma breve
con la notación ___________.

2. (…) En Cuba actualmente los recursos hidráulicos disponibles ascienden a algo más de <u>trece mil seiscientos millones</u> de metros cúbicos (…)[64]

   Marca con una X la respuesta correcta.

[63] Rita María Cantero Pérez.

[64] Órgano de prensa *Granma* del 26 de enero de 2012.

La cantidad que aparece subrayada, escrita en notación exponencial, es:

a) ___$1{,}4 \cdot 10^{9}$ b) ___$1{,}4 \cdot 10^{10}$ c) ___$1{,}4 \cdot 10^{11}$

d) ___ninguna de las anteriores

3. El gobierno japonés calcula que el costo de los daños que el terremoto y el tsunami del 11 de marzo de 2011 causaron en edificios, carreteras y puertos, asciende a más de ciento cuarenta y siete mil millones de euros.[65]

   Completa con la respuesta correcta.

   La cantidad que aparece subrayada, escrita en notación científica, es _______.

4. El macho de la mariposa Emperador tiene un desarrollado sentido de percepción de olores, él puede inhalar no menos de 0,001 000 1 g que la hembra le permite a una distancia de 11 km.[66]

   Di si la proposición siguiente es verdadera o falsa. Justifica si es falsa.

   La cantidad que aparece subrayada, escrita en notación científica es $1 \cdot 10^{-3}$.

5. La mayoría de las calculadoras y muchos programas de computadoras presentan resultados muy grandes y muy pequeños en notación científica.

   La base 10 se omite generalmente y se utiliza la letra E (mayúscula o minúscula) para indicar el exponente.
   Por ejemplo:

   238 294 360 000 = 2,3829436E11
   0,000 314 16 = 3,1416E– 4.

   Expresa en notación decimal el número de la pantalla de la calculadora de la figura 1.68.

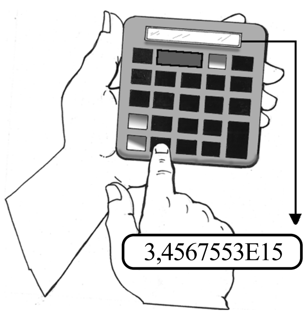


Figura 1.68

[65] Órgano de prensa *Granma* del 25 de junio de 2011.

[66] Órgano de prensa *Tribuna de La Habana,* 25 de marzo de 2012.

6. Lee cuidadosamente la noticia:[67]

> ¡DOMINICANOS SUMAN
> 9,38 MILLONES!
>
> La Oficina Nacional de Estadísticas (ONE). Presentó el informe sobre el Censo Nacional de Población y Vivienda 2010, el cual reveló que 9,38 millones de personas habitan en República Dominicana. El censo mostró un Crecimiento de la población en 726 277 habitantes desde el anterior sondeo en el 2002. Se dio a conocer que del total de pobladores, 4 707 000 son hombres y 4 670 000 mujeres.

a) Escribe en notación científica la cantidad que aparece subrayada.
b) Confirma el total al que se hace referencia.
c) ¿Cuántos dominicanos había en el 2002?

7. El deshielo en la Antártica aumentó en un 75 % en 10 años. Los científicos indicaron que la pérdida neta de hielo antártico aumentó de 112 gigatoneladas al año en 1996 a 196 gigatoneladas al año en el 2006.[68]

a) Escribe las cantidades de toneladas en notación científica, si se conoce que el prefijo **giga (G)** se utiliza en el Sistema Internacional de Unidades para expresar el valor $\mathbf{10^9}$.
b) Con los recursos que te brinda el cálculo porcentual, confirma la información que se brinda en la primera oración del texto dado.

8.* Determina la suma de las cifras del número $\dfrac{-(-10)^{3\,125}+2}{3}$.

9. Redacta un párrafo bajo el título “Ventajas y desventajas de la notación científica”

1.4.8 Cálculo de cuadrados y raíces cuadradas utilizando tablas

Ya recordamos que las potencias de exponente 2 reciben el nombre de cuadrados.

[67] Órgano de prensa *Granma,* 10 de marzo de 2011.

[68] Órgano de prensa *Granma* del 24 de enero de 2008 y tabloide del curso de *Universidad para todos,* “Nuevas Tecnologías”.

Los cuadrados de los números naturales reciben el nombre de cuadrados perfectos.

Ejemplo 1:

$1 = 1^2$; $4 = 2^2$; $9 = 3^2$; son cuadrados perfectos.

Recuerda que:

> La operación mediante la cual, dado un número cualquiera, determinamos su cuadrado se denomina **elevación al cuadrado.**

Para el cálculo de los cuadrados de números racionales, nos auxiliamos de las NTIC, pero en muchos casos resulta práctico el uso de la tabla de cuadrados que aparece al final del libro.

En esta tabla pueden leerse los cuadrados de los números del 1,00 al 9,99. La mayoría de los cuadrados de estos números son valores aproximados, que tienen cuatro cifras correctas en la tabla.

Para calcular los cuadrados de números dados, utilizando la tabla, procedemos de la forma que se ilustra en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 2:

Calcula utilizando la tabla, como se ilustra en el fragmento de la tabla 1.17:

a) $(4{,}75)^2$

Tabla 1.17

x	**0**	**1**	•	•	•	**5**
1,0	1,000	1,020	•	•	•	1,103
1,1	1,210	1,232	•	•	•	1,323
1,2	1,440	1,464	•	•	•	1,563
1,3	1,690	1,716	•	•	•	1,823
1,0	1,000	1,020	•	•	•	1,103
•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•
$\boxed{4{,}7}$	22,09	22,18	•	•	•	$\boxed{22{,}56}$

Solución:

a) $(4{,}75)^2$

Buscamos en la tabla la fila 4,7.
Buscamos en la tabla la columna 5.
En la intersección de la fila y la columna hallamos el 22,56
Respuesta: $(4{,}75)^2 \approx 22{,}56$

Recuerda el procedimiento para determinar el cuadrado de un número:

Buscamos en la tabla, la fila que esté determinada por las dos primeras cifras del número dado *a* y después, la columna que está encabezada por la tercera cifra del número. El número que aparece donde concurren la fila y la columna es la sucesión de cifras correspondientes a a^2, o sea, el cuadrado de *a* se encuentra en la intersección de la fila y de la columna halladas.

Si el número cuyo cuadrado se quiere calcular tiene más de tres cifras, debe redondearse de modo que se obtenga un número de tres cifras. En este caso se está trabajando con un dato aproximado.

Recuerda tener en cuenta lo siguiente:

Si el dato con que se trabaja es un número aproximado, o sea, no es exacto (puede ser resultado de un redondeo o proceder de una medición), al elevar al cuadrado la respuesta se da con tantas cifras como tenga el dato.

Ejemplo 3:

Calcula utilizando la tabla $(4{,}323)^2$

Solución:

a) $(4{,}323)^2$

Redondeamos el dato 4,323 a tres cifras $4{,}323 \approx 4{,}32$

Buscamos en la tabla el cuadrado de $4{,}32 = (4{,}32)^2 = 18{,}66$ $(18{,}66 \approx 18{,}7)$

Como el dato con que hemos trabajado es un número aproximado a tres cifras, producto de un redondeo, la respuesta se da en este caso con tres cifras.

Respuesta: $(4{,}323)^2 \approx (4{,}32)^2 \approx 18{,}7$

En los ejemplos anteriores se han elevado al cuadrado números comprendidos entre 1,00 y 9,99, cuyos cuadrados se localizan directamente en la tabla.

Recuerda que:

> Como en la tabla de cuadrados aparecen solo los cuadrados de los números comprendidos entre 1,00 y 9,99; si el número cuyo cuadrado quieres calcular es mayor que 10 o está entre 0 y 1, es conveniente escribirlo en notación científica.
>
> Al escribir el número dado en notación científica, uno de los factores es un número (entre 1 y 10), cuyo cuadrado está comprendido en la tabla y aplicamos las propiedades de las potencias a la potencia de 10.

En estos casos puedes hacer previamente un estimado mental de la respuesta para tener una idea aproximada de esta; si lo deseas, lo puedes escribir.

Ejemplo 4:

Con el objetivo de confeccionar una piñata, se quiere forrar una caja en forma de cubo, cuya arista mide 25,5 cm. ¿Cuántos cm^2 de papel harán falta?

Puesto que el cubo tiene seis caras que son cuadrados iguales, basta hallar el área de una de ellas y multiplicar por 6 el resultado para hallar la respuesta a la pregunta. El área de un cuadrado es igual a la longitud del lado al cuadrado, por tanto, hay que hallar $(25{,}5)^2$. En la mente: $25^2 = 625$

Como el cuadrado de 25,5 no aparece contenido en la tabla, transformamos 25,5 en $2{,}55 \cdot 10$

$(25{,}5)^2 = (2{,}55 \cdot 10)^2$
$= (2{,}55)^2 \cdot 10^2$
$\approx 6{,}503 \cdot 10^2$ (buscando en la tabla)

$\approx 650{,}3$
$650{,}3 \cdot 6 = 3\,901{,}8$

Respuesta:

Hacen falta $3{,}90 \cdot 10^3$ cm^2 de papel aproximadamente.[69]

En este caso, como el dato también es un número aproximado (procede de una medición), la respuesta se da con la misma cantidad de cifras que tiene el dato.

En los ejercicios con texto y problemas donde aparezcan cantidades de magnitud se realizarán los cálculos intermedios sin tener en cuenta la unidad correspondiente, pero en la respuesta sí debe considerarse.

[69] Aunque en este grado puedes utilizar respuestas como 3 901,8, debes saber que solo las tres primeras cifras de este número pueden ser correctas pues se partió de un dato aproximado a tres cifras.

Recuerda que:

Es posible hallar el cuadrado de cualquier número racional y este siempre es un número racional.

Ejercicios

1. Calcula los cuadrados de los números siguientes. Utiliza la tabla de cuadrados.

   a) 256 b) 467,2 c) 7 300 d) – 0,67 e) 0,035

2. Halla el valor que se indica en cada caso: Utiliza la tabla de cuadrados.

   a) $(28{,}7)^2$ b) $(72{,}84)^2$ c) $4{,}7^5 : 4{,}7^3$ d) $9{,}86^7 \cdot 9{,}86^{-5}$ e) $\left((-3{,}286)^2\right)^2$

3. La expresión $5a^2$ permite hallar el volumen de todos los ortoedros cuya base es un cuadrado cuyo lado tiene una longitud de a unidades y la altura es de 5u. Halla el volumen si: a) $a = 0{,}34$u, b) $a = 0{,}056$u y c) $a = 789$u.

Cálculo de la raíz cuadrada utilizando la tabla

Es conocido por ti que $5^2 = 25$ y $(-5)^2 = 25$; también $7^2 = 49$ y $(-7)^2 = 49$.

En los casos anteriores decimos que 5 y – 5 son *raíces cuadradas* de 25, así como 7 y – 7 son *raíces cuadradas* de 49.

Ejemplo 1:

Determina las raíces cuadradas de:

a) 16 b) 0,81 c) $\frac{1}{4}$

Solución:

a) Las raíces cuadradas de 16 son 4 y – 4, porque $4^2 = 16$ y $(-4)^2 = 16$.

b) Las raíces cuadradas de 0,81 son 0,9 y – 0,9, porque $(0{,}9)^2 = 0{,}81$ y $(-0{,}9)^2 = 0{,}81$.

c) Las raíces cuadradas de $\frac{1}{4}$ son $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$, porque $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ y $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Recuerda que:

La raíz cuadrada de un número racional *a*, es un número cuyo cuadrado es *a*.

A la raíz cuadrada *no negativa* de un número se le llama *raíz cuadrada aritmética*. En este libro trabajaremos solamente las raíces aritméticas y las llamaremos simplemente "raíces cuadradas".

La extracción de la raíz cuadrada aritmética es la operación inversa de la elevación al cuadrado.

La raíz cuadrada de un número a se denota por el símbolo $\sqrt{a}$.

El símbolo $\sqrt{}$ se denomina radical.

El número a se llama cantidad subradical o radicando y es el número al cual se le calcula la raíz cuadrada. El índice es 2 pero no se escribe.

En general se cumple que todo número racional (no negativo) posee exactamente una raíz cuadrada aritmética.

Ejemplo 2:

Calcula, en cada caso, la raíz cuadrada de los números siguientes:

a) $\frac{1}{9}$ b) 1 000   c) 10 000

Solución:

a) $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ porque $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

b) $\sqrt{1\,000}$ No existe ningún número natural, ni fraccionario cuyo cuadrado sea exactamente 1 000

c) $\sqrt{10\,000} = 100$ porque $100^2 = 10\,000$

En el ejemplo anterior puedes observar que 100 y 10 000, es decir, 10^2 y 10^4 tienen raíz cuadrada exacta y que, además, esta raíz es una potencia de 10. Sin embargo, 1 000, es decir 10^3, no tiene una potencia de 10 como raíz cuadrada.

Recuerda que:

- Las potencias de 10 con exponente divisible por 2 (es decir, par) tienen como raíz cuadrada otra potencia de 10 cuyo exponente es la mitad del de la potencia original.
- Las potencias de 10 con exponente impar no tienen como raíz cuadrada a una potencia de 10.

Como la extracción de la raíz cuadrada es la operación inversa de la elevación al cuadrado, se puede utilizar la tabla de cuadrados para calcular la raíz cuadrada. Como verás más adelante, podrás calcular $\sqrt{1\,000}$ y otras más usando la tabla.

En la tabla pueden localizarse raíces cuadradas cuando el radicando sea un número comprendido entre 1 y 99,80 (son los cuadrados que están en la tabla). Si el radicando tiene más de cuatro cifras, debe redondearse.

Puesto que la mayoría de los cuadrados que aparecen en la tabla son valores aproximados, la mayoría de las raíces también lo son.

En caso de que el radicando sea un valor comprendido entre 1 y 99,80; pero no aparezca directamente en la tabla, se localiza otro número que esté lo más próximo posible al buscado (ya sea menor o mayor que este).

En los ejemplos siguientes se ilustra el procedimiento de extracción de la raíz cuadrada utilizando la tabla.

Ejemplo 3:

Calcula utilizando la tabla, como se ilustra en el fragmento de la tabla 1.18:

a) El área de un cuadrado es 18,7 cm^2 y se desea hallar su perímetro. ¿Cómo proceder?

Solución:

Se necesita hallar la longitud del lado del cuadrado, como se tiene el área, podemos hallar la raíz cuadrada y después multiplicar por 4 ese valor para hallar el perímetro.

$\sqrt{18{,}7}$, el radicando 18,7 no aparece en la tabla, localizamos entonces el número más próximo a él, que es 18,66.

Luego debemos determinar: $\sqrt{18{,}66}$.

Localizamos en el cuerpo de la tabla el número 18,66.

Tabla 1.18

x	**0**	**1**	**5**
1,0	1,000	1,020	1,240
1,1	1,210	1,232	1,254
1,2	1,440	1,464	1,488
1,3	1,690	1,716	1,742
•	•	•	•
•	•	•	•
•	•	•	•
$\boxed{4{,}3}$	10,43	10,58	$\boxed{18{,}66}$

A partir de él, determinamos respectivamente, el encabezado de la fila, en este caso 4,3 y de la columna, en este caso 2, donde localizamos este número.

$\sqrt{18{,}66} = 4{,}32$ Con ambos encabezados formamos la raíz cuadrada de este número.

El perímetro buscado es 4,32 · 4 = 17,28 cm.

Respuesta: El perímetro del cuadrado es 17,3 cm.

Para la extracción de la raíz cuadrada, también se cumple que si el radicando es un número aproximado, la raíz cuadrada se debe dar con la misma cantidad de cifras que tenga el radicando.

Si el número al que deseas extraer su raíz cuadrada no aparece en la tabla, porque no es un valor comprendido entre 1 y 99,80; debes proceder de modo que lo puedas transformar en uno, que sí aparezca directamente en la tabla y después, procedes como en el ejemplo anterior; veamos cómo a continuación.

Ejemplo 4:

Calcula utilizando la tabla de cuadrados:

a) $\sqrt{497{,}3}$ b) $\sqrt{0{,}346}$

Solución:

a) $\sqrt{497{,}3}$. Como 497,3 no aparece en la tabla, lo transformamos convenientemente $4{,}973 \cdot 10^2$.

Luego: $\sqrt{497{,}3} \approx \sqrt{4{,}973 \,.\, 10^2}$.

$\approx \sqrt{4{,}973} \cdot 10$ (porque $\sqrt{10^2} = \sqrt{100} = 10$)

$\approx 2{,}23 \cdot 10$ (buscando en la tabla)

Respuesta: $\sqrt{497{,}3} \approx 22{,}3$

b) $\sqrt{0{,}346}$. Primeramente transformamos el radicando 0,346 de forma conveniente $0{,}346 \approx 34{,}6 \cdot 10^{-2}$ (observa que el exponente de la potencia es divisible por 2).

Luego: $\sqrt{0{,}346} \approx \sqrt{34{,}6 \,.\, 10^{-2}} \approx \sqrt{34{,}6} \,.\, 10^{-1} \approx 5{,}88 \cdot 10^{-1}$ (buscando en la tabla).

(porque $\sqrt{10^{-2}} = 10^{-1}$ pues $\left(10^{-1}\right)^2 = 10^{-2}$

Respuesta: $\sqrt{0{,}346} \approx 0{,}588$

Recuerda el procedimiento para la extracción de la raíz cuadrada de un número:

1. Se localiza el número (radicando) o el número más cercano en el cuerpo de la tabla de cuadrados.
2. Se toman las cifras que encabezan la fila y la columna, respectivamente donde se encuentre el radicando; estas tres cifras serán las que conformen la raíz cuadrada aproximada del número dado.
3. Si el radicando es un número mayor que 100 o está entre 0 y 1, es conveniente escribir dicho radicando como el producto de un número de los que aparecen en la tabla (entre 1 y 100) por una potencia de 10 que tenga raíz cuadrada exacta, es decir, cuyo exponente sea divisible por 2.

Es importante que conozcas que la raíz cuadrada de un número racional, no siempre es un número racional, en octavo grado aprenderás por qué.

En el conjunto de los números racionales, solo las cantidades no negativas tienen raíz cuadrada, aunque esta no siempre es un número racional.

Ejercicios

4. Calcula la raíz cuadrada de los números racionales siguientes:

   a) 64 b) 225 c) $\frac{16}{25}$ d) 10^{-2}

5. Determina, en cada caso, la raíz cuadrada de los siguientes números con ayuda de la tabla de los cuadrados:

   a) 5,760 b) 89,68 c) 8
   d) 912,5 e) 1 875 f) 0,087

6. Alexis conoció de una fórmula para hallar, en un triángulo (fig. 1.69), la longitud del lado que se opone a un ángulo de 60°, dados las longitudes de los otros dos. Ayúdalo a hallar la longitud de $\overline{BC}$ en el ΔABC si: $\overline{AB} = 4{,}06$ cm y $\overline{AC} = 6{,}85$ cm y $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AC}$

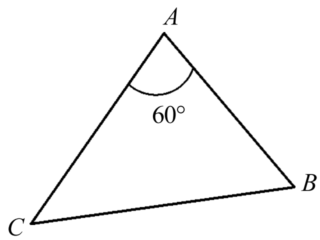


Figura 1.69

1.4.9 Cálculo de cubos y raíces cúbicas utilizando tablas

Las potencias de exponente 3 reciben el nombre de cubos. En la tabla 1.19 siguiente se representan los cubos de los números naturales del 1 al 10.

Tabla 1.19

1^3	2^3	3^3	4^3	5^3	6^3	7^3	8^3	9^3	10^3
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1 000

Observa que: $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ $\qquad 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$

Los cubos de los números naturales reciben el nombre de cubos perfectos.

Ejemplo 1:

1; 6; 27; 64 y 125 son cubos perfectos.

Recuerda que:

La operación mediante la cual, dado un número cualquiera, determinamos su cubo, se denomina *elevación al cubo.*

Ejemplo 2:

Calcula los cubos siguientes:

a) 3^3 b) $(-2)^3$ c) $(0{,}5)^3$ d) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3$

Solución:

a) $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ b) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

c) $(0{,}5)^3 = (0{,}5) \cdot (0{,}5) \cdot (0{,}5) = 0{,}125$ d) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{64}$

Como habrás podido observar, el cubo de un número racional cualquiera está determinado de manera única. Si el número es positivo, su cubo será positivo; y si el número es negativo, su cubo también será negativo.

Para calcular cubos de números racionales, resulta útil en muchos casos el empleo de la tabla de cubos que aparece al final del libro. En esta tabla pueden leerse los cubos de los números del 1,00 al 99,9 al igual que en la tabla de cuadrados. La mayor parte de estos cubos son valores aproximados.

Ejemplo 3:

Determina el volumen de un cubo cuya arista mide 7,43 cm utilizando la tabla de cubos.

Solución:

Buscamos en la tabla: fila 7,4; columna 3

Respuesta: $(7{,}43)^3 \approx 410{,}2$

El volumen del cubo es 410 cm^3.

Recuerda que:

> En el cálculo de cubos utilizando la tabla, también se cumple que si el dato con que se trabaja es un número aproximado, el resultado se da con tantas cifras como tenga dicho dato.

Debes saber, además, que si el número con que se trabaja es mayor que 10 o está entre 0 y 1 se procede igual que en el caso de los cuadrados, escribiendo dicho número en notación científica.

Calcula utilizando la tabla de cubos: a) $(0{,}48)^3$

$$\begin{aligned}(0{,}48)^3 &= (4{,}8 \cdot 10^{-1})^3 \\ &= (4{,}8)^3 \cdot (10^{-1})^3 \quad &\text{(propiedad de las potencias)} \\ &\approx 110{,}6 \cdot 10^{-3} \quad &\text{(buscando en la tabla)}\end{aligned}$$

Respuesta: $(0{,}48)^3 \approx 0{,}1106 \approx 0{,}11$

Recuerda que:

> - Es posible hallar el cubo de cualquier número racional y este siempre es un número racional.

Ejercicios

1. Calcula los cubos de los números siguientes:

   a) 7 b) 30 c) $-\frac{1}{4}$ d) $13{,}52^3 : 6{,}76^3$

2. Calcula, utilizando la tabla, los cubos de los números siguientes:

a) 3,45 b) 7,2 c) – 8,234 d) 20,3

e) – 231 f) 18,41 g) 0,15 h) 9,876

Extracción de la raíz cúbica utilizando la tabla

¡! Felipe cursa el séptimo grado, y conoce muy bien todo lo estudiado sobre números racionales, por eso considera que ya sabe resolver un ejercicio como este: *Determina qué valor de x satisface la igualdad:* $x^3 + 15x = 124$. Fue probando y llegó a la conclusión de que $x = 4$. ¡Compruébalo tú mismo(a)! Sin embargo, en la página web *Pura Matemática* encontró que un matemático italiano[70] halló una fórmula para darle solución a problemas como este, pues si $x^3 + px = q$, $p > 0$, $q > 0$, entonces el valor de x que satisface la ecuación es:

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Al intentar aplicarla obtuvo lo siguiente: $5+\sqrt[3]{-1}$ y ahí surgió su duda, ya que nunca había hallado la raíz cúbica de un número negativo. Preguntas se hizo muchas, todas las puede responder al estudiar el concepto raíz cúbica de un número racional.

Ya sabes que $3^3 = 27$, $5^3 = 125$; etcétera.

En los casos anteriores decimos que:

3 es la *raíz cúbica* de 27 y que 5 es la *raíz cúbica* de 125.

Recuerda que:

La operación de cálculo que consiste en determinar un número, dado su cubo, se denomina *extracción de la raíz cúbica.*

Ejemplo 1:

Determina la raíz cúbica de los números

a) 8 b) – 1

Respuesta

a) La raíz cúbica de 8 es 2, porque $2^3 = 8$

[70] Niccolò Fontana Tartaglia, (1499-1557). Uno de los principales matemáticos del siglo XVI. Se destaca en el álgebra, principalmente en la creación de métodos para resolver ecuaciones.

b) La raíz cúbica de – 1 es – 1, porque $(-1)^3 = -1$.

Aquí aclaramos parte de la duda de Felipe, aunque ya puede comprobar que el resultado también es $x = 4$.

La extracción de la raíz cúbica es la operación inversa de la elevación del cubo.

Del ejemplo anterior podemos concluir que la raíz cúbica de un número racional cualquiera *está determinada de manera única,* es decir, todo número racional posee exactamente una raíz cúbica. En este caso, la única raíz es la raíz aritmética del número.

La raíz cúbica x de un número dado a se denota $\sqrt[3]{a} = x$

El símbolo $\sqrt[3]{\ }$ es el signo de raíz cúbica y el número a se llama radicando y el índice es el número 3.

Ejemplo 2:

Calcula:

a) $\sqrt[3]{216}$ b) $\sqrt[3]{-8}$ c) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$

Solución:

a) $\sqrt[3]{216} = 6$ porque $6^3 = 216$ b) $\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2)^3 = -8$

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$ porque $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

Al igual que en el caso de las raíces cuadradas, existen raíces cúbicas que no son números racionales; en octavo grado aprenderás por qué.

Puesto que la extracción de la raíz cúbica es la operación inversa de la elevación al cubo, podemos utilizar la tabla de cubos para calcular raíces cúbicas.

En la tabla de cubos pueden localizarse raíces cúbicas cuando el radicando sea un número comprendido entre 1 y 1 000 (son los cubos de los números que están en la tabla).

Si el radicando no aparece directamente en la tabla, y está entre 1 y 1 000, se localiza el número que esté lo más próximo posible al buscado.

El procedimiento a seguir para calcular raíces cúbicas, utilizando la tabla de cubos, es muy similar al que se sigue para calcular raíces cuadradas.

Ejemplo 3:

Para determinar la ventaja de los levantadores de pesas, se emplea la fórmula de O´ Carrol. Si un levantador que tiene una masa de b kg, levanta w kg de pesas, entonces el peso de ventaja W, está expresado por: $W = \frac{w}{\sqrt[3]{b-35}}$ [71]. Halla la ventaja de un pesista de 120 kg, que levanta 250 kg.

Solución:

a) Al sustituir en la fórmula se tiene que $W = \frac{250}{\sqrt[3]{120-35}}$, por tanto hay que hallar la raíz cúbica de 85, al utilizar la tabla de cubos.

$\sqrt[3]{85}$ — Buscamos en la tabla el número más próximo al radicando, que es en este caso 85,01. El número 85,01 se encuentra en la fila 9,2 y en la columna 2.

Luego: $\sqrt[3]{85} \approx 9{,}22$

Respuesta: la ventaja de este levantador de pesas es 27,1 kg.

b) Si tuviésemos que hallar la raíz cúbica de 841,2, tenemos que:

$\sqrt[3]{841{,}2}$ — En la tabla se localiza directamente el número 841,2 (fila 9,4; columna: 4)

Respuesta: $\sqrt[3]{841{,}2} \approx 9{,}44$

Si el radicando es mayor que 1 000 o está entre 0 y 1, se escribe como el producto de un número (de los comprendidos en la tabla) por una potencia de 10 que tenga raíz cúbica exacta, es decir, cuyo exponente sea divisible por 3.

Ejemplo 4:

Calcula utilizando la tabla de cubos:

a) $\sqrt[3]{9\,664}$ b) $\sqrt[3]{0{,}35}$

Solución:

a) $\sqrt[3]{9\,664} = \sqrt[3]{9{,}664 \cdot 10^3} = \sqrt[3]{9{,}664} \cdot 10$ (porque $\sqrt[3]{10^3} = 10$)

$\approx 2{,}13 \cdot 10$ (buscando en la tabla)

Respuesta: $\sqrt[3]{9\,664} \approx 21{,}3$

[71] Joaquín Palacio Peña: *Colección de problemas matemáticos para la vida,* 2003.

b) Transformamos convenientemente 0,35 en; $350 \cdot 10^{-3}$

$\sqrt[3]{0{,}35} = \sqrt[3]{350 \cdot 10^{-3}} = \sqrt[3]{350} \cdot 10^{-1}$ (porque $(10^{-1})^3 = 10^{-3}$)

$\approx 7{,}05 \cdot 10^{-1}$ (buscando en tabla)

Respuesta: $\sqrt[3]{0{,}35} \approx 0{,}705$

Recuerda que:

En el conjunto de los números racionales, todos los números racionales tienen raíz cúbica, este valor es único, aunque no siempre es un número racional. Por eso nos auxiliamos de la tabla para encontrar un valor aproximado.

Ejercicios

3. Calcula la raíz cúbica de los números racionales siguientes:

a) – 64 b) 729 c) $-\dfrac{27}{125}$ d) 10^{-18}

4. Determina en cada caso, la raíz cúbica de los números siguientes con ayuda de la tabla de cubos:

a) 2,460	b) – 10,36	c) 9	d) – 427,5
e) 7 879	f) 0,698	g) 23 400	h) 0,32

5. El artista ruso Anatoly Konenko creó el acuario más pequeño del mundo (fig. 1.70). Como especialista en la construcción de réplicas a menor escala, Konenko hizo un tanque de 30 mm de longitud, 14 mm de ancho y 24 mm de altura.[72] Halla la arista de un cubo, cuyo volumen coincide con el de la pequeñísima pecera.

Figura 1.70

6.* Halla el valor de *x* si: $\sqrt[3]{27^x} = 729$

En la actualidad existen modernísimos medios de cálculo que nos permiten hallar el cuadrado y el cubo de un número racional, así como las raíces cuadradas si es posible

[72] *Google,* 16 de abril de 2012 y órgano de prensa *Juventud Rebelde,* 25 de septiembre de 2011.

y la raíz cúbica de un número racional, sin embargo con el auxilio de las tablas de cuadrados y de cubos y tus conocimientos de aritmética, puedes hallar estos valores (aunque en ocasiones aproximados).

1.4.10 Operaciones combinadas con las cuatro operaciones de cálculo

¡! Amaury está muy contento con todo lo estudiado sobre los números racionales, su excelente profesora Pilar le ha propuesto este ejercicio como parte de una Tarea Integradora que debe entregar al finalizar la Unidad 1.

Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas (V) o falsas (F). Escribe V o F en la línea dada. Justifica en cada caso tu respuesta.

a) ___ El 50 % de 12^{20} es 6^{20}.

b) ___ La tercera parte de 9^{30} es 3^{59}.

c) ___ El cuadrado de la suma de dos números racionales es igual a la suma de los cuadrados de dichos números.

d) ___ La raíz cúbica de la diferencia de dos números racionales coincide con la diferencia de las raíces cúbicas.

e) ___ $\sqrt{a \cdot 10^{2n}} = \sqrt{a} \cdot 10^{n}$ a es un número racional, $a \geq 0$.

f) ___ $(a - b)^3 = a^3 - b^3$ a y b son números racionales.

Amaury ya pudo determinar el valor de verdad de algunas de las proposiciones, sin embargo algunas guardan estrecha relación con el orden operacional a seguir en un ejercicio de operaciones combinadas en el que aparezcan todas las operaciones de cálculo estudiadas.

Al resolver operaciones combinadas debes de seguir el orden operacional siguiente:

- Primero se resuelven las operaciones encerradas en los signos de agrupación (paréntesis, corchetes y llaves).
- Segundo se calculan las potencias y raíces en el orden en que aparecen.
- Tercero se realizan las multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparecen.
- Cuarto se realizan las sumas algebraicas que resultan al final.

También deberás tener en cuenta lo siguiente:

– Si en una cantidad subradical aparece un ejercicio de operaciones combinadas, se resuelve este y después se halla la raíz que se indica.
– Si en la base y/o exponente de una potencia aparece un ejercicio de operaciones combinadas, se resuelve y se efectúa la potencia que corresponda.

3SB019 Cap 1 Okk.pmd 165 31/10/2013, 19:06

– Si en el numerador y/o denominador de una fracción aparece un ejercicio de operaciones combinadas, se resuelve este y después se efectúa la división que se indique.
– Si en la resolución del ejercicio de operaciones combinadas es factible utilizar las tablas de cuadrados y/o cubos y se permite su uso, seguirás las mismas reglas del cálculo aproximado que utilizabas en el conjunto de los números fraccionarios.

Ejemplo 1:

Resuelve: $5 \cdot 3^2 + \sqrt[3]{-729} : 0,15$
$= 5 \cdot 9 + (-9) : 0,15$ Al calcular las potencias y raíces en el orden en que aparecen.

En este caso se pueden hacer en un mismo paso la potencia que se indica, así como, la extracción de la raíz cúbica.

$= 45 + (-60)$ Al realizar las multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparecen.
$= -15$ Al realizar la suma algebraica que resultó al final.

Ejercicios

1. Sustituye en cada caso las variables por los números que se indican y calcula utilizando las tablas de cuadrados y de cubos:

a) $A^2 + \sqrt{B} : 3$ $A = 4,8$; $B = 66,1$

b) $\sqrt{C} - D^3$ $C = 83,56$; $D = 2,36$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{M^2 - N^2}}{5}$ $M = 13,7$; $N = 8,65$

2. Calcula el valor de cada variable:

$A = (-2)^3 + (-2)^{93} : (-2)^{91}$ $D = \sqrt[3]{-9 + (-0,125)^2 \cdot (8)^2}$

$B = -6,7 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{111} \cdot (0,5)^{-109}$ $E = \sqrt{15 + 3,43^2 : 0,49^2}$

$C = \left((-48,1)^0 - 2^3\right)^2$ $F = \left(4^3\right)^4 : \left(4^2\right)^6 - 9,39$

2.1 Selecciona la respuesta correcta marcando con una X en la línea dada. Argumenta.

a) ___ $\{B; C\} \subset \mathbb{Z}$ b) ___ $\{B\} \subset \mathbb{Z}$ c) ___ $F < B$ d) ___ $A \cdot D \neq E$

2.2 Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera para cada caso.

a) Los números enteros que están entre el valor de B y el de F son: ____________________

b) En la recta numérica la distancia del número cero a A es: _____.

c) El valor de A y el de E son múltiplos de: ____.

3. Al copiar una fórmula, Julián se equivocó y en vez de $\sqrt{\dfrac{\frac{a}{2}-b}{c}}$ copió: $\dfrac{\sqrt{\frac{a}{2}-b}}{c}$

   Al hallar el valor numérico para $a = 394$, $b = 1$ y $c = 4$. ¿En cuántas unidades se alteró el resultado?

4. Responde el ejercicio que la profesora Pilar propuso a Amaury.

ALGO INTERESANTE

Finalizamos el capítulo con esta pincelada histórica, que como podrás apreciar es un antiquísimo resumen de las propiedades de las operaciones de cálculo con números racionales.

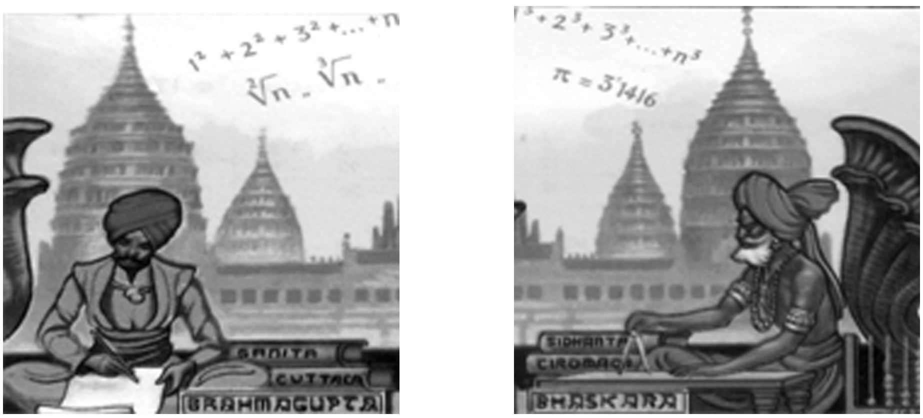


Figura 1.71

Brahmagupta (598-660 d.n.e.) fue pionero en ofrecer las reglas para el empleo de los números negativos y emplea también el cero como símbolo operatorio brindando las reglas para este como sumando, sustraendo, factor, radicando y base de potencias.[73] *Aclara que los números pueden tratarse o como pertenen-*

[73] Luis J. Davidson San Juan: *Ecuaciones y Matemáticos*, 2008.

cias o como deudas, pero, introduciendo los números negativos, los matemáticos hindúes no los utilizaban como elementos equitativos de la Matemática, considerándolos sólo como algo del género de las posibilidades lógicas, ya que, según expresión de Bhaskara (1114-1185), otro gran matemático hindú, las personas no están de acuerdo con ellos.
Las reglas de operaciones con los números, entonces, son las siguientes:

- *La suma de dos pertenencias es una pertenencia.*
- *De dos deudas, una deuda.*
- *De una pertenencia y una deuda, su diferencia, y si son iguales, es cero.*
- *La suma del cero y una deuda es una deuda.*
- *De una pertenencia y el cero, una pertenencia.*
- *El producto de dos pertenencias o dos deudas es una pertenencia.*
- *El resultado del producto de una pertenencia por una deuda representa una pérdida. Esta misma regla es válida también en la división.*
- *El cuadrado de una pertenencia o deuda es una pertenencia.*
- *La pertenencia tiene dos raíces: una constituye una ganancia y la otra una deuda.*
- *La raíz de una pérdida no existe, ya que tal no puede ser un cuadrado.*

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO

1. La media del precio en CUP de cuatro productos es 50,40 y la media de otros seis productos diferentes, es 40,30.

   a) ¿Cuánto suma el precio de los cuatro primeros productos y cuánto el de los otros seis?
   b) Calcula el precio medio del total de productos. Fundamenta, el porqué lo hiciste de ese modo y no de otro.

2. La masa en kilogramos de 9 niños es:

   14,8; 21,1; 15,5; 18,2; 20,0; 17,1; 19,9; 16,4; 19,0

   a) ¿Cuál es la moda? ¿Por qué?
   b) Si incluimos la masa de otro niño que es de 49,8 kg, sería la media aritmética un buen representante de la masa de los 10 niños.

3. En una secundaria básica se aplicó una encuesta en un grupo de estudiantes escogidos al azar para conocer su preferencia por los programas de televisión: deportivos (D), musicales (M), infantiles (I), culturales (C) y noticiero (N). Para lo cual se registraron los datos siguientes:

   M M M D D I N N I M C C D N I I M D M D
   D C M C C M D D I I

a) Construye una tabla de frecuencias absoluta y relativa.
b) ¿Qué porcentaje de estudiantes tienen preferencia por los programas culturales?
c) ¿Cuál es el programa de menor preferencia?
d) Determina la moda.
e) ¿Es posible calcular la media aritmética? Si es posible, calcúlala y si no es posible, fundamenta el porqué.
f) Según tu opinión, di qué tipo de gráfica es más representativa para ilustrar los resultados de la encuesta.
g) Investiga en tu grupo con tus compañeros sus preferencias por los programas televisivos y compara los resultados con los del estudio realizado. Indaga en las causas que originan el programa de menor preferencia.

4. A continuación aparecen representados una tabla y un gráfico (fig. 1.72), que expresan los datos (en milímetros) de la cantidad de agua caída (como promedio), en una ciudad del Caribe durante los doce meses de un año.

Ene.	101
Feb.	43
Mar.	41
Abr.	20
May.	22
Jun.	193
Jul.	130
Ago.	264
Sep.	220
Oct.	270
Nov.	225
Dic.	14

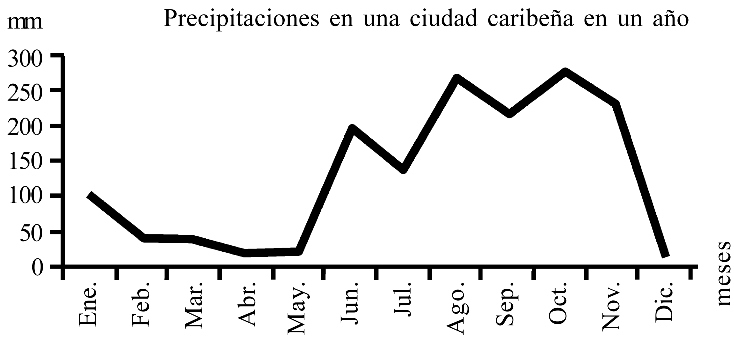


Figura 1.72

Analiza la tabla y el gráfico que la acompaña en la figura 1.72.
Emite tu criterio sobre el comportamiento de las precipitaciones durante el año que se muestra.
¿Qué información te resultó más provechosa?

5.* Al calcular la media aritmética de un conjunto de valores, un estudiante planteó para el cálculo la siguiente operación combinada: $\dfrac{-3 \cdot 3 + 5 \cdot (-4)}{8}$.

Escribe el conjunto de datos y halla su moda.

6. Deborah Andollo (1967-) es una deportista cubana especializada en la natación e instructora de buceo. Es la única mujer en el mundo capaz de bajar a cuerpo libre a profundidades cercanas a los – 74 m (con respecto al nivel del mar), gracias a su gran <u>capacidad pulmonar</u> (6 L) y a su tenacidad.

Aquí algunos de sus excelentes marcas en la modalidad de cuerpo libre:[74]

Maravillas de la novia de Neptuno

Profundidad alcanzada (m)	Fecha	Cuba
– 50	mayo de 1992	Varadero
– 52	mayo de 1993	Varadero
– 60	noviembre de 1995	Isla de la Juventud
Récord Mundial Absoluto		
– 74	julio de 2001	Isla de la Juventud

a) ¿Podremos afirmar que a medida que ha pasado el tiempo han sido mejores las marcas? ¿Por qué?
b) ¿Qué gráfico estadístico utilizarías para ilustrar esta información? Hazlo.

7. Sean:

$$A=\frac{\sqrt{64{,}96}-9}{2} \qquad B=10^3\cdot\frac{0{,}34^{25}\cdot 0{,}34^{27}}{0{,}34^{50}}+4 \qquad C=-6{,}25+\sqrt[3]{2\,197}:4 \qquad D=\frac{9}{40}$$

a) Halla los valores de *A, B* y *C*.
b) El conjunto formado por *B* y *D*, ¿es un subconjunto del conjunto de los números enteros? ¿Por qué?
c) *C*, ¿es el menor de los valores hallados? Justifica tu respuesta.
d) Escribe en notación tabular un conjunto *F* formado por los opuestos de los valores de *B* y *D*.
e) ¿Cuántos números racionales hay entre el mayor y el menor número? ¿Cuál es la diferencia entre esas cantidades?

8. En su página deportiva, el semanario *Orbe* del 24 al 30 de marzo de 2012 dio a conocer que el pibe argentino Lionel Messi, del FC Barcelona, es el mejor futbolista pues con solo 24 años, suma 234 goles con el FC Barcelona. El desglose de esa cantidad de goles es así: 153 en la Liga Española, 19 en Copa del Rey, 49 en la Liga de Campeones de Europa, 8 en Supercopa de España, 4 en Mundiales de Clubes, y 1 en Supercopa de Europa. ¿Seguirán siendo estos sus logros?
Mónica, monitora de Matemática aprovechó esta información para motivar a sus compañeros para la realización de ejercicios de operaciones combinadas, este fue el ejercicio que propuso:

[74] *Wikipedia,* 23 de marzo de 2012.

¡CALCULA Y CONFIRMA!

¡Lo que ha hecho el mejor!

Evento	Número de goles
Liga Española	$5^3 - 112 : \left(-3{,}76 + 0{,}12 \cdot (-2)\right)$
Copa del Rey	$\sqrt[3]{-27} + (-5)^2 + 8\frac{4}{7}\left(\frac{7}{15} - \frac{9}{20} - \frac{11}{30}\right)$
Liga de Campeones de Europa	$\sqrt{1\,024} + 0{,}85 : \sqrt[3]{0{,}000\,125}$
Supercopa de España	$\sqrt{81} - 10 \cdot \sqrt{0{,}01}$
Mundiales de Clubes	$-\left(\frac{4}{21}\right)^{-1} : \left(\frac{-7}{16}\right) - 2^3$
Supercopa de Europa	$-0{,}15 \cdot 5^2 + 5\sqrt{5^{-2}} + 3{,}75$

a) Analiza si cumple los dos propósitos que persigue.
b) Elabora un ejercicio como este con récords del béisbol cubano.

9. Expresa el número 1 en un ejercicio matemático en el que aparezcan todos los números naturales del 0 al 9 una sola vez. Hazlo de cinco maneras diferentes.

10. Imagina que eres el encargado de crear un anuncio de oferta de rebaja de un producto, ¿te auxiliarías de un número negativo? ¿Por qué?

11. El ejercicio que a continuación te proponemos tiene que ver con tu edad en el momento que lo realices, veamos por qué:

Problemas	Condición
1. Este es el titular de una noticia del órgano de prensa *Granma* del 30 de junio de 2011. Costo de EE.UU. en guerras alcanzará los 3,7 millones de millones de dólares. a) Expresa en notación decimal y exponencial la cifra a la que se hace referencia. b) Investiga con tu médico de familia, el precio de un litro de sales de rehidratación oral y determina cuántos litros pudieran adquirirse con lo que se destinó a conflictos bélicos en EE.UU.	Si tienes 11 años.

2. Alrededor de 6 600 000 000 de dólares destinados por la Casa Blanca a fondos para la reconstrucción de Iraq, no se sabe hoy a dónde fueron a parar. Se considera, que la "pérdida" es el mayor robo de fondos de la historia de Estados Unidos de América.
   Para más información consulta el órgano de prensa *Granma* del 14 de junio de 2011.

   Si tienes 12 años.

   a) Expresa en notación científica la cantidad que aparece en negrita.
   b) Indaga sobre el gasto de la construcción de un edificio y calcula qué cantidad pudieron construirse con ese fondo.

3. Israel pedirá <u>veinte mil millones</u> de dólares adicionales a E.U.A. para ayuda militar y el presidente estadounidense Barak Obama, indicó que podría resultar sensato para Washington invertir dicha cantidad para mejorar la seguridad de Israel para la próxima generación.

   Si tienes 13 años o más.

   a) Escribe en notación decimal y científica la cantidad que aparece subrayada.
   b) Investiga si con esa cifra se pudieran comenzar a resolver problemas medioambientales de nuestro continente.

12.* Esta actividad es una propuesta de los integrantes del círculo de interés matemático pedagógico "Diofanto de Alejandría".[75]
Se basa en dos dados que tienen el desarrollo que se muestra (fig. 1.73):

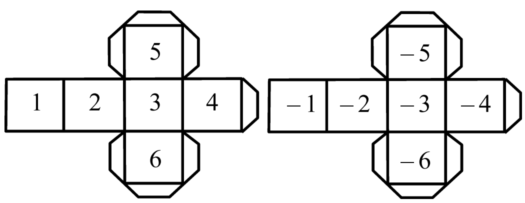


Figura 1.73

Imagina que los lanzas al unísono y que todas las tiradas son diferentes.

[75] Diofanto de Alejandría (325-409), matemático griego, el que por su originalidad y sus aportaciones es considerado el padre de los algebristas modernos, en su notabilísima obra sobresale el inicio del empleo sistemático de símbolos para indicar números negativos.

a) Qué posibilidad hay de que la suma algebraica de las cantidades de las caras visibles sea un número no positivo?
b) ¿Qué porcentaje de las potencias de base negativa, son números negativos?

13. Selecciona una noticia, artículo periodístico u otro tipo de texto relacionado con algunos de los contenidos tratados en la Unidad y elabora y responde un ejercicio matemático, entrega el trabajo realizado a tu profesor(a) con los siguientes datos:

    - Tus nombres, apellidos y número de lista
    - Puntuación alcanzada en la última evaluación de Matemática que hiciste
    - Fuente bibliográfica de adquisición del conocimiento utilizada
    - Lugar en el que la encontraste
    - Actividad humana con la que está más relacionada
    - Motivo por el que te llamó la atención
    - Tema matemático con el que más se vincula

14. Escoge una de las siguientes ideas y confecciona un cartel que ilustre tu mensaje.

    Los números racionales de belleza el mundo visten.
    Vivimos rodeados de números racionales.
    Más que útiles son los números racionales.

PARA LA AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona sobre lo aprendido

1. ¿Qué es un número racional?
2. ¿Qué conjuntos numéricos son subconjuntos del conjunto de los números racionales?
3. ¿Qué operaciones sabes hacer con números racionales?
4. ¿Conoces los pasos a seguir para resolver un ejercicio de operaciones combinadas de números racionales?
5. ¿Sabes confeccionar una tabla de distribución de frecuencias? Explica cómo se construyen
6. ¿Cómo calcular la media aritmética y determinar la moda cuando los datos están agrupados en una tabla de frecuencias?
7. ¿Qué información te aporta y la media aritmética y la moda al hacer el análisis de un conjunto de datos?
8. ¿Por qué es importante dominar el procedimiento general para el procesamiento de datos?

Ponte a prueba

1. Di cuáles de las proposiciones son verdaderas o falsas. En caso de ser falsas justifica por qué lo son:

   a) ___ El número – 5 pertenece al conjunto de los números naturales.

   b) ___ El conjunto formado por los números – 3,2; 0 y 4 está incluido en el conjunto de los números enteros.

c) ___ Toda expresión decimal infinita periódica, representa un número racional.
d) ___ La operación de extracción de raíz cuadrada siempre tiene solución en el conjunto de los números racionales.
e) ___ La intersección del conjunto de los números fraccionarios y el conjunto de los números enteros es el conjunto de los números naturales.
f) ___ El módulo o valor absoluto de todo número racional siempre es un número racional positivo.
g) ___ La frecuencia absoluta de un dato es el número de veces que aparece el dato repetido.
h) ___ La media aritmética en un conjunto de datos siempre es el valor central de ese conjunto.
i) ___ La moda siempre existe en un conjunto de datos.
j) ___ La división de dos números enteros diferentes de cero siempre es un número entero.
k) ___ Una potencia de base negativa y exponente par siempre es un número positivo.

2. Gracias al singular método de alfabetización "Yo, sí puedo" hasta mediados de diciembre de 2011, cinco millones setecientos treinta y seis mil seis personas de 28 países aprendieron a leer y a escribir. Alrededor de un 83 % de ellos son del continente *Las Américas.*

   Desde la 1.ª hasta la 65.ª teleclase que lo conforman, sienten los estudiantes todo el infinito amor que han puesto sus creadores, de ahí que todos dicen sí a la valiosa oportunidad que se les brinda.[76]

   Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera para cada caso:

   La cantidad de personas alfabetizadas es una cantidad __________________, que escrita con números es ______________________ el significado de la fracción que aparece es ________________ e indica que aproximadamente ____ de cada 100 alfabetizados son americanos 1.ª y 65.ª representan ___________.

3. La profesora Salomé para explicar los resultados de su estrategia de formación vocacional hacia los técnicos medios y obreros calificados de la familia agroindustrial, en un grupo de 35 estudiantes desde 7.º a 9.º grado, se auxilió del gráfico siguiente (fig. 1.74). Obsérvalo y responde:

   a) ¿Qué porcentaje de la matrícula prefería estas especialidades en 7.º?, ¿qué parte del grupo en 9.º?

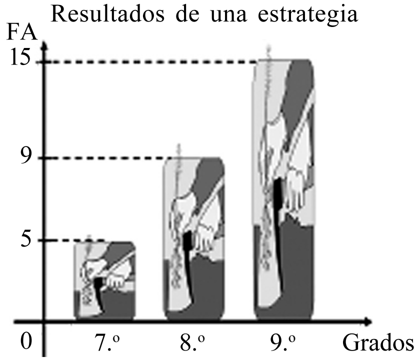


Figura 1.74

[76] Órgano de prensa *Tribuna de La Habana,* 11 de diciembre de 2011.

b) El 80 % de los estudiantes que se decidió a estudiar estas carreras fueron varones, ¿cuántos son?
c) ¿Qué otro tipo de gráfico le recomendarías a la profesora para ilustrar su explicación?
d) ¿Crees que fue efectiva la estrategia? ¿Por qué?

4. Un profesor propone analizar la calidad de las notas obtenidas por 15 de sus estudiantes en Matemática y para ello las registra en la pizarra de la forma siguiente:

10; 6; 5; 9; 9; 9; 6; 6; 9; 7; 9; 6; 10; 5; 7

4.1 Pide a los estudiantes que analicen los datos.

- María dice que el 2 % de la cantidad de estudiantes obtuvo notas de 10.
- Luis dice que la moda es 5.
- José responde que la moda es 9 y que la media está muy próxima a 7,5.
- Beatriz plantea que más de seis estudiantes tienen notas entre 9 y 10 puntos y que el promedio de las notas obtenidas es 8.

¿Cuál de los 4 estudiantes tiene la razón? Marca con una X tu selección.

a) ___ Beatriz   b) ___ María   c) ___ José   d) ___ Luis

4.2 ¿Podrías explicar en qué consistió el error de cada uno de los otros tres estudiantes?

4.3 Si a ti el profesor te solicitara hacer el análisis de las notas. ¿Qué acciones iniciales realizarías?

4.4 Construye una tabla de frecuencias absoluta.

4.5 Si reemplazas dos de las notas de 9 (cada una de ellas) por 8 y una de las notas de 7 por 9. ¿Cuál de las posibles respuestas seleccionarías? Márcala con una X.

a) ____ Se altera la media y la moda.

b) ____ Se altera la media y no la moda.

c) ____ No se altera la media y sí la moda.

d) ____ No se alteran ni la media y ni la moda.

5. Sean:

$X = -1{,}2^2 \cdot 23 + 0{,}81$ $Y = \sqrt[3]{-64} : 2 + 1515 : (-15)$

$W = 35\ \%$ de 40 $T = \dfrac{\left(\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{50}\right)^{8} : (-0{,}5)^{398} + 0{,}75}{(-0{,}2)^{3}}$

a) Halla los valores de *X, Y, W* y *T*.
b) ¿Cuántos números enteros hay entre *T* y *Y*?

c) ¿Cuántos números enteros positivos hay entre *X* y *W?*
d) ¿Cuál es el antecesor de Y*?*
e) ¿Cuál es el sucesor de *T?*
f) Ubica los cuatro valores en la recta numérica y ordénalos de mayor a menor.
g) ¿Cuántas centésimas tiene el opuesto del valor de *X?*
h) ¿Cuál es el valor absoluto de *H* si $H = X + Y - W - T$?
i) ¿Cuáles son las tres quintas partes de *T?*

RESPUESTA DE LOS EJERCICIOS

Epígrafe 1.1

1. Tres horas y nueve minutos: $3\frac{9}{60}$, números fraccionarios

   Nueve días: números naturales

Epígrafe 1.1.1

1. quince días: cardinal, día 15: cardinal,
   decimoquinto cumpleaños: ordinal, 15 parejas: contable,
   15 regalos: contable, 15 personas: contable,
   la número 15: identificación, 15 %: identificación de la fracción porcentaje

2. $$\frac{80\ \text{L}}{x} = \frac{24\ \text{h (un día)}}{30\ \text{días (cerca de un mes)}}$$

   $$x = \frac{80 \cdot 30}{1} \qquad 1\ \text{m}^3 = 1\,000\ \text{l}$$

   $$x = 2\,400\ \text{l}$$

   $$x = 2{,}4\ \text{m}^3$$

3.1 a) V b) V c) V d) V e) V

3.2.1 a) 3.2.2 a)

3.3 fracción medidora,
cantidad de magnitud,
8 848 · 3 = 26 544 m, y es una cantidad de magnitud.

3.4 a) F, catorce árboles <u>no</u> es una cantidad de magnitud.
b) F, solo tres números (25 m, 20 cm y 100 000 l).
c) V.
d) F, ninguno lo permite.

Epígrafe 1.1.2

1. a) Ciento treinta y cuatro millones.
   b) Veintisiete; dos mil tres; cincuenta y cinco millones setecientos setenta y tres mil ciento seis; cinco mil.
   c) Ciento noventa y nueve mil setecientos veintisiete.
   d) Ciento cincuenta.
   e) Dos ciento cincuenta millones.

2. 25 000 000 001

3. a) 91004 b) noventa y un mil cuatro 4. 1 357

5. a) $A = 135$ $B = 4\ 801$ $C = 4\ 999$
   b) 48 027. c) 4 998 d) C e) C f) 4 999 > 4 800 > 135

6.* Del 190 al 199 son 10 los 9 que aparecen en las decenas, lo mismo ocurre de 290 al 299 y así sucesivamente, hasta llegar al del 990 al 999. Por lo que se tienen $10 \cdot 9 = \underline{90}$ números en los que la cifra 9 ocupa el lugar de las decenas.

7. 100 000 000 001 Cien mil millones uno

8.* Después de un buen razonamiento se puede concluir que el único número que satisface todas las condiciones del problema es: 6 210 001 000; tiene diez cifras, tiene seis ceros, dos unos, un dos y un seis, de acuerdo con las condiciones planteadas en el problema. Seis mil doscientos diez millones mil.

Epígrafe 1.1.3

1. a) No b) No c) No
   d) No e) No f) No
   g) No h) No i) No

2. a) 72 b) 35 y 14

3. Para que el número $7\overline{bc}$ sea divisible por 2 y 3 simultáneamente c tiene que ser 0 o un número par, entonces:

   - cuando $c = 0$, b puede tomar el valor 2, 5 y 8,
   - cuando $c = 2$, b puede tomar el valor 0, 3, 6 y 9,
   - cuando $c = 4$, b puede tomar el valor 1, 4 y 7,
   - cuando $c = 6$, b puede tomar el valor 2, 5 y 8,
   - cuando $c = 8$, b puede tomar el valor 0, 3, 6 y 9.

4. a) V b) F, porque también es si sus dos últimas cifras son múltiplo de 4.
   c) F, porque al dividirlo por 11 el resto no es cero.

5. 330; 390 y 420

6.* 999 999 999 948. Novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve millones novecientos noventa y nueve mil novecientos cuarenta y ocho.

Epígrafe 1.1.4

1. a) ciento ochenta y dos millones setecientas y un mil doscientos veinticuatro décimas
   b) setenta y cinco centésimas c) una milésima
   d) ciento treinta y cinco centésimas e) treinta y cuatro centésimas

2. a) setenta y dos décimas $\frac{72}{10}$

   b) cincuenta y cuatro centésimas $\frac{54}{100}$

   c) veintiocho mil cincuenta y cinco milésimas $\frac{28\,055}{1\,000}$

   d) nueve mil ochocientos treinta centésimas $\frac{9\,830}{100}$

   e) Ciento setenta y un mil doscientas milésimas $\frac{171\,200}{1\,000}$

   f) Noventa y tres millones doscientos cincuenta y un mil setecientas cuarenta y seis centésimas $\frac{93\,251\,746}{100}$

3. a) 48,28 b) 0,150 c) 170,5

4. a) 8 910,5 Ochenta y nueve mil ciento cinco décimas
   b) 891,05 Ochenta y nueve mil ciento cinco centésimas
   c) 8,910 5 Ochenta y nueve mil ciento cinco diez milésimas

5. a) 7 b) cuatro millones ochocientos treinta y cinco mil setecientas veinticuatro milésimas c) centésima

6. 999,994

7. a) 0,75 b) 0,125 c) $4,\overline{6}$

Epígrafe 1.1.5

2. a) $\frac{1}{5} = A$ a) $\frac{7}{5} = C$ a) $1\frac{3}{5} = E$

Epígrafe 1.1.6

1. a) 53 083 > 2 525. Cincuenta y tres mil ochenta y tres; dos mil quinientos veinticinco.

   b) 1 437 < 105 430 000. Mil cuatros ciento treinta y siete; ciento cinco millones cuatrocientos treinta mil.

   c) 36 825 003 = 36 825 003. Treinta y seis millones ochocientos veinte y cinco mil tres.

   d) 5,47 < 8,47

   e) 0,143 > 0,0143

   f) $\frac{5}{10} = 0{,}5$; $\frac{1}{2}; \frac{15}{30}; \frac{20}{40}\ldots$ son equivalentes a $\frac{5}{10}$

   g) $\frac{3}{5} < \frac{8}{3}$; $\frac{6}{10}; \frac{9}{15}$ son equivalentes a $\frac{3}{5}$ y $\frac{16}{6}; \frac{24}{9}$ son equivalentes a $\frac{8}{3}$

   h) $\frac{2}{9} < \frac{7}{9}$; $\frac{4}{18}; \frac{6}{27}$ son equivalentes a $\frac{2}{9}$ y $\frac{14}{18}; \frac{21}{27}$ son equivalentes a $\frac{7}{9}$

   i) $\frac{4}{5} > \frac{4}{9}$, $\frac{8}{10}; \frac{12}{15}$ son equivalentes a $\frac{4}{5}$ y $\frac{8}{18}; \frac{12}{27}$ son equivalentes a $\frac{4}{9}$

   j) $4\frac{1}{5} < \frac{18}{4}$ k) $1\frac{1}{3} < \frac{5}{3}$ l) $\frac{5}{2} > 2{,}41$

2. a) $2{,}\bar{5} \leq 3$ b) $0{,}6 \geq 0$ c) $5{,}79 \leq 5{,}8$ d) $2 \geq \frac{5}{3}$

   e) $1 \leq \frac{4}{3}$ f) $2{,}\bar{2} \geq \frac{22}{10}$ g) $\frac{3}{4} \leq 3{,}4$ h) $\frac{1}{2} < \frac{5}{3}$

3. a) 1,25 > 1,20 b) 0,36 < 0,56 c) $\frac{1}{1} > \frac{1}{2}$

   d) $3{,}3 > 3\frac{1}{4}$ e) $1\frac{2}{3} < 3\frac{2}{3}$ f) $\frac{7}{6} > \frac{5}{6}$

g) $\frac{5}{4} > 1$ h) $\frac{6}{2} > 2{,}06$ i) $3\frac{1}{5} = 3{,}2$

j) $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ k) $3{,}25 = 3\frac{1}{4}$ l) $4\frac{4}{5} = \frac{24}{5}$

m) $1{,}3\overline{4} > 1{,}34$ n) $4\frac{3}{7} < 4{,}5$ ñ) $6{,}125 = 6\frac{1}{8}$

4. El más pesado es el *B* y el menos pesado es el *D.*

5. Debe dedicar 9 partes. 6. Ninguna de ellas.

Epígrafe 1.1.7

	Resultado	Antecesor	Sucesor	Resultado	Antecesor	Sucesor
1.	a) 338	337	339	b) 7 751	7 750	7 752
	c) 2 407	2 406	2 407	d) 233 232	233 231	233 233

233 232 > 7 751 > 2 407 > 338

2.*

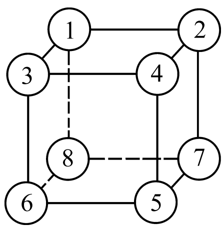


Figura 1.5

3. a) Aproximadamente 98 toques
   b) 185 toques
   d) 15 toques más

4. El 30 de enero

Epígrafe 1.1.8

2. a) $\frac{3}{3} = 1$ b) $\frac{17}{12}$ c) $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{24}$ e) $\frac{1}{10}$

   f) 4 g) $\frac{3}{2}$ h) $\frac{1}{24}$ i) 4 j) 1

k) 5 l) $\frac{1}{3}$ m) 25 n) $\frac{1}{108}$ o) $\frac{77}{50}=1\frac{27}{50}$

p) $\frac{289}{70}=4\frac{9}{70}$ q) $\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}$ r) $\frac{46}{17}=2\frac{12}{17}$ s) 47 t) $\frac{795}{11}=72\frac{3}{11}$

2.1 Los resultados obtenidos se encuentran entre los números naturales siguientes:

a) 0 y 2	b) 1 y 2	c) 0 y 1	d) 0 y 1	e) 0 y 1
f) 3 y 5	g) 1 y 2	h) 0 y 1	i) 3 y 5	j) 0 y 2
k) 4 y 6	l) 0 y 1	m) 24 y 26	n) 0 y 1	o) 1 y 2
p) 4 y 5	q) 1 y 2	r) 2 y 3	s) 46 y 48	t) 72 y 73

3. d) 4. Leonardo.

5.* Podemos considerar tres puntos como se muestra en la figura, en los cuales la diferencia no es menor que $\frac{1}{3}$; pero al ubicar el cuarto punto en ese intervalo, necesariamente la diferencia de ese con uno cualquiera de los otros es menor que $\frac{1}{3}$.

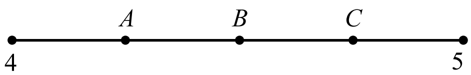


Figura 1.75

6.* El mayor denominador que tenemos es 12 que contiene a 2, 4, 6 y 12; pero no contiene a 8 ni a 10, de aquí tenemos que: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{6+3+2+1}{12}=\frac{12}{12}=1$, por tanto los términos que deben suprimirse son $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{10}$.

7. 1.^{er} día: 60 % de 250, por tanto, el primer día recorrió 150 km.
2.^{o} día: La cuarta parte del resto, entonces $\frac{1}{4}(100)=25$; por tanto el segundo día recorrió 25 km.
3.^{er} día: Para cumplir el plan de entrenamiento de 250 km en tres días, debe recorrer 75 km, o sea, <u>50 km más que el segundo día</u>.

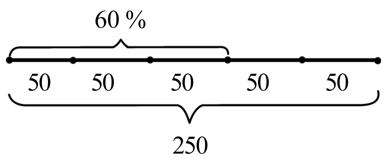


Figura 1.76

Epígrafe 1.1.9

1.1

a) 98,6	b) 14,2	c) 95,2	d) 17,6	e) 42,125	f) 9,175
g) 3,15	h) 9,55	i) 49,3	j) 3,55	k) 5,95	l) 4,4

1.2 a) Novecientos ochenta y seis décimas.

c) Novecientos cincuenta y dos décimas.

e) Cuarenta y dos mil ciento veinticinco milésimas.

g) Trescientos quince centésimas.

1.3 Entre 49 y 50 1.4 5 1.5 4 y 5

1.6 Expresiones decimales: 4,45; 4,5 y 5,3

Fracciones. $\frac{23}{5}$; $\frac{11}{2}$ y $\frac{19}{3}$

2. 140 kWh. 3. $a = \frac{3}{15}$ $b = \frac{13}{15}$ $c = \frac{13}{6}$

Epígrafe 1.1.10

1.1 c) 1.2 a) 1.3 a) 1.4 c) $A = B$
1.5 c) 1.6 c)

2. Aproximadamente el 10,18 % del total de municipios.

3. $\frac{49{,}2}{1\,000} = \frac{4{,}92}{100} \approx \frac{5}{100}$, sí puede afirmarse.

4.*En cada una de las seis caras, hay ocho cubos con solo una cara pintada, $\frac{64 \cdot 6}{1\,000} = 100 = \frac{384}{10} = 38{,}4\,\%$

En las aristas hay 8 cubos **con cada uno de 12,** solo con dos caras pintadas $\frac{8 \cdot 12}{1\,000} \cdot 100 = 19{,}6\,\%$

En cada vértice (8) hay un cubo que tiene solamente 3 caras pintadas, $\frac{8}{1\,000} \cdot 100 = 0{,}8\,\%$

a) No porque solo son 8, hay más posibilidades de escoger uno de los 384 que solo tienen pintada una cara.

5. Wilfredo Sánchez. Al determinar el average tenemos: $\frac{80}{212} \cdot 1\,000 = 377{,}35 \approx 377{,}4$

Agustín Arias. $\frac{69}{183} \cdot 1\,000 = 377{,}049 \approx 377{,}05 \approx 377{,}1$.

Se observa, que cuando se determinó el average de Arias hay una aproximación de otra aproximación, debía ser 377,05.

Epígrafe 1.1.11

1. a) 21 b) 36 c) 4

2.

A	B
• Un trabajador abona 16 surcos en dos jornadas de trabajo. ¿Cuántas jornadas debe trabajar para terminar de abonar los 48 surcos del huerto?	$\frac{16}{2} = \frac{32}{x}$
• Un trabajador abona 16 surcos en dos jornadas de trabajo. ¿Cuántas jornadas debe trabajar para abonar los 48 surcos del huerto?	$\frac{16}{48} = \frac{2}{x}$
• Un trabajador abona 16 surcos en dos jornadas de trabajo. ¿Cuántas jornadas debe trabajar para realizar los 3 pases de abono que llevan los 48 surcos del huerto?	$\frac{2}{x} = \frac{16}{144}$

3. $\frac{9\,950 \text{ km}}{x} = \frac{13{,}4 \text{ cm}}{6{,}7 \text{ cm}}$; $x = 4\ 775$ km

4. $\frac{3}{5}$ de 20 = 12

5. 112 m^2

6. $t \in z = y \in x$, con $x; y; z; t \in \mathbb{Q}_+$; $z \neq 0$; $x \neq 0$

7. Son 4 en total

8. El tanto por cien.

9. No

10.* Pomos plásticos: 12. Libretas: 18. Latas de refresco: 15.

Epígrafe 1.2.1

1. a) Asistencia a la biblioteca b) En diciembre con 441
   c) 299 d) 542

2.1 a) 228 b) Brasil; Argentina
   c) Dos; Cuba y México d) 4, México
   e) Plata f) 50 %
   g) 3

2.3

Oro	Plata	Bronce
Judo 5	Atletismo 7	Natación 1
Lev. de pesas 1	Natación 3	Judo 1
	Lev. de pesas 2	Lev. de pesas 0
	Tenis de mesa 0	

3. b) Total de trabajadores: 3 593 Hombres: 1 995 55 %
   c) En el nivel medio superior, es la barra que tiene mayor altura.
   d) En total 2 454 trabajadores.
   e) Sí, permite comparar de una forma ágil.
   f) Sí.

4. a) Circular o de pastel b) 212 530 000 USD
   c) África d) 52 130 000 USD

Epígrafe 1.2.2

1. a) 1; 2; 2; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 6; 6

   b)

Lectura	Conteo	FA	FRD	FRP
1	/	1	$\frac{1}{19} = 0{,}053$	5,3
2	~~////~~	5	$\frac{5}{19} = 0{,}263$	26,3
3	/ / /	3	$\frac{3}{19} = 0{,}158$	15,8
4	/ /	2	$\frac{2}{19} = 0{,}105$	10,5
5	~~////~~/	6	$\frac{6}{19} = 0{,}316$	31,6
6	/ /	2	$\frac{2}{19} = 0{,}105$	10,5

1. Ordenar los datos de forma creciente.
2. Construir una tabla de siete filas y cinco columnas, para distribuir las tiradas por lecturas y determinar el número de tiradas que pertenecen a cada una.
3. En la primera fila se escribe, la identificación de cada columna y en la primera columna, las lecturas en orden ascendentes.

4. Como hay valores repetidos, se hace el conteo, se ubican en la segunda columna; en la tercera columna, la suma de cada conteo realizado, o sea, la FA.
5. En la cuarta columna, se ubica el cociente entre la FA y la cantidad total de datos, o sea, la FRD.
6. En la quinta columna se ubica la FRD multiplicada por 100, o sea, la FRP.

c) 5.

d) En 9 tiradas.

e) No se altera, el valor que es 4, aunque se hagan los cambios y después se ordene, se mantiene el valor.

2. a)

Países	Cantidad de veces	FRD
Suecia	2	$\frac{2}{18} = 0{,}11$
Australia	2	$\frac{2}{18} = 0{,}11$
E.U.A.	9	$\frac{9}{18} = 0{,}5$
Suiza	4	$\frac{4}{18} = 0{,}22$
Brasil	1	$\frac{1}{18} = 0{,}06$

b) E.U.A. c) 22 %

Epígrafe 1.2.3

1. a) Gráfica de barra.
   b) Sí, permite comparar de manera muy sencilla.
   c) De Ucrania.
   d) 2 502.
   e) De Ucrania.
   f) 5 499 aproximadamente.

2. a) Gráfico poligonal.
   b) Con el objetivo de analizar la tendencia del comportamiento de la asistencia en los primeros días del mes.
   c) El segundo día.
   d) 96,7 %

3. a) Pictograma, es una forma organizada de ilustrar la información de una manera muy llamativa, en que se utilizan figuras o símbolos propios; para representar cantidades dispuestas en la misma fila o columna.
   b) En el 2011
   c) 13

4. a) Asistencia al campismo el fin de semana
   b) El 3   c) 175 hombres   d) No, 5; 3; 2; 1 y 4
5. Los gráficos son más ventajosos para mostrar la información, sobre todo cuando son grandes grupos de datos y necesitamos procesar la información.

Epígrafe 1.2.4

1.

1.1 El c)   1.2 No, la información dada no brindaba muchas posibilidades para ello.

1.3

Notas	Conteo	FA	FR
50	/ /	2	$\frac{2}{15} = 0{,}133$
60	/ / /	3	$\frac{3}{15} = 0{,}2$
70	/ / /	3	$\frac{3}{15} = 0{,}2$
80	/ /	2	$\frac{2}{15} = 0{,}133$
90	/ / / /	4	$\frac{4}{15} = 0{,}267$
100	/ /	2	$\frac{2}{15} = 0{,}133$

Es más fácil analizar las alternativas dadas.

a) Es evidente que todas las frecuencias absolutas no son iguales.

b) La FR correspondiente a la nota de 100 es: $\frac{2}{15}$

c) La media es: $75{,}\overline{3}$
d) La moda es la nota de 90 puntos con 4 repeticiones.
e) Hay 7 estudiantes con notas iguales o superiores a 80 puntos.

2. a) 53,3 %   b) La media es 2,3 y la moda es 3.

Para hallar la <u>media aritmética</u>, se multiplica cada categoría por su FA, se adicionan los productos y la suma se divide por la suma de las frecuencias absolutas.
La <u>moda</u> es la categoría con la mayor frecuencia absoluta.

3.* $\dfrac{x+y+z+t+w}{5}=6$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{x+y+z+t}{4}=7$

Sustituyendo $28+w=30$ $\qquad\qquad$ $x+y+z+t=28$

$w=2$

El número eliminado es 2

4. a) V b) F c) F d) F e) V

5. a) Gráfico de barra b) El 3) c) 34,8 %

6. 93 puntos

8.1

Grupo A	
Calificación	**FA**
40	1
50	1
60	2
70	2
80	5
90	4

Grupo B	
Calificación	**FA**
40	1
50	5
60	2
70	4
80	9
90	6
100	3

8.2 a) GA: 74 GB: 75 b) 80 en los dos grupos c) GA: 86,7 % GB: 80 %

8.4 El de barra.

9. T: Total de estudiantes. $\dfrac{7}{T}=0{,}2$; T = 35.

a)

Edad	FA	FR
11	7	0,2
12	21	0,6
13	7	0,2

b) 12
c) La mayoría de los estudiantes tiene 12 años.
d) El de barras, permite comparar; también pudiera ser un gráfico de barra o de pastel,…

10*. Sí, $X = \{6; 6; 6; 4; 8\}$

La moda es 6, con 3 repeticiones.

La media aritmética $\dfrac{6+6+6+4+8}{5} = 6$

Epígrafe 1.3.3

1. a) $\notin$ b) $\subset$ c) $\subset$ d) $\subset$ e) $\in$ f) $\subset$ g) $\notin$ h) $\subset$
   i) $\in$ j) $\not\subset$ k) $\notin$ l) $\subset$ m) $\in$ n) $\in$ o) $\in$ o) $\in$

2.* Siempre Anachel sacará un número entero porque los números naturales y sus opuestos son números enteros.

3. a) Sí b) No c) Sí d) No e) Sí f) Sí g) 2

4. a) V
   b) F, porque solo hay dos, (0 y 17)
   c) F, porque los números naturales también son enteros
   d) V
   e) F, porque están a la misma distancia

5.* a) 5 pares b) 21 pares c) $n + 1$ pares

Epígrafe 1.3.4

2. $A = -2{,}4$ $B = 0{,}5$ $C = 1{,}6$ $D = -\dfrac{16}{10}$ $E = -1{,}4$ $F = 2{,}2$

3. a) 3 y 4 b) – 3 y – 2 c) – 1 y 0 d) 0 y 1 e) – 2 y – 1

4. c) F, porque es un número entero negativo.
   d) F, porque los enteros negativos no pertenecen al conjunto de los números fraccionarios.
   f) F, porque las expresiones decimales finitas negativas no pertenecen al conjunto de los números fraccionarios.

5. – 5; 5; – 7,8; $\dfrac{3}{4}$; 0; – 3,4; 1,75

6. a) Sí, porque son números fraccionarios b) B c) – 21,5 y – 36 d) 22 e) Infinitos f) $\dfrac{215}{36}$

7. a) 3 y – 3 b) 0 c) 1,5 y – 1,5 d) ninguno e) $x \in \mathbb{Q}$; $x \geq 0$

8. Sí, porque solo tiene que pagar el 75 % del total.

Epígrafe 1.3.5

1. $1 > 0{,}5 > \frac{1}{10} > -1{,}6 > -1{,}75 > -8$

2. $a < e$ $b > c$ $c > e$ $a < b$

3. $\frac{3}{4} < \frac{6}{5}$ porque $\underline{15 < 16.}$

   El número – 100 pertenece al conjunto de los números <u>racionales</u>.

   $-\frac{1}{21} = -\frac{2}{42}$ porque tienen igual módulo.

   El conjunto de los números fraccionarios es un subconjunto del conjunto <u>de los números racionales</u>.

   $0 > -\frac{1}{2}$ porque $-\frac{1}{2}$ <u>está situado a la izquierda del cero en la recta numérica.</u>

   El módulo de –2,45 es <u>2.45</u>.

4. $-0{,}2$ y $\frac{1}{100}$ 5. – 0,600

6. $\{-1; -0{,}8; -0{,}6\}$ $\{-1{,}4; -1{,}2; -1\}$ $\{-10; -8; -6\}$

7. $C = 135$ $F = \frac{47}{4} = 11\frac{3}{4}$

   a) V b) F, porque C también lo es. c) F, es el de C. d) F, es el de E.
   e) V f) F, es E. g) V h) V
   i) F, porque E está más cerca de 0 en la recta numérica. j) V

8. a), porque – 21 °C < – 20 °C

9. 211 valores enteros

10. a) Poligonal. Sí, porque se permite realizar análisis de tendencias de la temperatura.
    b) Mayor a las 11 horas, fue menor a las 7 horas.

    c) Sí, porque son enteros y $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. d) Sí, a las 9 horas.

12. a) Sí b) 19,30 segundos
    c) 31.05.08 d) Sí, 0,9 y –0,9
    e) Poligonal

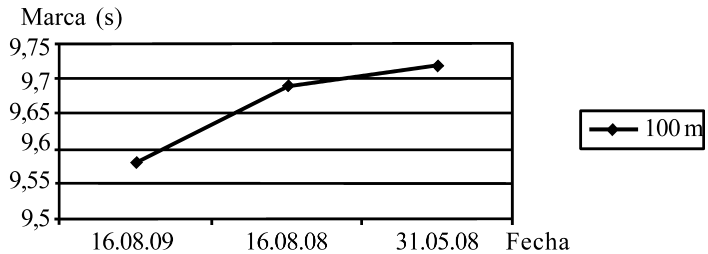


Figura 1.77

Epígrafe 1.4.1

1. a) – 81 297 b) – 1 191, 23 c) – 55,5

   d) – 50 e) $\frac{29}{8}=3\frac{5}{8}$ f) 2 344 060

2. a) 22 438 b) – 45,5 c) – 118 d) – 1 736 e) – 14,34

   f) 0 g) $-\frac{89}{8}=11\frac{1}{8}$ h) – 188,4 i) 6 652,23 j) 7,8

3. a) 830 b) – 17,25 c) $-\frac{26}{45}$ d) 0

   e) $-\frac{46}{75}$ f) 0 g) – 2 736

4.

a	3	1,2	1,9	– 7	– 9,3
b	7	– 2	0	– 1,5	10
$a + b$	10	– 0,8	1,9	– 8,5	0,7
$a + b < a$	F	V	F	V	F
$a + b > a$	V	F	F	F	V

5. a) A = – 16,6; B= – 145; $C = \frac{17}{50}$ b) Sí.

   c) No, porque es fraccionario. $D = -\frac{17}{50}$ d) 145

   e) Entre – 17 y – 16 f) – 146 g) 128

6. a) 13 b) – 17 c) – 452 d) 100 e) 485 f) 0 g) $\frac{498}{1\,725}$ h) 0

7. – 1; 0 y 1 – 1 + 0 + 1 = 0

Epígrafe 1.4.2

1. a) – 4 b) – 10 c) – 2 d) 15 e) 7

   f) – 1,8 g) – 13,5 h) $-\frac{1}{2}$ i) $-\frac{11}{12}$ j) $-\frac{1}{36}$

2. a) Todas. b) Eurasia.
c) Fosa subglacial Bentley d) Falso

3. 4 337 m.

4. a) – 114 d) $\frac{54}{11}=4\frac{10}{11}$ g) $\frac{11}{9}$

b) – 34,7 e) $\frac{61}{42}=1\frac{19}{42}$ h) $\frac{247}{18}=13\frac{13}{18}$

c) – 101 f) $\frac{8}{35}$ i) – 2

5. a) No, porque $\frac{1}{4}\notin \mathbb{Z}$ b) Sí. c) – 127 734 066; – 37,2 y – 0,754

d) 25 y $\frac{1}{4}$ e) Ciento veintisiete millones setecientos treinta y cuatro mil cuarenta y uno.

6. a) x = – 1 080 b) x = 55,65 c) a = – 34 d) b = 0 e) – 0,11 f) $z=-\frac{3}{2}$

7. 34 8. a) m = 7 b) s = 6

Epígrafe 1.4.3

1. a) positivo, b) positivo, c) negativo, d) negativo.

2. a) 300 b) – 16,2 c) – 0,0876 d) $-\frac{1}{2}$ e) – 4

f) $\frac{1}{120}$ g) 0 h) – 17,67 i) –214,3 j) $-\frac{7}{9}$

3. a) V b) F, es 0 c) F, es 1 d) V
e) F, es – 1,0 f) F, es – 5 g) F, es 8,4 h) F, es 28,5

4. – 2 y 6

5. a) – 3 b) – 0,6 c) 2 d) – 3,8 e) $-\frac{1}{3}$ f) $-1\frac{1}{5}$

6. a) positiva b) negativa c) positiva d) negativa e) negativa f) positiva

7. a) De 5 b) De 8 c) De 4

8. a) – 879 670 b) – 12 c) – 336 d) – 1,1 e) $\frac{2}{15}$ f) – 350

9. – 90 948

12. $A = -55$ $B = -247\ 981\ 000$

12.1 a) V b) V c) F, el opuesto de $\frac{1}{3}$ es $-\frac{1}{3} \notin \mathbb{Q}_+$ d) V

12.2.1 d) 12.2.2 b) 12.2.3 c)

12.3 a) 0 b) – 100 000 000

13.* $A = 9$ $L = 4$ $S = 7$ $V = 2$ $O = 8$ $R = 1$
– 3(9 497) = – 28 491

14. Multiplicando por – 1 15. 8; 4 y 0

Epígrafe 1.4.4

1. a) $-1{,}40\overline{6}$ b) – 880 c) 206 d) – 6 e) $0{,}05\overline{3}$
   f) – 0,41 g) – 1 717 h) $0{,}079\overline{1791}$ i) 0 j) $3{,}\overline{3}$

2. a) V b) F, porque – 600 : (– 5) = 120 > 0 c) F, porque – 12,8 : (– 12,8) = 1

3. a) No b) Toronto – 19,32 ≈ – 19,3
   Beijing – 15,42 ≈ – 15,4
   Bogotá – 9,96 ≈ – 10
   Moscú – 23,96 ≈ – 24
   Área de la Antártida – 36,4
   d) Mayor en Bogotá; menor en el área de la Antártida

4. a) $x = -12$ b) $x = -5$ c) $a = -3{,}9$ d) $b = \frac{3}{2}$
   e) – 30 f) $z = 24$ g) $a = -6$ h) $y = -\frac{3}{7}$

5. a) 1,6 b) – 32 6. a) 60 b) – 21

7. – 24,0125 8. – 105

Epígrafe 1.4.5

1. a) 309 b) – 102,5 c) $23{,}\overline{3}$ d) – 0,35 e) – 403
   f) 1,6 g) 87,5 h) 24 i) 25 j) – 265

2. a) – 2 b) 0 c) 4 d) 35 e) 2 f) – 0,75 g) $\frac{149}{20}$

3. $P = -28$ $Q = 6{,}25$ $R = \frac{1}{7}$ $T = 144$ $U = -0{,}\overline{3}$

3.1 Sí, porque es el opuesto de una expresión decimal infinita periódica.

3.2 a) – 928 b) 140 c) – 140 d) – 172 e) – 1 040

5.* Después de la rebaja

6. Se comercializan 15 951 140

7. 216 cm

Epígrafe 1.4.6

1. a) 38,44 b) $-\frac{8}{125}$ c) 81 d) – 32

2. a) +, base positiva
   b) –, base negativa exponente impar
   c) –, base negativa exponente impar
   d) +, base positiva
   e) +, base negativa exponente par
   f) –, base negativa exponente impar
   g) –, base negativa exponente impar
   h) –, base negativa exponente impar
   i) –, base negativa exponente impar

3.* $\left(\frac{3}{4}\right)^{\heartsuit} = (9+4)(3-16) = -169$ $\left(\frac{3}{2}\right)^{\heartsuit} = (9+2)(3-4) = -11$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{\heartsuit} = (1+5)(1-25) = -144$ $\left(\frac{3}{1}\right)^{\heartsuit} = (9+1)(3-1) = 20$

$$\frac{-169-11+144}{2} = \frac{-180+144}{2} = \frac{-36}{2} = -18$$

4. No, $(-3)^4 = 81$, $(-2)^5 = -32$

5.* 2 + 4 +… + 1 728 – 1 – 3 – 5 –… – 1 727
747 360 – 746 496 = 864

6. a) 1 b) $-\frac{1}{8}$ c) 512 d) – 3

7. a) 256 b) 46,24 c) $\frac{1}{1\,024}$ d) 1 e) 7 056 f) 1 g) $\frac{1}{2}$

8. $4^x - 4^{x-1} = 48$

$4^x - 4^x \cdot 4^{-1} = 48$

$4^x - 4^x \cdot \dfrac{1}{4} = 48$

$4^x\left(1 - \dfrac{1}{4}\right) = 48;$ $\qquad 4^x = 4^3$

$4^x\left(\dfrac{3}{4}\right) = 48$ $\qquad x = 3$

$4^x = \dfrac{48 \cdot 4}{3}$

$4^x = 64$

9.1 a) V c) F, es $7^5 = 49^2 \cdot 7$ d) V
b) F, solo se cumple para el producto de potencias de igual base.

9.2.1. c) 9.2.2 c) 9.2.3. c) 9.2.4. b)

Epígrafe 1.4.7

1. I) Científica, II) exponencial, diez, uno, diez, III) módulo, número, positivo, derecha, IV) científica.

2. Ninguna de las anteriores 3. $1{,}47 \cdot 10^{11}$ 4. F, es $1{,}001 \cdot 10^{-3}$

5. 3 456 755 300 000 000

6. a) $9{,}38 \cdot 10^{6}$ c) 8 653 723

7. a) Año 1996: $1{,}12 \cdot 10^{11}$
Año 2006: $1.96 \cdot 10^{11}$

b) 75 % de 112000 000 000 es: 84 000 000 000
112 000 000 000 + 84 000 000 000
= 196 000 000 000

8.* $(-10)^{3\,125} = -1\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{\textbf{3 125 ceros}} = -(-1\underbrace{0\ldots0}_{\textbf{3 125 ceros}}) = 1\underbrace{0\ldots0}_{\textbf{3 125 ceros}}$

ningún cero: $\dfrac{10^0+2}{3} = 1,$ un cero: $\dfrac{10^1+2}{3} = 4,$

dos ceros: $\dfrac{10^2+2}{3} = 34,$ tres ceros: $\dfrac{10^3+2}{3} = 334,$

cuatro ceros: $\dfrac{10^4+2}{3}=3\,334,$ cinco ceros: $\dfrac{10^5+2}{3}=33\,334$

3 125 ceros: $\dfrac{10^{3\,15}+2}{3}=\underbrace{3...........34}_{3\,124\text{ números }3}$ La cantidad de números <u>tres</u> es uno menos que el exponente.

Epígrafe 1.4.8

1. a) ≈ 65 540 b) ≈ 218 100 c) ≈ 53 290 000 d) ≈ 0,448 9 e) ≈ 0,001 225

2. a) ≈ 823,7 b) ≈ 530 000 c) ≈ 22,09 d) ≈ 97,22 e) ≈ 114,5

3. a) V ≈ 0,578 0 u^3 b) V ≈ 0,015 680 u^3 c) V ≈ 3 112 500 u^3

4. a) 8 b) 15 c) $\dfrac{4}{5}$ d) 10^{-1}

5. a) 2,4 b) 9,47 c) ≈ 2,82 d) ≈ 30,2 e) ≈ 43,3 f) ≈ 0,292

6. $\overline{BC}\approx 5{,}97$ cm

Epígrafe 1.4.9

1. a) 343 b) 27 000 c) $-\dfrac{1}{64}$ d) 8

2. a) ≈ 41,26 b) ≈ 373,2 c) ≈ 557,4 d) ≈ 8 365
   e) ≈ – 12 330 000 f) ≈ 6 230 g) ≈ 0,003 375 h) ≈ 964,4

3. a) – 4 b) 9 c) $-\dfrac{3}{5}$ c) 10^{-15}

4. a) ≈ – 1,31 b) ≈ – 2,18 c) ≈ 2,08 d) ≈ – 7,53
   e) ≈ 19,9 f) ≈ 0,887 g) ≈ 28,6 h) ≈ 0,684

5. a ≈ 21,6 mm

6.* x = 6. (Sugerencia: aplicar propiedades de las potencias)

Epígrafe 1.4.10

1. a) ≈ 25,75 b) ≈ – 4 c) ≈ 0,966

2. A = – 4 B = – 66,75 C = 49 D ≈ 2 E ≈ 4 F = – 8,39

2.1 d) 2.2 a) – 67,…,– 8 b) 4 u c) 2

3. En 4 unidades

4. a) F b) V c) F d) F e) V f) F

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO

1. a) El precio de los 4 productos es 201,60 CUP
   b) 44,34 CUP

2. a) No existe moda, todos los valores son diferentes. b) No

3. a)

Programas	FA	FR
M	8	0,26
D	8	0,26
I	6	0,2
C	5	$0{,}1\overline{6}$
N	3	0,1

b) El 16,7 % aproximadamente
c) El noticiero
d) Los musicales y deportivos
e) No, porque la variable es cualitativa
f) El gráfico de barras aunque también puede utilizarse el de pastel

5.* {– 3, – 3, – 3, – 4, – 4, – 4, – 4} Moda – 4

6. a) Sí, porque ha descendido más.

7. a) $A = -0{,}47$ $B = 119{,}6$ $C = 318{,}75$ $D = \dfrac{9}{40}$

   b) No, porque son números fraccionarios.

   c) Sí, porque $318{,}75 > 119{,}6 > \dfrac{9}{40} > -0{,}47$ d) $F = \left\{-119{,}6; -\dfrac{9}{40}\right\}$

   e) Infinitos. La diferencia es 318,28

8. a) Sí

9. a) $125\,689^{3+4-7}$ b) $1^{234\,567\,890}$ c) $123\,456\,789^{0}$

   d) $\dfrac{148}{296} + \dfrac{35}{70} = 1$ e) $234\,567^{9-8-1}$

11. 1 a) $3{,}7 \cdot 10^{12}$ 2. a) $6{,}6 \cdot 10^{9}$ 3. a) $2 \cdot 10^{10}$

12.* Los números no positivos son los negativos y el cero, por tanto, de 36 posibles tiradas diferentes, solo:

   a) $\dfrac{21}{36} = \dfrac{7}{12}$ b) $\dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$, el 50 %

CAPÍTULO 2

Geometría plana y cuerpos

¿Qué aprenderás en este capítulo sobre geometría? Piensa que muchísimo, siempre es así. Confirmarás las ideas de un prestigioso sabio de la antigüedad llamado Platón,[77] sobre la importancia de la geometría, porque los conocimientos geométricos están presentes en prácticamente toda la vida del hombre; él hizo escribir en la entrada de su academia la siguiente inscripción en su idioma, claro está (fig. 2.1):

Platón (427-347) a.C

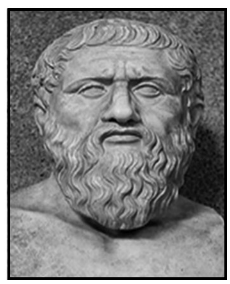


Figura 2.1

Para este sabio la geometría era muy importante: "[…] una ciencia de la cual ningún arte, ni ningún conocimiento pudiera prescindir [...]",[78] por eso sus discípulos dedicaban mucho tiempo a su estudio.

La *Geometría* es una rama de la Matemática que nació en Egipto y Babilonia. En un primer momento, agrupó conocimientos sobre *medición de tierra* (*Geo*: tierra y *metría*: medida), porque las crecidas del río Nilo borraban los límites de los terrenos de los egipcios y fue necesario buscar procedimientos para determinar nuevamente qué parte correspondía a unos y a otros.

[77] Platón, matemático y filósofo griego de la Antigüedad.

[78] Búsqueda sobre Platón: *zaratustraenequilibrio.blogspot.com.*

Con el tiempo se llamó geometría a todos los conocimientos relacionados con las formas geométricas y sus propiedades. Surgen otros motivos para estudiar geometría: el cálculo de ángulos, distancias, áreas, volúmenes, la trayectoria de los cuerpos celestes ¡y hasta el pronóstico de los movimientos de los astros! De gran importancia, para los viajes por mar y tierra. ¡Es increíble que desde hace más de 2 000 años se hicieran estos cálculos con admirable precisión!

La acumulación de conocimientos geométricos tomó carácter de ciencia, cuando el hombre comenzó a pensar en su fundamentación, a partir de la civilización griega en el siglo VII a. n. e. con Thales de Mileto, que dedujo importantes relaciones geométricas. En el año 1637 el matemático francés René Descartes, inició la modernización de la geometría clásica. Pero hasta 1900 no se contó con una fundamentación rigurosa de la geometría con los trabajos de David Hilbert.

En este capítulo podrás comprender los conceptos de ángulo, polígono, triángulo, en fin, muchas propiedades de las figuras planas y de los diferentes tipos de movimientos del plano, pero también, de algunos cuerpos geométricos. Te deseamos muchísimos éxitos en su estudio.

2.1 Las figuras planas

Karla y Melisa, estudiantes de 7.º grado, van a estudiar a casa de Fabiola por la tarde y deben llegar allá, a partir de un croquis, que ella les entregó.

Observa el croquis de Fabiola en la figura 2.2. ¿Cómo representó en él las calles, las casas, los edificios y las personas?

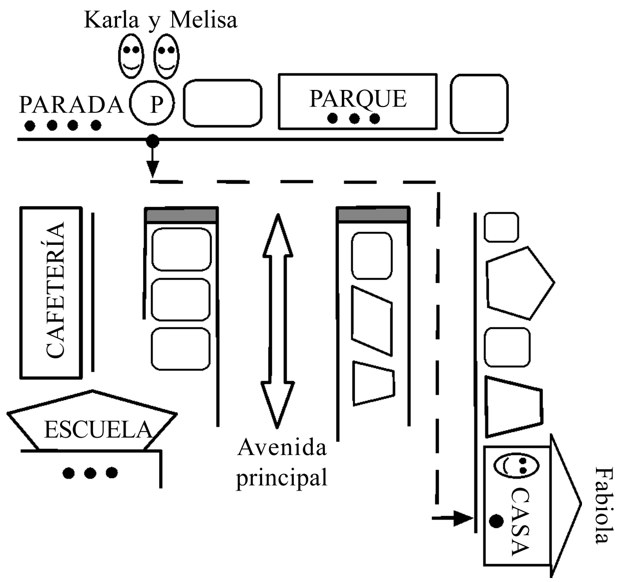


Figura 2.2

Estarás de acuerdo en afirmar que utilizó diferentes figuras planas para representar en la hoja de papel objetos que nos rodean.

De igual forma, cuando miras a tu alrededor, puedes identificar en objetos de la vida cotidiana, diferentes figuras geométricas del plano y del espacio.

2.1.1 Figuras planas fundamentales y sus propiedades

Una figura es todo conjunto de puntos. Las figuras se pueden agrupar en figuras planas y cuerpos geométricos. Las figuras planas tienen todos sus puntos en el mismo plano y los cuerpos geométricos no tienen todos sus puntos en el mismo plano. ¿Cuáles son las figuras planas que se utilizan en el croquis de Fabiola? ¿Recuerdas las propiedades que estas figuras cumplen? Vamos a profundizar en el estudio de diferentes figuras planas, precisamente comenzaremos por las denominadas: *conceptos primarios o* representaciones básicas de los objetos de la realidad: plano, punto y recta.

Plano

Al pensar en un plano te representas una hoja de papel que se extiende ilimitadamente por cada uno de sus lados (fig. 2.3). El plano está formado por infinitos puntos y por supuesto, contiene infinitas rectas. Los planos se denotan por letras griegas: α, β, γ,... estas son las tres primeras del alfabeto griego antiguo. Se leen: alfa, beta, gamma...

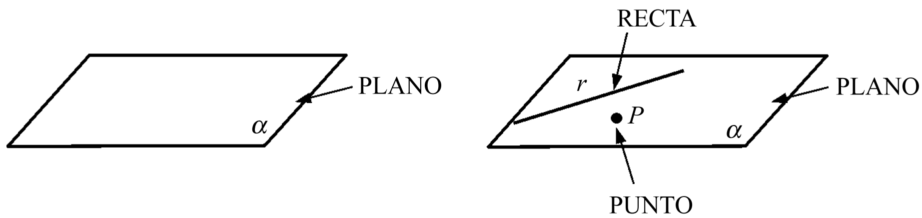


Figura 2.3

Ejemplo 1:

Una página de tu libro de Matemática; la hoja de papel donde Fabiola hizo el croquis para que sus amigas supieran cómo llegar hasta su casa, que aparece en la figura 2.2, pueden también identificarse como un plano sobre el cual se dibujan puntos, rectas y otras figuras.

Punto

Para ilustrar este concepto debes imaginarte, el orificio que hace una aguja al perforar una hoja de papel. Los puntos se denotan por letras mayúsculas del alfabeto. En la figura 2.4, puedes apreciar los puntos: *A, C,…, M, F,...*

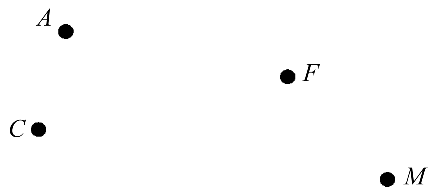


Figura 2.4

Ejemplo 2:

En el croquis de la figura 2.2, identificamos puntos, en los lugares de partida y llegada del recorrido hacia la casa de Fabiola; en la representación de personas que permanecen en la parada del ómnibus, en la escuela y en el parque.

Recta

Las rectas están formadas por puntos, pero te has preguntado, ¿cuántos puntos están contenidos en una recta? (fig. 2.5)

Verás que por muchos puntos que sitúes en ella, siempre encontrarás otros más que no has señalado. Esto significa que la recta es un conjunto infinito de puntos.

Puedes tener una idea de ella si la comparas con un hilo bien tenso que se prolonga indefinidamente por sus dos extremos. En la figura 2.5, puedes apreciar que las rectas se denotan con letras minúsculas del alfabeto: *a, b,…, r, s, t,…* o por dos puntos de ella.

De esta forma decimos, la recta *r* o la recta *AB*.

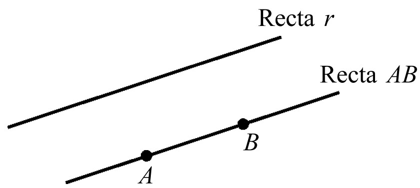


Figura 2.5

Ejemplo 3:

Identificamos rectas en el croquis de la figura 2.2, por ejemplo, en la representación de las calles, aunque ellas solo muestran una parte de la recta. Las calles están delimitadas; tienen inicio y fin en un determinado lugar, mientras que en geometría se considera que una recta no tiene punto inicial ni punto final.

Para realizar dibujos el hombre ha confeccionado diversos instrumentos, como la regla y el cartabón, que se emplean en el trazado de rectas. ¿Sabes utilizar estos instrumentos? Vamos a utilizarlos en construcciones muy sencillas., que te indicamos a continuación. Realicemos cada una en dibujos separados:

- Traza una recta y denótala por *t.* Represента en el plano dos puntos que pertenezcan a la recta *t,* denótalos por *A* y *B*. ¿Puedes representar también dos puntos *C* y *D* que no pertenezcan a la recta *t*?
- Ubica ahora un punto *P* en el plano, ¿cuántas rectas puedes trazar que pasen por este punto?

- Considera dos puntos diferentes M y N, ¿cuántas rectas puedes trazar que contengan a estos dos puntos?
- Traza una recta *m,* representa dos puntos E y F que pertenezcan a ella, sitúa un punto G que se encuentre entre E y F. ¿Podrías ubicar otros puntos entre E y F? ¿Cuántos?

Al analizar estas construcciones, podrás percatarte de algunas propiedades de los puntos y las rectas en un plano que son muy intuitivas, prácticamente evidentes. Por ello son consideradas *axiomas,* ya desde los tiempos de Euclides de Alejandría. ¿Quién fue Euclides? (fig. 2.6)

Facsímil de una publicación de *Los Elementos*[79]

Figura 2.6

Euclides (325-265 a.n.e.) fue un matemático griego. Pocos datos de su vida han llegado a nuestros días, salvo que vivió en Alejandría (actualmente en Egipto). Pero, su principal obra: Los Elementos, *inmortalizó su nombre y fue utilizada con apenas modificaciones durante más de 19 siglos. Todavía nos referimos a la geometría clásica como geometría euclidiana, en su honor.*

Los Elementos *tienen 13 tomos y en ellos se recopiló, organizó y argumentó todo conocimiento geométrico que se tenía hasta ese momento. Entérate de que los seis primeros tomos se refieren a la geometría plana. En ellos se escribieron algunas propiedades que vamos a estudiar a continuación y consideraremos axiomas, en el sentido de que las aceptamos sin demostración y que son prácticamente evidentes.*

Un punto pertenece o no a una recta

Ejemplo 4:

En la figura 2.7 los puntos A y B están en la recta t y los puntos C y D no están en la recta t.

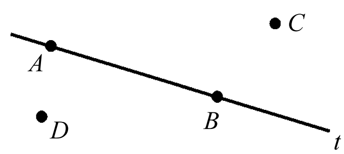


Figura 2.7

[79] H. Wussing: *Conferencias sobre Historia de la Matemática,* 1989.

Por un punto pasan infinitas rectas

Ejemplo 5:

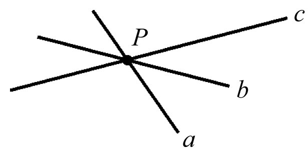


Figura 2.8

En la figura 2.8 por el punto *P* pasan las rectas: *a, b, c,…*

Dos puntos determinan una única recta

Ejemplo 6:

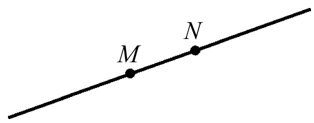


Figura 2.9

En la figura 2.9 los puntos *M* y *N* determinan la recta *MN,* eso significa que si pasa por ellos otra recta, esa es igual a la recta *MN.*

Dos rectas si se cortan lo hacen en un único punto, o sea, determinan un punto

Ejemplo 7:

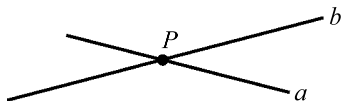


Figura 2.10

En la figura 2.10 las rectas *a* y *b* al cortarse determinan el punto *P*.

La recta es ilimitada, no tiene ni primero ni último punto y tiene infinitos puntos

Ejemplo 8:

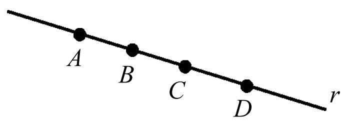


Figura 2.11

En la figura 2.11, en la recta *r,* existe otro punto *A,* antes del punto *B* y después de *B,* otro punto *C* y después otro punto *D* y así, sucesivamente.

Entre dos puntos cualesquiera de una recta, siempre existe un tercer punto, esta propiedad se denomina la densidad de la recta

Ejemplo 9:

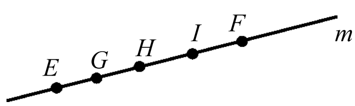


Figura 2.12

En la figura 2.12 los puntos *G, H, I…*, están en la recta *m,* entre *E* y *F*.

¿Sabías qué…? La posición de barcos y aviones, tanto en aeropuertos como en ejercicios militares, se determina en la actualidad por modernos medios de cómputo, aunque ello está basado en el viejo principio básico de ubicar puntos en planos cuadriculados (fig. 2.13).

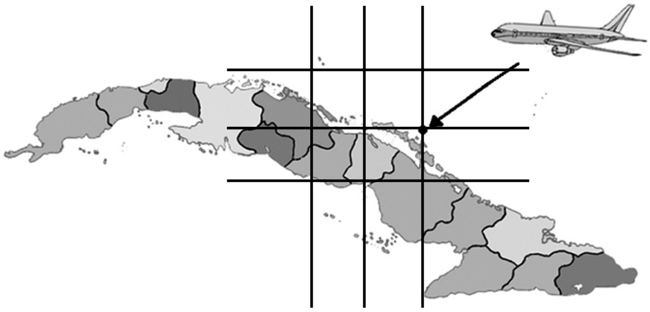


Figura 2.13

Semirrecta

Observa en el croquis de Fabiola de la figura 2.14, que a partir de la parada puedes caminar en la dirección de la calle del parque, en dos sentidos opuestos, que allí se representan con dos saetas más oscuras:

– Uno, hacia la izquierda, en busca de la calle de la cafetería.
– Otro, hacia la derecha, buscando la calle que conduce a la casa de Fabiola.

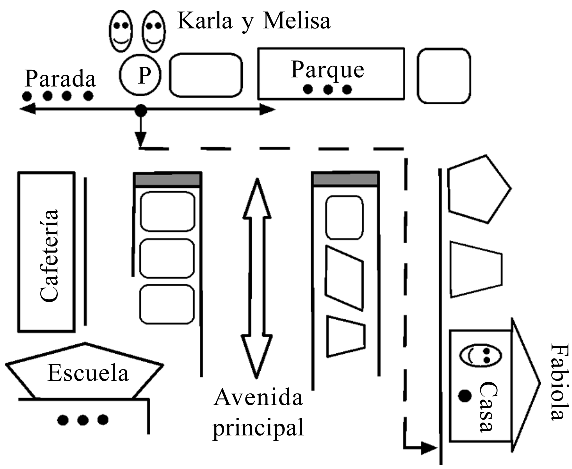


Figura 2.14

Ubiquemos un punto *P* sobre una recta cualquiera *AB,* como se muestra en la figura 2.15. Fíjate que el punto *P* divide a la recta en dos subconjuntos o partes, según la recta se recorra hacia la izquierda o hacia la derecha, respecto a este punto. Podemos decir que este punto divide a la recta en dos conjuntos de puntos.

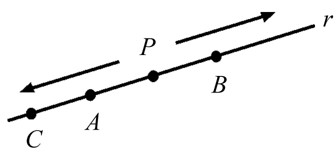


Figura 2.15

¿Qué nombre recibe cada uno de ellos?

Recuerda la definición de semirrecta:

Un punto cualquiera determina a cada uno de sus lados en una recta, dos conjuntos de puntos: los puntos que están a su izquierda y los que están a su derecha. Cada uno de esos conjuntos se llama **semirrecta o rayo de origen en ese punto.** Ambas semirrectas son entre sí, **semirrectas opuestas de origen en dicho punto**. Todos los puntos de una semirrecta están en la recta del mismo lado respecto a su origen. El punto de origen no pertenece a ninguna de las dos semirrectas, solamente las determina, porque él no puede estar en ninguno de los lados que él mismo determina. Se denota una semirrecta por dos puntos: su origen y uno de sus puntos.

Ejemplo 10:

En la figura 2.15 el punto *P* determina a cada uno de sus lados en la recta *r,* dos semirrectas de **origen** *P* que denotamos *PA* y *PB,* ambas son entre sí, semirrectas opuestas. *PA* contiene todos los puntos de *r* que están en el lado de *P* que está *A.*

Semiplano

Observa en la figura 2.16 que la cafetería y la casa de Fabiola, están en regiones diferentes del croquis, respecto a la avenida principal. Te darás cuenta que esta avenida divide al plano del croquis en dos semiplanos. Una idea de semiplano la tendrás en cada parte de una hoja de papel cuando la doblas.

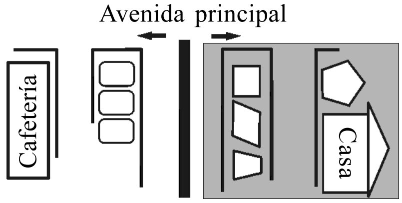


Figura 2.16

Recuerda la definición de semiplano:

Una recta cualquiera determina en el plano dos conjuntos de puntos, a un lado u otro de ella. Cada uno de estos conjuntos de puntos se llama **semiplano de borde en esa recta**. Ambos semiplanos son entre sí, **semiplanos opuestos de borde en dicha recta**. Todos los puntos de un semiplano están del mismo lado respecto a su borde. El borde no pertenece a ninguno de los dos semiplanos, solamente los determina. Se denota cada semiplano por tres puntos, los dos primeros indican la recta borde y el tercero es uno de sus puntos.

Ejemplo 11:

En la figura 2.17, observa que si *AB* es la recta que divide al plano β en dos semiplanos, llamamos al semiplano sombreado *ABC,* porque *AB* es su borde y el punto *C* está en dicho semiplano. *ABC* y *ABE* son semiplanos opuestos de borde *AB*.

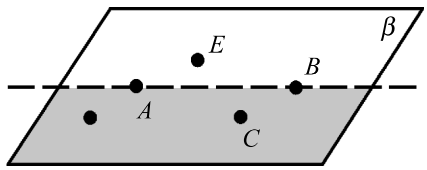


Figura 2.17

Los puntos *C* y *D* pertenecen al semiplano *ABC,* porque están del mismo lado de la recta *AB.* El punto *E* está en el semiplano opuesto al semiplano *ABC* porque está del otro lado de la recta *AB.*

Segmento

Fabiola le especificó a Karla, que partiendo del punto inicial (P) del recorrido que le dibujó, recto por la calle de la parada, en dirección al parque, debían caminar dos cuadras y doblar a la derecha para llegar a su casa.

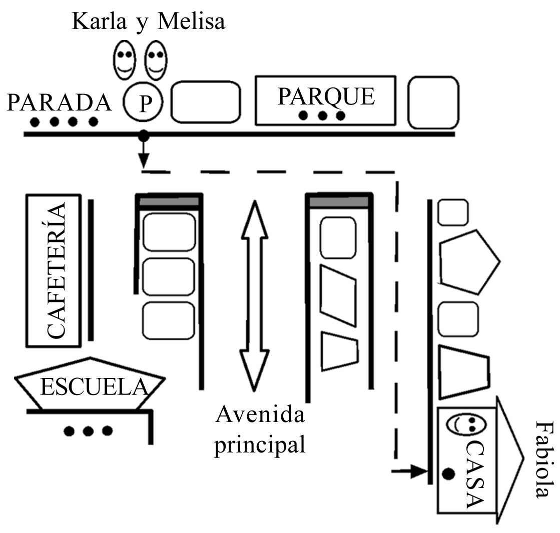


Figura 2.18

Piensa en las figuras estudiadas desde primaria y observa el croquis de la figura 2.18. ¿Puedes identificar qué figura geométrica utilizó Fabiola para representar los trazos más gruesos que corresponden a estas dos cuadras? Seguramente coincides en que son **segmentos**.

Observa la figura 2.19, tenemos una recta y hemos ubicado dos puntos A y B en ella. Estos puntos delimitan una parte de la recta.

Figura 2.19

Recuerda la definición de segmento:

> El conjunto formado por los puntos de una recta, que están situados entre dos de sus puntos se denomina **segmento.**
>
> Consideramos también en el segmento a estos dos puntos, que los llamaremos extremos. Los segmentos se denotan con las dos letras mayúsculas de sus extremos, colocando sobre ellas un pequeño guión.

Ejemplo 12:

En la figura 2.19, los puntos A y B de la recta r; determinan al segmento de extremos A y B. De esta forma se denota a dicho segmento como $\overline{AB}$ y se lee "segmento AB".

Ahora podemos utilizar los segmentos para formular una condición que permita asegurar que dos puntos están en un mismo semiplano. Veámosla en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 13:

En la figura 2.20, los puntos C, D, E, F, G, pertenecen al plano λ, en el cual se trazó la recta EF.

Relaciona convenientemente cada una de las siguientes afirmaciones con la posición de los extremos de los segmentos $\overline{CD}$ y $\overline{DG}$ en semiplanos opuestos o en el mismo semiplano con borde en la recta EF:

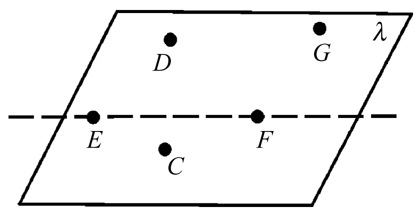


Figura 2.20

i) $\overline{CD} \cap EF \neq \phi$ ii) $\overline{DG} \cap EF \neq \phi$

¿A qué conclusión puedes llegar?

Respuesta:

$\overline{CD} \cap EF \neq \phi$, estos puntos están en semiplanos opuestos respecto a la recta EF.

$\overline{DG} \cap EF \neq \phi$, estos puntos están en el mismo semiplano, respecto a esta recta.

Conclusión:

- Dos puntos situados en semiplanos opuestos determinan un segmento que corta a la recta borde.
- Dos puntos situados en el mismo semiplano determinan un segmento que no corta a la recta borde.

Nota: El símbolo λ es también una letra griega y se llama lambda.

Longitud de un segmento

Todo segmento tiene siempre una **longitud** mayor o igual que cero, determinada por la distancia entre sus extremos. Un **segmento** es **nulo** cuando sus extremos coinciden y su longitud es cero.

Si al superponer dos segmentos coinciden sus extremos, tienen la misma longitud y entonces son ***iguales.*** Cuando esto no sucede son ***desiguales***.

Ejemplo 14:

En la figura 2.21 los segmentos $\overline{AB}$ *y* $\overline{CD}$ son iguales y los segmentos $\overline{CD}$ *y* $\overline{EF}$ son desiguales, es decir:

$\overline{AB} = \overline{CD};\ \overline{AB} \neq \overline{EF};\ \overline{CD} \neq \overline{EF}$

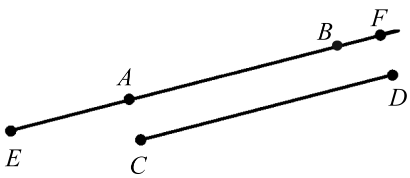


Figura 2.21

Has empleado instrumentos de dibujo para representar rectas, semirrectas y segmentos. Pero también los puedes utilizar para determinar la longitud de un segmento. ¿Cómo? Midiéndolo. Haces coincidir un extremo del segmento que se quiere medir con el punto inicial de la escala que tiene divisiones iguales llamadas unidades de medida. Fíjate ahora en el número positivo más próximo al otro extremo del segmento, que constituye junto a la unidad de medida considerada, el resultado de esta medición que llamamos longitud del segmento.

En la figura 2.22 la longitud del lápiz es 11 cm (centímetros) porque el número positivo que indicó el otro extremo del lápiz fue 11 y las divisiones o unidades iguales tomadas en la regla son centímetros.

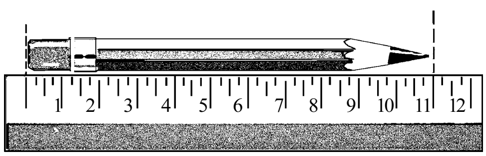


Figura 2.22

Te invitamos a recordar algunas de las propiedades fundamentales relacionadas con los diferentes tipos de segmentos.

Dos **segmentos** son **consecutivos** cuando tienen **solamente un extremo** en **común.**

Ejemplo 15:

En la figura 2.23 los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son consecutivos.

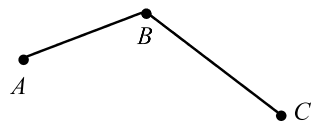


Figura 2.23

Dos **segmentos consecutivos** son **alineados,** cuando están contenidos en la misma recta.

Ejemplo 16:

En la figura 2.24 los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son consecutivos alineados.

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$

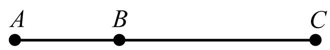


Figura 2.24

Recuerda que:

Para considerar el segmento de longitud suma, de las longitudes de otros dos segmentos, es necesario que estos dos segmentos sean segmentos consecutivos alineados.

Ejemplo 17:

En la figura anterior 2.24, la longitud del segmento $\overline{AC}$ se obtiene sumando las longitudes de los segmentos consecutivos alineados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, es decir que: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Punto medio de un segmento es el punto situado en él, que lo divide en dos segmentos de igual longitud.

Ejemplo 18:

En la figura 2.25, M es el punto medio de $\overline{AB}$.

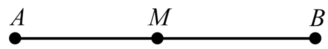


Figura 2.25

$$\left.\begin{array}{l} M \in \overline{AB} \\ \overline{AM} = \overline{MB} \end{array}\right\} M \text{ punto medio de } \overline{AB}$$

Ángulos

El profesor de Matemática de Javier dijo en la clase que en la vida diaria estamos rodeados de ángulos: la abertura de las tijeras forma un ángulo, los bordes que se cortan de la página de este libro, las agujas del reloj también los determinan…, Javier pensó en estos ejemplos de la figura 2.26 y al llegar a su casa le pidió el reloj a su abuelita y comenzó a analizar en las posiciones de las agujas, los diferentes tipos de ángulos que había estudiado. Ahora tendrás la oportunidad de hacerlo tú también aquí.

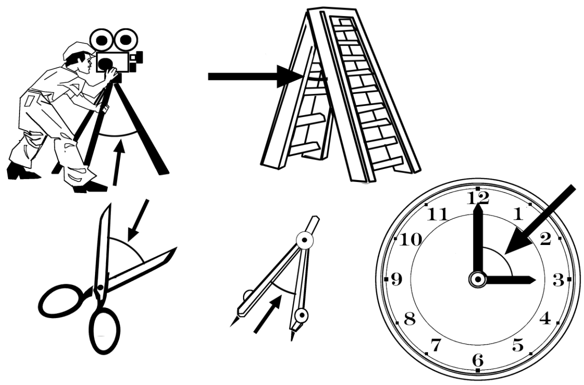


Figura 2.26

Considera dos rectas r y s que se cortan en un punto O, que a su vez es el origen de las semirrectas a, b, contenidas en ellas. El conjunto de puntos que representa respectivamente la unión o intersección de los semiplanos cuyos bordes están determinados por estas rectas, se denomina ***ángulo***.

Las semirrectas a y b se llaman **lados** del ángulo y el punto O, **vértice** del ángulo. El ángulo se denota por $\angle(a, b)$. En la figura 2.27 puedes apreciar su representación:

También se identifica un ángulo con la unión de dos semirrectas de origen común, como observas en la figura 2.28. Sus elementos son también, el vértice: O y lados OA y OB. En este caso, se denota también por $\angle(a, b)$, pero puedes utilizar la notación: $\angle AOB$, si $A \in a$ y $B \in b$.

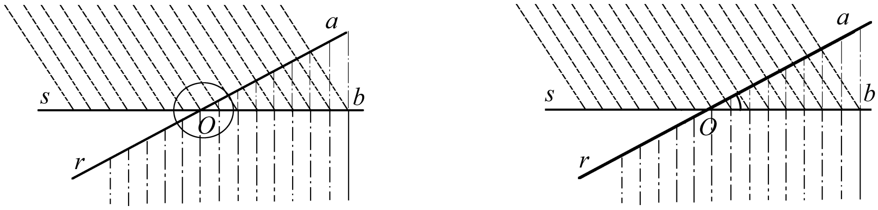


Figura 2.27

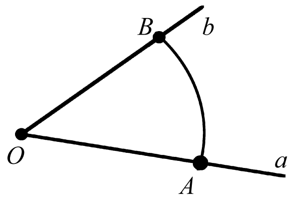


Figura 2.28

Recuerda que:

> Existen diferentes notaciones para denominar los ángulos: tres letras, como en la figura 2.28, las dos semirrectas de sus lados, una letra griega, un número o solamente la letra de su vértice, si no hay dudas de a cuál ángulo te refieres.

Ejemplo 19:

En la figura 2.29 a) $\angle$ *AOB* puede denotarse:

$\angle$ 1 o $\angle$ α o $\angle$ (a,b) o $\angle O$

En la figura 2.29 b) no puede denotarse $\angle$ *A* a ninguno de los tres ángulos representados, porque ¿cuál de ellos tres sería el ángulo al cual te refieres?

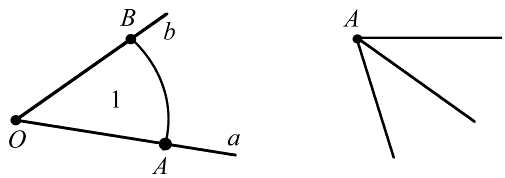


Figura 2.29

Si se fija *b,* como lado inicial y *a,* como lado final, el ángulo $\angle$ $[b, a]$ se denomina: ángulo orientado y se cumple que: $\angle [b, a] \neq \angle [a, b]$

Amplitud de un ángulo

Todo ángulo tiene una medida, por lo general en grados sexagesimales, que se llama **amplitud**, siempre mayor o igual que cero.

- Un ángulo es **nulo** si sus lados coinciden y su amplitud es de cero grado.
- Si el valor de la amplitud de dos ángulos es el mismo, entonces son **iguales** y si eso no sucede son **desiguales**.

Ejemplo 20:

En la figura 2.30 puedes ver representados: un ángulo nulo, dos ángulos iguales y dos ángulos desiguales.

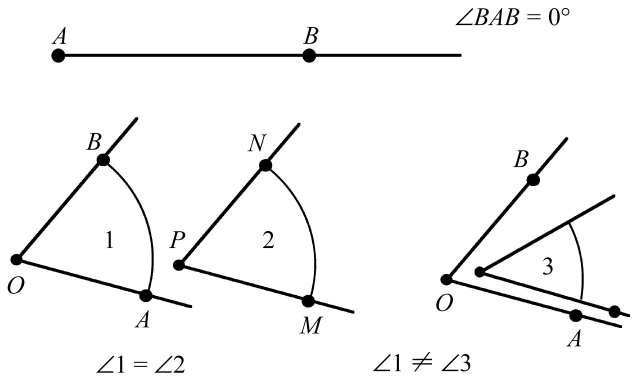


Figura 2.30

El semicírculo se utiliza para determinar la amplitud de un ángulo. ¿Cómo?

Observa cómo en la figura 2.31 se hace coincidir el vértice del ángulo con el centro del semicírculo, de manera que un lado del ángulo pase por el cero de la escala. El número positivo de esta escala por el que pasa el otro lado del ángulo, indica su amplitud en grados. En este ejemplo, el otro lado indicó la división 30°.

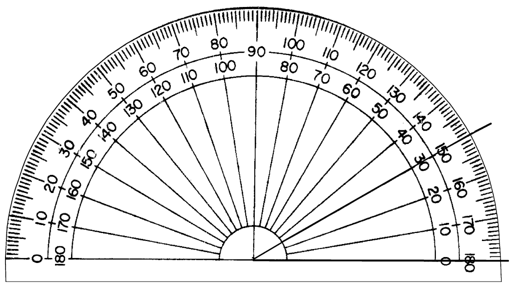


Figura 2.31

Luego, **escribimos**: $\angle AOB = 30°$ y **leemos**: "el ángulo *AOB* tiene una amplitud de 30 grados" o "el ángulo *AOB* mide 30 grados".

Puedes usar el cartabón para trazar solamente ángulos de 30°, 45°, 60° o 90°. Investiga cómo.

Ahora veamos algunos de los ángulos que formó Javier con las agujas del reloj y vamos a clasificarlos según su amplitud.

Ángulo agudo: su amplitud es menor de 90°.

Ejemplo 21:

Observa cuántos ángulos agudos:

a) Las agujas del reloj en la posición de la figura 2.32 han formado un ángulo agudo.

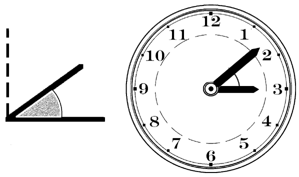


Figura 2.32

b) En la figura 2.33 se aprecia en el ángulo de inclinación del espectacular salto del clavadista camagüeyano Jeinkler Aguirre, un ángulo agudo.[80]

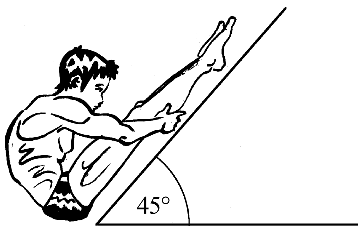


Figura 2.33

c) Observa en la figura 2.34 que el ángulo del aserrado transversal y longitudinal, cuando utilizas correctamente el serrucho, son ángulos agudos.

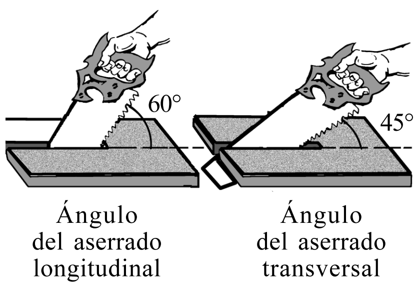


Figura 2.34

[80] Órgano de prensa *Granma,* 16 de junio de 2012.

Ángulo recto: su amplitud es igual a 90°.

Ejemplo 22:

Aquí te presentamos ángulos rectos:

a) ¿Qué hora indica este reloj de la figura 2.35? Sus agujas determinan en esa hora un ángulo recto.

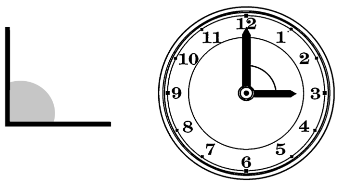


Figura 2.35

b) Si observas atentamente la figura 2.36, las fichas del popular juego de entretenimiento DOMINÓ tienen ángulos rectos en sus “esquinas”.

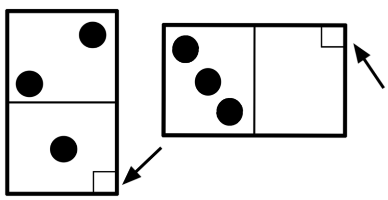


Figura 2.36

c) Los bordes de la carátula de los libros, de sus páginas y de muchos de nuestros materiales docentes, determinan ángulos rectos, como puedes ver también en la figura 2.37.

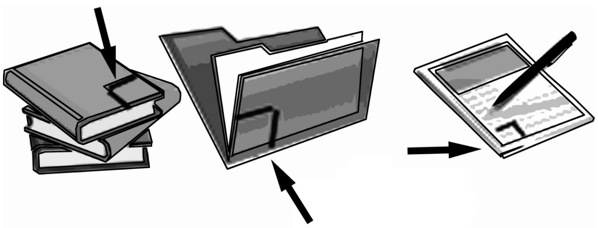


Figura 2.37

Ángulo obtuso: su amplitud es mayor que 90° y menor que 180°.

Ejemplo 23:

a) Las agujas del reloj en la posición de la figura 2.38 forman un ángulo obtuso.

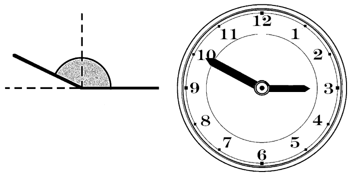


Figura 2.38

b) En la figura 2.39 aparece esta tumbona plástica utilizada en las piscinas y centros turísticos con playa, para descanzar. Ya sabes del ángulo obtuso que se inclinará tu espalda si te recuestas en el verano en una de ellas.

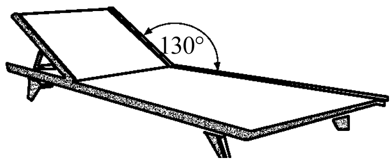


Figura 2.39

Ángulo llano: su amplitud es igual a 180°.

Ejemplo 24:

a) En el reloj de la figura 2.40, las agujas indican un ángulo llano.

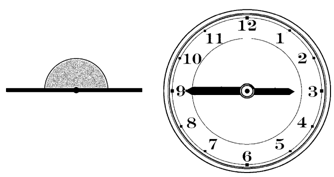


Figura 2.40

b) La figura 2.41 contiene la imagen de Viengsay Valdés, Prima Ballerina del Ballet Nacional de Cuba durante una actuación en la que nos muestra con sus piernas un ángulo llano.

Figura 2.41

Ángulo sobreobtuso: su amplitud es mayor que 180° y menor que 360°.

Ejemplo 25:

a) En el reloj de la figura 2.42, sus agujas indican ahora un ángulo sobreobtuso.

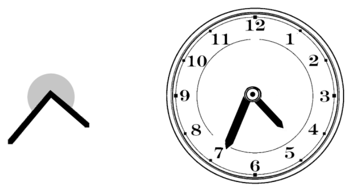


Figura 2.42

b) Una de las posiciones básicas en ballet clásico, el *arabesque,* en la figura 2.43 muestra un ángulo que sobrepasa a los 180°.

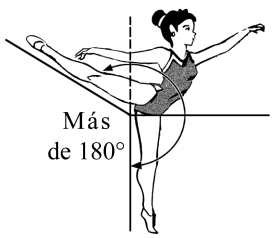


Figura 2.43

Ángulo completo: su amplitud es igual a 360°.

Ejemplo 26:

Observa en la figura 2.44, que tanto las agujas del reloj como el hermoso abanico chino han determinado un ángulo completo.

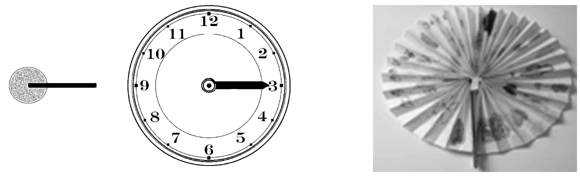


Figura 2.44

Observa los ángulos de las figuras 2.45, 2.46, 2.47 y determina qué características comunes tienen entre ellos:

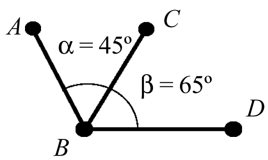


Figura 2.45

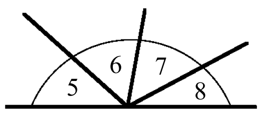


Figura 2.46

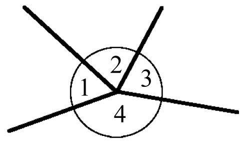


Figura 2.47

En cada una de estas figuras, los ángulos que aparecen tienen el mismo vértice y cada dos ángulos, tienen un lado común. En particular los de la figura 2.46, forman en conjunto un ángulo llano y los de la figura 2.47, forman un ángulo completo.

Recuerda las definiciones de estos tipos de ángulo:

- Los ángulos que están ubicados uno a continuación de otro, con el vértice y un lado en común, se denominan **ángulos consecutivos**. Para determinar el ángulo cuya amplitud es la suma de las amplitudes de otros dos ángulos, esos ángulos tienen que ser consecutivos.
- Los **ángulos consecutivos a un lado de una recta** forman un ángulo llano y sus amplitudes suman 180°.
- Los **ángulos consecutivos alrededor de un punto** forman un ángulo completo y se cumple que sus amplitudes suman 360°.

Ejemplo 27:

a) En la figura 2.45, la amplitud del ángulo *ABD* se obtiene sumando las amplitudes de $\angle ABC$ y $\angle CBD$ que son ángulos consecutivos o sea: $\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD$.
b) En la figura 2.46, los ángulos 5, 6, 7 y 8 son ángulos consecutivos a un lado de una recta, cuyas amplitudes suman 180° y en la figura 2.47, los ángulos 1, 2, 3 y 4 son ángulos consecutivos alrededor de un punto, cuyas amplitudes suman 360°.

Recuerda la definición de ángulos suplementarios y complementarios:

> Toda pareja de ángulos cuyas amplitudes suman 180°, cualquiera sea su posición en el plano, son **ángulos suplementarios** y toda pareja de ángulos cuyas amplitudes suman 90°, cualquiera sea su posición en el plano, son **ángulos complementarios**.

Ejemplo 28:

En la figura 2.48, los ángulos *RQP* y *CAB* son suplementarios y en la figura 2.49, los ángulos *RQP* y *CAB* son complementarios.

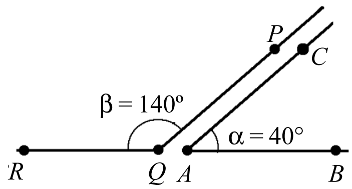


Figura 2.48

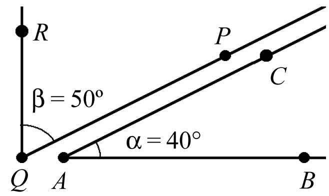


Figura 2.49

Ejemplo 29:

Calcula los valores de los ángulos α, β y γ, con los datos de la figura 2.50, en la cual *a* y *b* son dos rectas que se cortan y diga cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

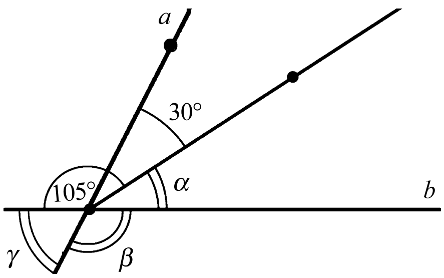


Figura 2.50

1) α es agudo
2) β es sobreobtuso
3) $\gamma = \alpha + 45°$ por ser consecutivos
4) $\gamma + \beta = 180°$

Respuesta:

- $\alpha + 105° = 180°$ por ser dos ángulos consecutivos a un lado de una recta
  $\alpha = 180° - 105° = 75°$
- $\beta + \alpha + 30° = 180°$ por ser tres ángulos consecutivos a un lado de una recta
  $\beta = 180° - (\alpha + 30°) = 180° - (75° + 30°) = 180° - 105° = 75°$
- $\gamma + \beta + \alpha + 105° = 360°$ por ser ángulos consecutivos alrededor de un punto
  $\gamma = 105°$

Con los resultados del cálculo, analicemos las afirmaciones dadas:

1. α es agudo: es correcta porque $\alpha = 75°$ y $75° \angle 90°$
2. β es sobreobtuso: es incorrecta porque $\beta = 75° \angle 180°$
3. $\gamma = \alpha + 45°$ es incorrecta pues $\gamma = \alpha + 45° = 120°$ y $\gamma = 105°$
4. $\gamma + \beta = 180°$: es correcta porque γ y β son adyacentes.

Ejemplo 30:

En la figura 2.51, los puntos *P, R, Q* están situados en la misma recta. Selecciona de las medidas en grados que se dan a continuación, ¿cuál representa la amplitud del ángulo *QRS*?

10°   20°   40°   70°   140°

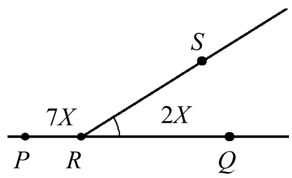


Figura 2.51

Respuesta:

Es fácil reconocer que los ángulos $\angle PRS$ y $\angle SRQ$ son dos ángulos consecutivos a un lado de una recta, por lo que su suma es igual a 180°, es decir: $\angle PRS + \angle SRQ = 180°$.

Si sustituimos cada ángulo por su amplitud, tenemos entonces que:

$7x + 2x = 180°$. Es esta una ecuación que ya sabes resolver, luego:

$$7x + 2x = 180°;\ 9x = 180°;\ x = \frac{180°}{9};\ x = 20°.$$

Sustituyendo x en: $\angle SRQ = 2x$ se obtiene: $\angle QRS = 40°$.

Ejercicios

1. Ubica en tu libreta dos puntos *A* y *B*.
   a) Traza una recta que pase por *B* pero no por *A*.
   b) Traza una recta que pase por *A* y no pase por *B*.
   c) Traza una recta que no pase ni por *A* ni por *B*.

2. Copia en tu libreta las figuras 2.52, 2.53 y 2.54:

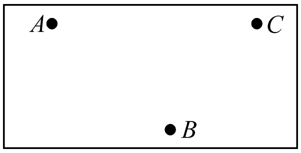


Figura 2.52

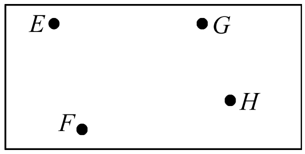


Figura 2.53

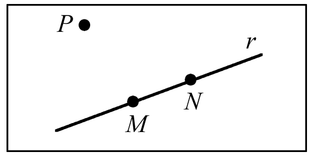


Figura 2.54

a) Traza una recta por cada dos puntos de ambas figuras.
b) ¿Cuántas rectas pudiste trazar en cada figura?
c) Denota cada recta trazada.
d) ¿Cuántas semirrectas diferentes se determinan con los puntos denotados en cada figura?

3. Lee detenidamente esta información:

Una semirrecta está contenida en un semiplano si:

– Tiene su origen en la recta borde y al menos un punto en el semiplano.
– Es paralela a la recta borde y contiene al menos un punto en dicho semiplano.
– Tiene el origen y al menos un punto en el semiplano y no corta a la recta borde.

A partir de la información anterior, traza una recta *r,* considérala el borde de un semiplano y representa las diferentes posibilidades de semirrectas no contenidas en él.

4. a) Denota los puntos de intersección entre las rectas de las figuras 2.55 y 2.56.
   b) Nombra los segmentos que reconozcas en ellas.

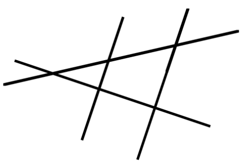


Figura 2.55

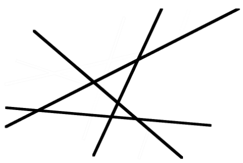


Figura 2.56

5. De las siguientes proposiciones, cuáles son falsas. Conviértelas en verdaderas.

a) Dos puntos determinan una recta única.
b) Por un punto pasa una y solo una recta.
c) La semirrecta tiene principio pero no tiene fin.
d) La recta es limitada.
e) Un segmento es un conjunto de puntos de una recta, limitado por dos puntos.
f) Un punto situado entre los puntos extremos de un segmento es su punto medio.
g) Una recta contenida en un plano, lo divide en semiplanos.

h) Dos segmentos consecutivos no tienen punto común.
i) Si dos puntos diferentes están en el mismo semiplano de borde *r*, el segmento que los une corta a la recta borde *r*.

6. Di cuántas rectas quedan determinadas por los puntos *A, B, C, D, E* si son puntos diferentes y no hay tres de ellos alineados. Dibújalos y fundamenta tu respuesta.

7. ¿Cuántos segmentos quedan determinados por cinco puntos diferentes? Nombra todos los segmentos que veas.

   Sugerencia: diferencia los casos en que los puntos están y no están en una recta.

8. Traza un ángulo *ABC*, considera dentro de él un punto *P* y traza la semirrecta *BP*.

   a) Nombra todos los ángulos que aparecen ahora.
   b) Nombra los que aparecen, si consideras otra semirrecta *BE* interior al $\angle PBC$.

9. ¿Son consecutivos los pares de ángulos α y β en cada una de las figuras 2.57 y 2.58? Fundamenta tu respuesta.

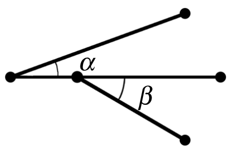


Figura 2.57

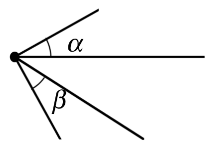


Figura 2.58

10. a) Determina si es posible que algunos de estos ángulos que aparecen en la figura 2.59 se pueden colocar consecutivamente a un lado de una recta. En caso afirmativo realiza todas las combinaciones posibles.
    b) Determina si es posible también que algunos de estos ángulos se puedan situar consecutivamente alrededor de un punto.
    ¿Qué combinaciones de estos ángulos puedes seleccionar para ello?

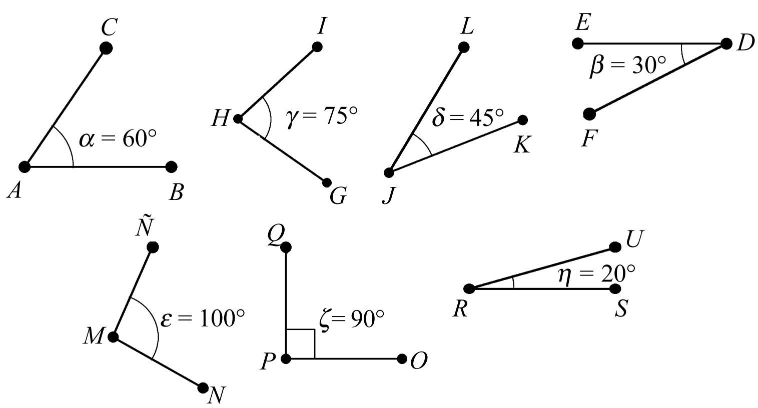


Figura 2.59

11. Fundamenta, cuál de las proposiciones es falsa.

    a) Dos lados de un ángulo recto son perpendiculares.
    b) Un ángulo obtuso tiene mayor medida que su suplemento.
    c) Dos ángulos complementarios entre sí son rectos.

12. La amplitud del ángulo α es el 75 % de la amplitud del ángulo β. Si $\alpha = 72°$, entonces la mitad de la amplitud de β es:

    a) 108° b) 96° c) 72° d) 48° e) 36°

13. Clasifica los ángulos siguientes según su amplitud.

    a) $\angle DEF = 275°$ b) $\angle MNP = 94°$ c) $\angle RST = 180°$ d) $\angle ABC = 56°$
    e) $\angle ABC = 56°$

14. Demuestra que: "La diferencia entre las medidas del suplemento y el complemento de un ángulo cualquiera α es igual a 90°".

2.1.2 La línea poligonal y los polígonos

La siguiente gráfica (fig. 2.60) nos muestra la evolución de la temperatura de un enfermo en un hospital, en algunas horas del día:

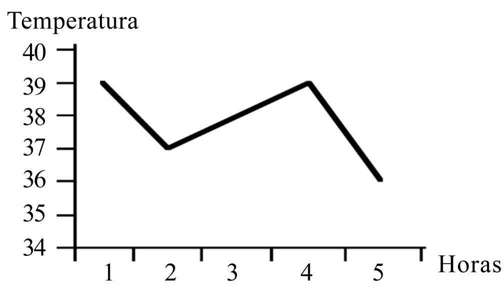


Figura 2.60

¿Qué tipo de gráfico se empleó para representar el comportamiento de la temperatura? Del trabajo con datos conoces que es un gráfico poligonal, a cada hora se le hace corresponder el valor de la temperatura que se señala mediante un punto, los que son unidos mediante segmentos, se forma así la línea poligonal.

¿Qué característica poseen estos segmentos?

R/ Estos segmentos son consecutivos y los denominaremos lados de la poligonal.

En la figura 2.61 se muestra el diseño de una reja de la cual se han señalado dos adornos que constituyen líneas poligonales. Pero, ¿qué características los hacen diferentes?

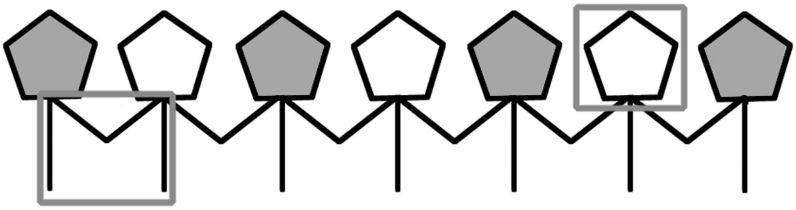


Figura 2.61

En la línea poligonal de la figura 2.62, los extremos no coinciden en un punto, en este caso se dice que la línea poligonal es **abierta**.

En la línea poligonal de la figura 2.63 los extremos coinciden en un punto, se trata por ello de una línea poligonal **cerrada**.

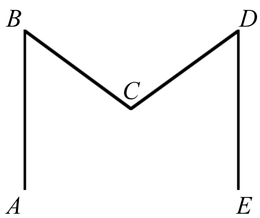


Figura 2.62

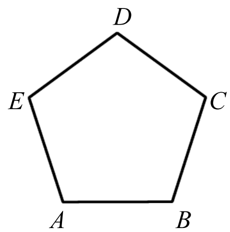


Figura 2.63

Polígono: es la región del plano limitada por una línea poligonal cerrada que incluye a esta poligonal.

En el cielo nocturno estrellado, el ser humano ha imaginado los más diversos polígonos. Te invitamos a que encuentres algunos tú también (fig. 2.64).

Figura 2.64

¿Son polígonos estas dos figuras?

Sí, los dos están limitados por líneas poligonales cerradas. Cópialos en tu libreta y traza en la de la figura 2.65 la recta que contiene al lado *CD* y en la figura 2.66, traza la recta que contiene al lado *UR*. ¿Qué sucede en cada caso?

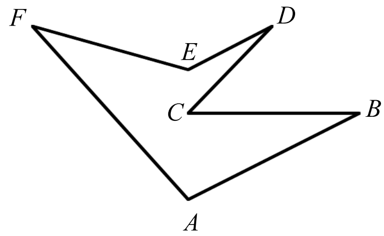


Figura 2.65

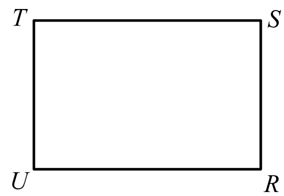


Figura 2.66

Como puedes ver en la figura 2.67, al trazar la recta que contiene a uno de los lados del polígono dibujado, –en este caso, la recta *CD*– el polígono *ABCDEF,* no queda totalmente en el mismo semiplano. Una parte queda en el semiplano de la izquierda respecto a la recta *CD* y la otra parte está en el semiplano de la derecha.

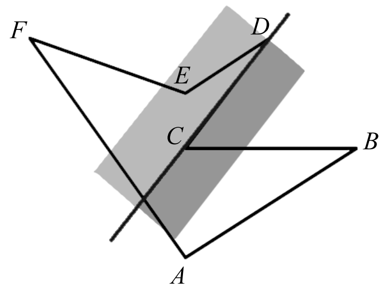


Figura 2.67

Sin embargo, en la figura 2.68, al trazar la recta *UR,* al igual que cualesquiera de las rectas que contienen a alguno de los lados del polígono *URST,* el polígono queda totalmente en uno de los semiplanos determinados por esa recta.

Figura 2.68

Aquí se ilustró lo que sucedió con el lado $\overline{UR}$. Puedes observar que el polígono queda totalmente contenido en el semiplano superior de la recta *UR*.

Recuerda la definición de polígono convexo:

El polígono que al trazar la recta que contiene a cualquiera de sus lados, queda totalmente contenido en uno de los dos semiplanos determinados por esta recta, lo denominamos polígono convexo.

Vamos a identificar en la figura 2.69 los elementos fundamentales de los polígonos convexos:

Elementos	**Descripción**
Lados: $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CD}$; $\overline{DE}$, $\overline{EA}$	Segmento que une dos vértices consecutivos (lados de la poligonal).
Ángulos interiores: $\angle A$; $\angle B$; $\angle C$; $\angle D$; $\angle E$	Ángulo determinado por cada dos lados consecutivos.
Vértices: A; B; C; D, E	Punto de intersección de dos lados.
Diagonales: $\overline{AC}$; $\overline{BD}$; $\overline{CE}$; $\overline{DA}$, $\overline{EB}$	Segmento que une dos vértices no consecutivos.
Ángulos exteriores $\angle CBF$ y $\angle DCG$ son ángulos exteriores (fig. 2.70)	Ángulo adyacente a un ángulo interior del polígono, formado en cada vértice por un lado y la prolongación de un lado consecutivo a él.

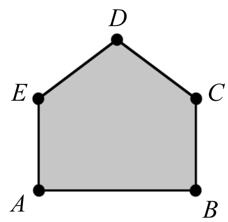


Figura 2.69

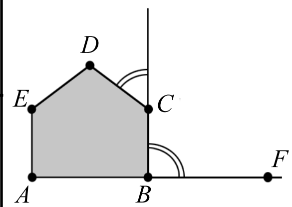


Figura 2.70

A cada polígono le corresponde un nombre diferente según la cantidad de lados que tiene. ¿Qué nombre le corresponderá al polígono de la figura 2.66 que tiene cuatro lados y el de la figura 2.69, que tiene cinco lados? Aquí puedes leer los nombres de los polígonos según sus lados:

Triángulo (3 lados)	Heptágono (7 lados)	Endecágono (11 lados)
Cuadrilátero (4 lados)	Octágono (8 lados)	Dodecágono (12 lados)
Pentágono (5 lados)	Eneágono (9 lados)	Pentadecágono (15 lados)
Exágono (6 lados)	Decágono (10 lados)	Icocágono (20 lados)

Has observado los panales de las abejas. ¿Cuántos lados tienen los polígonos que los conforman? ¿Son iguales los lados de estos polígonos?

Los panales de las abejas son exágonos y todos sus lados son iguales. Sus ángulos interiores también son iguales (fig. 2.71).

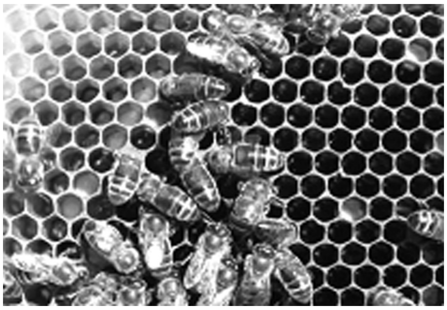


Figura 2.71

Recuerda que:

Los polígonos que tienen sus lados y sus ángulos iguales se denominan **polígonos regulares** y decimos que son equiláteros y equiángulos (el prefijo **equi** significa igual). Se nombran añadiéndole la palabra regular al nombre que tiene el polígono según la cantidad de lados.

Ejemplo 1:

Un polígono de seis lados y seis ángulos, como en la figura 2.72 eso se llama: **exágono regular** *ABCDEF.*

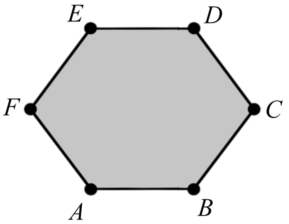


Figura 2.72

¿Cuál es el polígono que tiene la menor cantidad de lados? El triángulo, que no por ser el polígono de solamente tres lados, deja de ser interesante.

El triángulo es una figura geométrica de gran aplicación práctica, por su rigidez. Por eso los objetos de forma triangular tienen más fortaleza. ¿Qué significa esto?

Toma tres piezas de madera y únelas con tornillos, dos a dos, como aparecen en la figura 2.73.

No puedes cambiar esa forma a menos que encorvemos las piezas.

¡Compruébalo tú también!

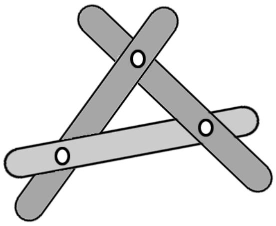


Figura 2.73

Esta propiedad de la rigidez o "dureza del triángulo", como también suele llamársele, se aplica en las obras de ingeniería y arquitectura. Estructuras metálicas, puentes, postes y armazones de edificios se construyen a partir de triángulos (fig 2.74).

Figura 2.74

¿Ocurrirá así en los cuadriláteros y polígonos de más de tres lados?

Une ahora cuatro piezas de igual manera y verás que su forma cuadrangular se puede cambiar al ejercer una fuerza suficiente sobre cada madero, sin encorvar ni quebrar dichas piezas (fig. 2.75).

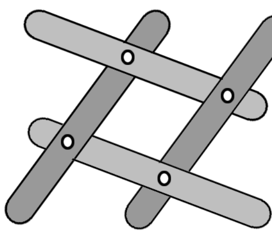


Figura 2.75

¿Cómo lograr la rigidez en otros polígonos? Más adelante veremos cómo.

¡De detectives!

Cuentan que un famoso investigador policial preguntó a un sospechoso de asesinato, que sorprendió en el lugar de los hechos (fig. 2.76):

– "¿Qué hace usted en la escena del crimen?"
– "¿Yo?, trataba de arreglar esta mesa que cojeaba", respondió él,

Figura 2.76

A lo que el investigador, un gran estudioso de la geometría, respondió que la mesa de tres patas nunca cojea, así que usted está mintiendo.

Esta es otra aplicación del triángulo: "tres puntos no alineados determinan un plano", tres puntos no alineados, nos hacen pensar en un triángulo.

Un triángulo es el polígono que tiene tres lados (fig. 2.77). Sus elementos son:

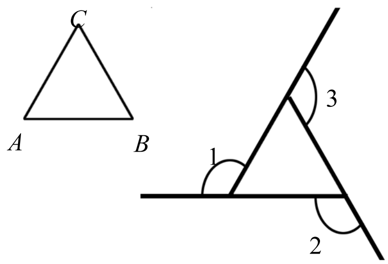


Figura 2.77

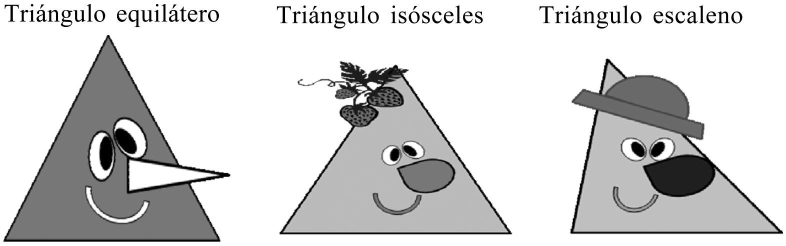
- Vértices: A, B y C.
- Lados: $\overline{AB}; \overline{BC}\ y\ \overline{AC}$.
- Ángulos interiores: $\angle A$; $\angle B$ y $\angle C$.
- Ángulos exteriores: $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 3$

Notación: $\Delta\ ABC$

La longitud de los lados de un triángulo es un parámetro para clasificarlos.

Tipos de triángulos según la longitud de sus lados

Triángulo equilátero	Triángulo isósceles	Triángulo escaleno



Tres lados iguales	Dos lados iguales	Tres lados son desiguales

Figura 2.78

Este análisis también puedes hacerlo con un diagrama de Venn (fig. 2.79).

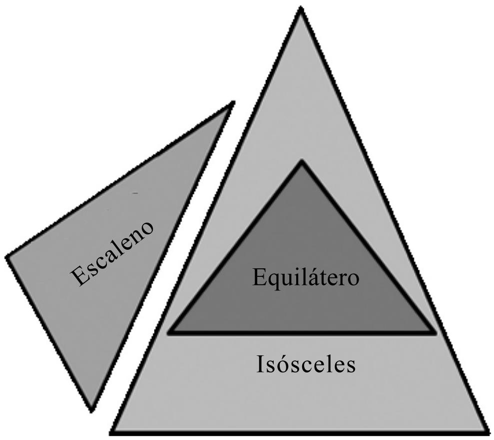


Figura 2.79

Al recordar las relaciones entre conjuntos confirmas que no existe un triángulo que sea escaleno e isósceles, pues estos conjuntos son disjuntos. Sin embargo, ¿crees tú que un triángulo isósceles sea necesariamente equilátero?

Todos los triángulos equiláteros son isósceles, el conjunto de los triángulos equiláteros es un subconjunto del conjunto de los triángulos isósceles. Pero algunos triángulos isósceles no cumplen todas las exigencias de los triángulos equiláteros, por eso el conjunto de los triángulos isósceles no es un subconjunto del conjunto de los triángulos equiláteros, sino a la inversa, el conjunto de los triángulos equiláteros está contenido en el conjunto de los triángulos isósceles.

Veamos otros tipos de triángulos, pero ahora según la amplitud de sus ángulos interiores (fig. 2.80):

Tipos de triángulos atendiendo a la amplitud de sus ángulos

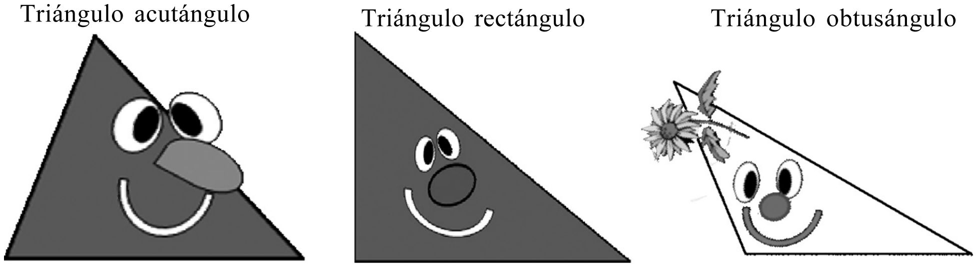


Figura 2.80

Podemos ilustrar la relación entre este tipo de triángulos mediante un diagrama conjuntista (fig. 281):

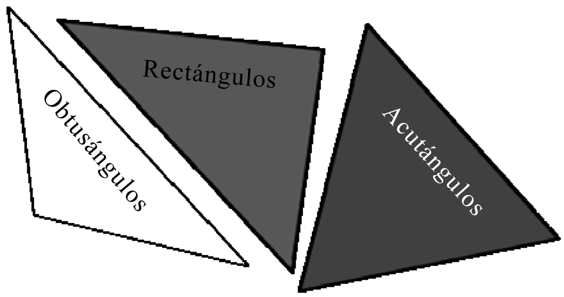


Figura 2.81

La intersección de estos tres conjuntos es el vacío, por eso no puede existir un triángulo que tenga las dos denominaciones a la vez.

Representa en el plano cuatro puntos: *A, B, C, D* de los cuales tres no estén situados en una misma recta. Únelos de distintas maneras, formando poligonales cerradas de cuatro segmentos. ¿Cuántas figuras diferentes obtuviste? ¿Cuáles son similares a las trazadas en la figura 2.82?

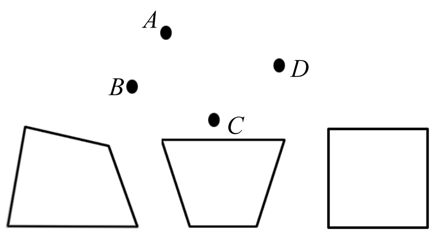


Figura 2.82

¿Todas son polígonos convexos de cuatro lados? ¿Te has fijado en la forma del terreno donde se practica béisbol? ¿Qué nombre recibe el lugar donde se realizan peleas de boxeo? (fig. 2.83)

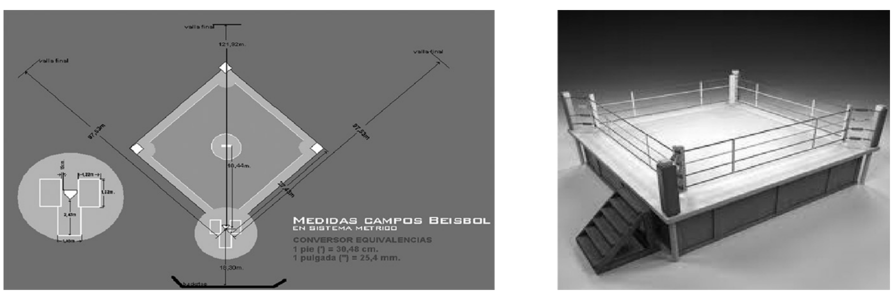


Figura 2.83

3SB019 Cap 2.pmd 229 01/11/2013, 4:13

Efectivamente tienen forma de cuadrilátero, polígono de cuatro lados. Si observas a tu alrededor te percatas de que esta figura también constituye una forma geométrica básica de nuestra civilización y de considerable importancia para la matemática.

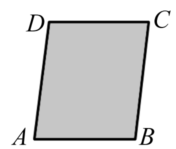
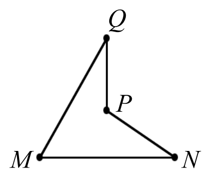
Recuerda que:

Se llama cuadrilátero convexo al polígono convexo de cuatro lados.

¿Qué hacer para que no se deforme un cuadrilátero?

Uno de los elementos del cuadrilátero, que se cita en la tabla 2.1, puede utilizarse para resolver el problema práctico a que se refiere esta interrogante.

Tabla 2.1

Elementos de un cuadrilátero convexo		
Lados: $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CD}$; $\overline{DA}$	Segmento que une dos vértices consecutivos.	
Ángulos interiores: $\angle A$; $\angle B$; $\angle C$; $\angle D$	Ángulo determinado por dos lados consecutivos.	*ABCD* CONVEXO 
Vértices: A; B; C; D	Punto de intersección de dos lados.	
Diagonales: $\overline{AC}$; $\overline{BD}$	Segmento que une dos vértices no consecutivos.	*MNPQ* NO CONVEXO
Lados opuestos: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$	Lados que no tienen vértices comunes.	
Lados consecutivos: $\overline{AB}$ y $\overline{BD}$	Lados con un vértice común	Figura 2.84
Ángulo exterior: $\angle CBF$	Adyacente a un interior.	
Ángulos opuestos: $\angle A$ y $\angle C$	Ángulos interiores cuyos vértices son extremos de una diagonal.	
Ángulos consecutivos: $\angle A$ y $\angle B$	Ángulos interiores cuyos vértices son extremos de un lado).	

Debemos fijarle una pieza intermedia, es decir: ¡una diagonal! Y aquí vuelve a prevalecer la rigidez del triángulo, ya que de este modo se obtienen dos triángulos, que son indeformables. Para lograr la rigidez de un polígono es suficiente trazar cuantas diagonales se necesiten para descomponerlo en triángulos y que así no se deforme.

¿Has observado cuando un albañil pone el marco de una ventana, que le fija unas tablas que le llama "travesaños"? Ellas no son más que las diagonales del "rectángulo" que representa ese marco (fig. 2.85).

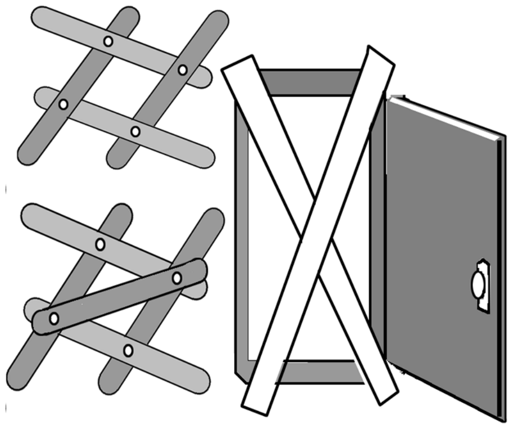


Figura 2.85

Este recurso se aplica en la vida práctica, en la construcción de torres, puentes, en andamios y en diferentes estructuras, figura 2.86.

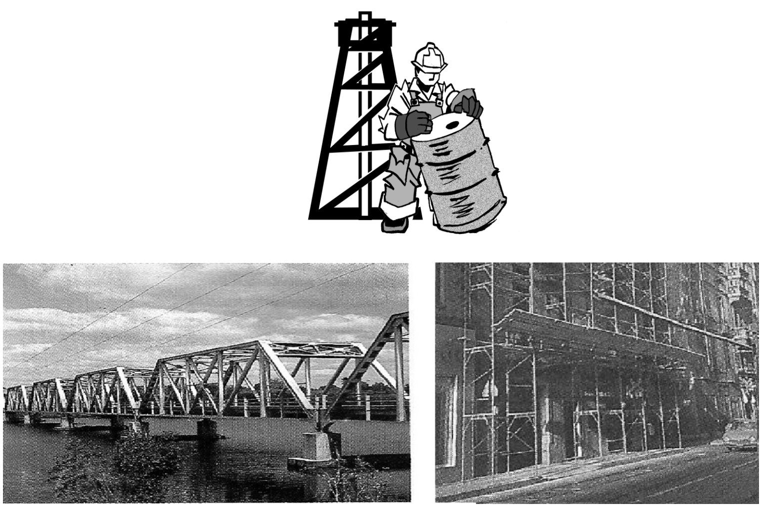


Figura 2.86

Un profesor de Matemática dejó de tarea, completar la tabla 2.2 sobre cuadriláteros:

Tabla 2.2

Cuadrilátero	**Dos pares de lados paralelos**	**Solo dos lados paralelos**	**Sin lados paralelos**
Paralelogramo			
Trapecio			
Trapezoide			

Al analizar la tabla te percatas de que el tipo de cuadrilátero depende del paralelismo de sus lados opuestos. Como el número de lados es par, se tiene en cuenta el hecho de que alguno de los dos pares de lados opuestos o ambos pares, sean o no paralelos.

Recuerda que:

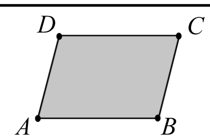
<table>
<tr><td colspan="2">Atendiendo al paralelismo de los lados opuestos, los cuadriláteros convexos se clasifican en: trapecios y trapezoides.</td></tr>
<tr><td>El cuadrilátero convexo que tiene sus lados opuestos paralelos se denomina paralelogramo.</td><td>

Figura 2.87

$\overline{AB} // \overline{DC}$

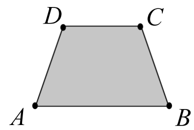
$\overline{BC} // \overline{AD}$</td></tr>
<tr><td>El cuadrilátero convexo que tiene un par de lados opuestos paralelos se nombra trapecio.</td><td>

Figura 2.88

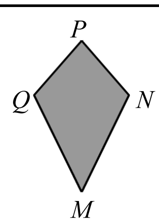
$\overline{AB} // \overline{DC}$</td></tr>
<tr><td>El cuadrilátero convexo que no tiene lados paralelos se llama trapezoide.</td><td>

Figura 2.89</td></tr>
</table>

Estas relaciones se resumen en el siguiente diagrama (fig. 2.90):

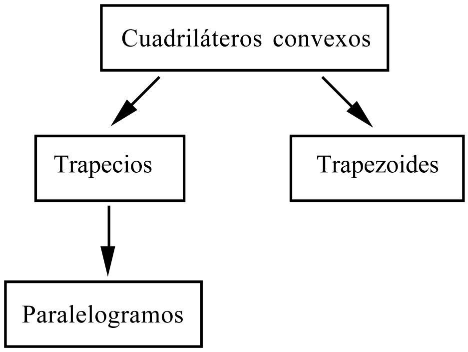


Figura 2.90

Ahora intenta completar la tabla 2.2 que quedaría así:

Cuadrilátero	**Dos pares de lados paralelos**	**Solo dos lados paralelos**	**Sin lados paralelos**
Paralelogramo	X		
Trapecio		X	
Trapezoide			X

Aquí puedes ver una página de una edición impresa de Los Elementos *de Euclides (fig. 2.91), hecha en Venecia, en el año 1509. Observa en ella ángulos, triángulos y cuadriláteros, cuyas figuras más abajo se amplían para que puedas apreciarlas mejor. Es una lástima que no podamos también leerla porque está escrita en griego. ¿Te atreves a partir de lo que observas decir qué criterio se tuvo en cuenta en esta interesante clasificación de triángulos y cuadriláteros? (fig. 2.92)*

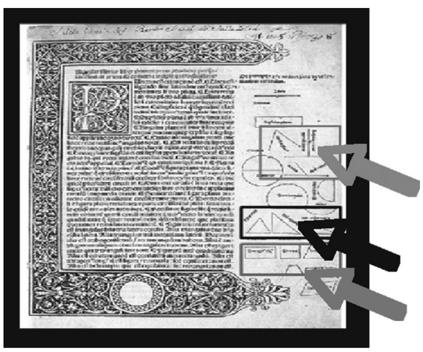


Figura 2.91

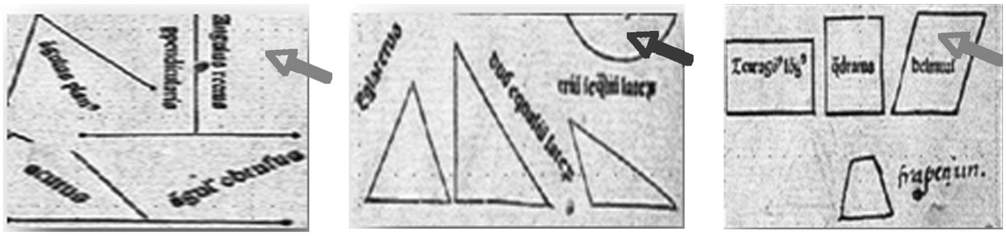


Figura 2.92

¡Utiliza el procesador de texto *Word* para dibujar figuras geométricas!
Si trabajas con el *Word* 1997-2003 realiza estas acciones:

- Selecciona en la barra herramientas el menú **Dibujo.** Al hacerlo se despliega una cinta de opciones en la parte inferior de la pantalla, como en la figura 2.93.
- Da clic ahora en **Autoformas.**
- Selecciona allí: **Formas básicas** y finalmente da clic en la figura geométrica que quieras dibujar.

Cuando recientemente has trabajado con alguna figura geométrica, esta aparece al lado de **Autoformas** y solo tienes que dar clic en ella. Este caso es muy fácil de identificar, en la figura 2.93 puedes ver las formas geométricas que te señalamos con la flecha, al lado del menú de Autoformas.

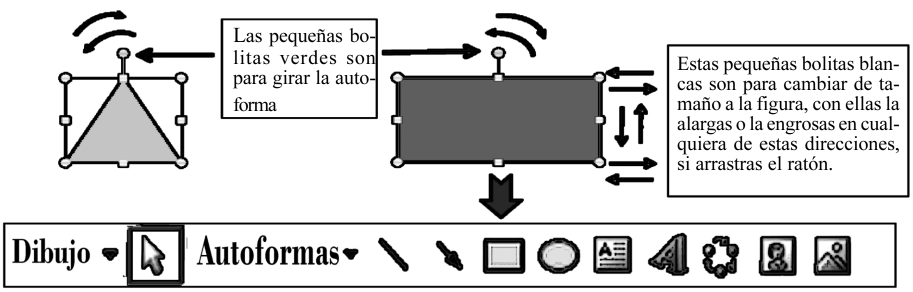


Figura 2.93

Si trabajas con el *Word* 2007, puedes seguir estos pasos:

- Selecciona en la barra herramientas el menú **Insertar.**
- Después dar clic en la opción **Formas** y finalmente da clic en la figura deseada.

Puedes cambiar la figura de tamaño. ¿Cómo? Cuando activas una figura con un clic sobre ella, aparecen en los vértices pequeñas bolitas blancas, que arrastrando desde allí el ratón, en dirección hacia dónde quieres ampliar u disminuir su tamaño.

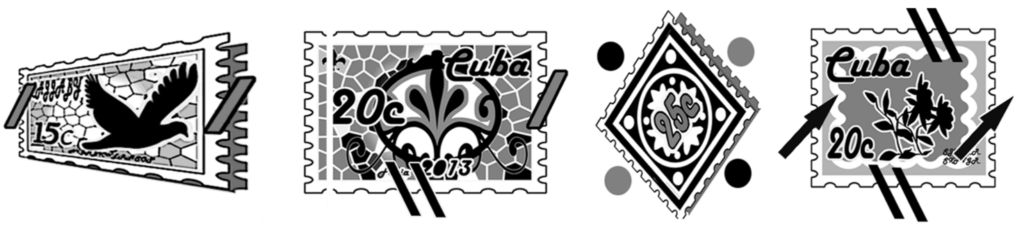
> Te señalamos en la figura 2.93 estas direcciones con pequeñas flechas negras y el botón de giro.
>
> Puedes también cambiar el color, con el menú **Formato** de la barra de herramientas, accediendo a **Relleno de forma** y finalmente, se elige el color deseado en **colores del tema.**
>
> Ahora te invitamos a que hagas un esquema **a todo color** con las figuras estudiadas y sus propiedades.

Ejercicios

1. Traza las líneas poligonales que se indican, denótalas y nombra sus elementos en cada caso.

   a) Una línea poligonal abierta de seis lados.
   b) Una línea poligonal cerrada de cinco lados que no determine un polígono convexo.
   c) Una línea poligonal cerrada de cuatro lados que determine un polígono regular.

2. Un filatelista colecciona sellos que tienen forma de diferentes tipos de cuadrilátero (fig. 2.94). Observa atentamente estas estampillas postales y trata de clasificarlas para su álbum, según el tipo de cuadrilátero que representan, teniendo en cuenta que los lados paralelos entre sí de las estampillas postales se señalaron con la misma marca. Pero, analiza también, ¿son suficientes en todos los casos, los datos dados, para hacer esa clasificación?



A B C D

Figura 2.94

3. ¿Puede ser regular un polígono que no sea convexo? Argumenta tu respuesta.

4. Valora esta otra definición de polígono convexo que suele aparecer en otros textos de geometría plana:

   “Un polígono se llama convexo si contiene completamente al segmento que une dos de sus puntos cualesquiera”.

5. Esta obra es del cubano José Villa (1950), uno de los escultores más importantes de Cuba, se llama Espiral [81] ¿En qué tipo de poligonal te hace pensar la figura 2.95?, ¿por qué?

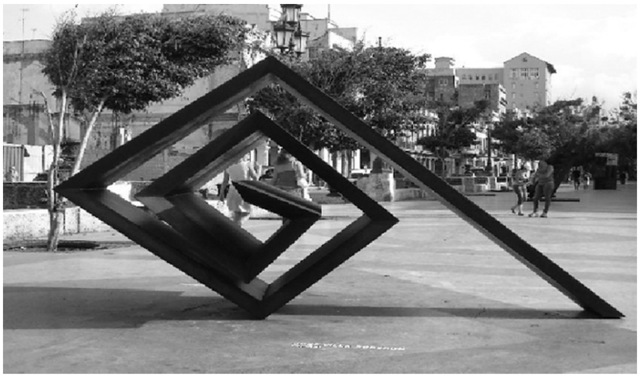


Figura 2.95

6. Trabaja con el asistente matemático *Geómetra,* construye varios triángulos, mide sus lados y ángulos y agrúpalos según los tipos de triángulos estudiados.

7. Escribe el nombre de cada polígono y determina cuáles son convexos (fig. 296).

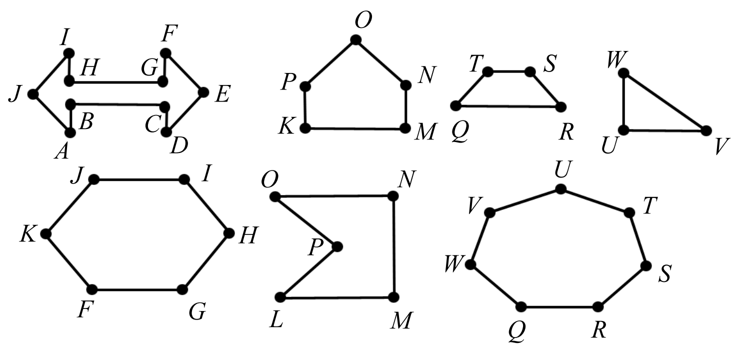
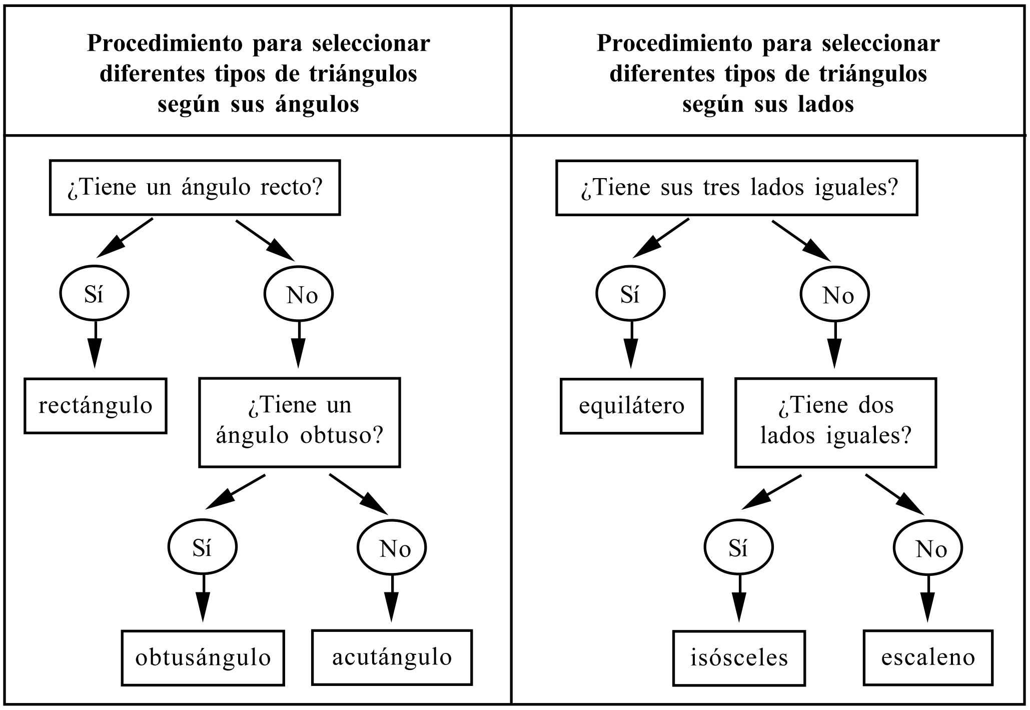


Figura 2.96

8. Después de estudiar los tipos de triángulos según sus lados y según sus ángulos, Clara elaboró un procedimiento para seleccionar diferentes tipos de triángulos, el cual aparece en el siguiente esquema:

[81] Nerys Pupo: *Vamos a disfrutar del arte,* 2008.



a) ¿Estás de acuerdo con Clara? Justifica tu respuesta.
b) Crea tú mismo un procedimiento que permita clasificar ángulos según sus amplitudes.
c) Crea un procedimiento que permita clasificar cuadriláteros.

9. Descifra estas adivinanzas:

“Dedicadas al menor”[82]

I

Latero significa lado
y equi significa igual,
y el triángulo del que hablo
tú lo descubriste ya.

II

Sus tres lados diferentes,
dice seguro Diosdado,
y el triángulo del que hablo,
ya tú lo has clasificado.

III

Dos lados iguales son
y no admito confusión
en la clasificación.

IV

Tengo yo un ángulo recto.
¡Solo uno puedo tener!
Y si tú no me descubres,
mucho tienes que aprender.

[82] MSc. Rita María Cantero Pérez.

10. Observa los siguientes triángulos y clasifícalos según las características dadas (fig. 2.97):

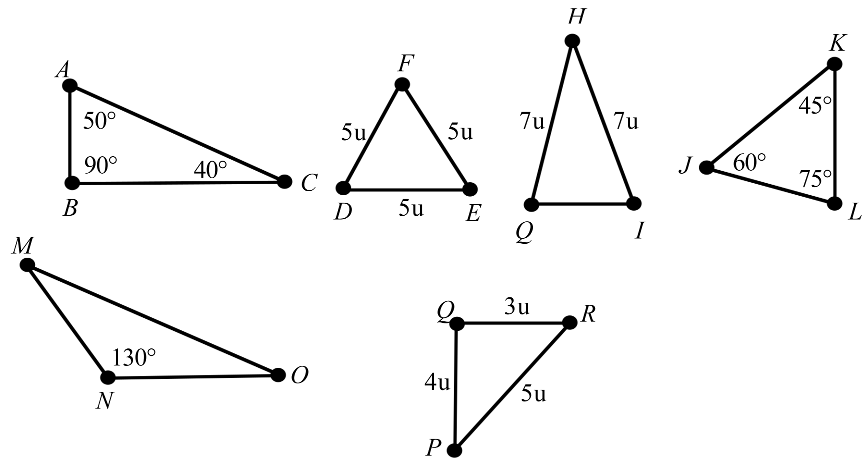


Figura 2.97

2.2 Relaciones de posición en el plano

Desde esta vista del casco histórico de La Habana, que aparece en la figura 2.98, puedes apreciar bellas construcciones de la etapa colonial.

Figura 2.98

Como elementos arquitectónicos que las distinguen, se observan en ellas vitrales y rejas, las cuales contienen variadas formas geométricas.

Si te fijas en la figura 2.99, en otras obras arquitectónicas más modernas, también aparecen diferentes formas geométricas.

Figura 2.99

Pero ¿te has puesto a pensar cómo lograr que estas construcciones tengan la forma precisa? Ingenieros y arquitectos diseñan previamente las obras que se van a realizar y en ello la geometría tiene un papel importante (fig. 2.100).

El proyecto de una obra requiere de la construcción de paralelas, perpendiculares y de otros trazos, en los que se aplican propiedades geométricas, que se aprenden en la matemática escolar y que estudiarás en este epígrafe.

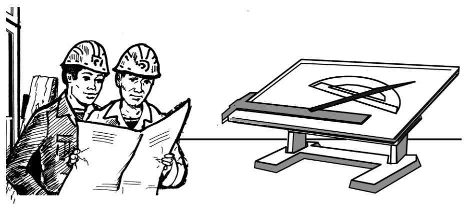


Figura 2.100

2.2.1 Posiciones relativas de dos rectas del plano

Para estudiar las construcciones geométricas básicas necesitamos precisar primero cuáles son las posiciones fundamentales que ocupan los puntos respecto a las rectas y las rectas entre sí.

Considera un punto P y una recta r del plano, ¿qué posición puede ocupar el punto P respecto a la recta r? Efectivamente, existen solo dos posibilidades:

1. El punto P está contenido en la recta r o el punto pertenece a la recta y para denotarlo utilizamos el símbolo "$\in$" (fig. 2.101). Escribimos: $P \in r$ y leemos: **"el punto P pertenece a la recta r"**.

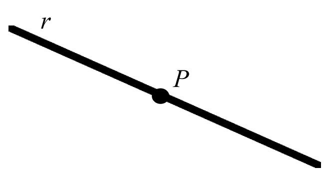


Figura 2.101

2. El punto P está situado fuera de la recta r o es un punto exterior a ella (fig. 2.102), en este caso escribimos: $P \in r$ y leemos: **"el punto P no pertenece a la recta r"**.

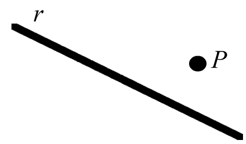


Figura 2.102

Ahora bien, si nos referimos a dos rectas del plano, ¿qué relaciones de posición están determinadas?

1. Las rectas r y s coinciden (fig. 2.103), entonces escribimos: $r = s$, en este caso las rectas coinciden en todos sus puntos.

Figura 2.103

2. Las rectas r y s no tienen puntos comunes (fig. 2.104), entonces escribimos: $r \cap s = \phi$

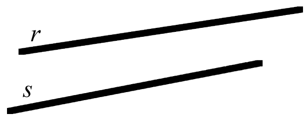


Figura 2.104

En ambos casos decimos que las rectas son **paralelas** y escribimos: $r \parallel s$

Recuerda la definición de rectas paralelas:

Dos rectas son paralelas si y solo si coinciden o no tienen puntos comunes.

3. Las rectas r y s tienen un punto común o se cortan en un punto (fig. 2.105), estas rectas se denominan **secantes,** entonces escribimos: $r \nparallel s$ o $r \cap s = \{P\}$

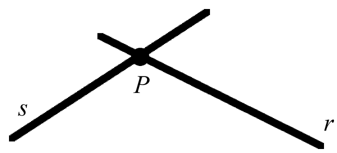


Figura 2.105

Recuerda la definición de rectas secantes:

Dos rectas son secantes si y solo si tienen un único punto común.

Un caso particular de las rectas secantes se tiene cuando las rectas al cortarse determinan al menos un ángulo cuya amplitud es de 90°, las rectas entonces se llaman perpendiculares y esa relación entre las dos rectas se denota con el símbolo: $\perp$

Ejemplo 1:

En la figura 2.106 las rectas r y s son perpendiculares y esa relación en este caso se denota por: $r \perp s$

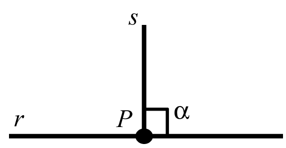


Figura 2.106

Recuerda la definición de rectas perpendiculares:

Dos rectas son perpendiculares si y solo si al cortarse en un punto determinan al menos un ángulo recto.

En el siguiente esquema se resumen las posiciones relativas de dos rectas del plano:

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

- **PARALELAS**
  - **PARALELAS COINCIDENTES** (o iguales) Todos sus puntos son comunes
  - **PARALELAS NO COINCIDENTES** (o paralelas diferentes) No tiene puntos comunes
- **SE CORTAN**
  - **SE CORTAN EN UN PUNTO FORMANDO UN ÁNGULO** (Puede ser recto o de cualquier amplitud) Tienen un único punto común

Observa en la figura 2.107 la pared azulejada de una cafetería. ¿Cómo es posible que las líneas de separación entre los azulejos blancos y negros parezcan curvas? Ello produjo gran desconcierto entre los clientes y dio fama al lugar en la década del setenta del siglo XX.[83]

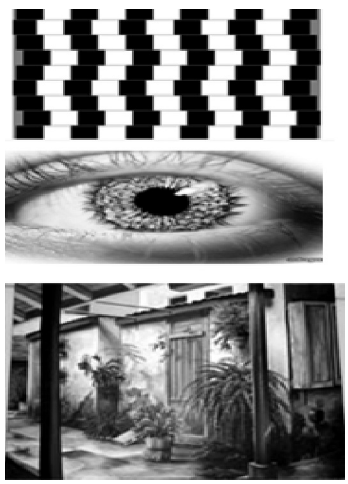


Figura 2.107

[83] Imagen tomada de la obra "A través de los ojos" de Ernesto Altshuler, 2002.

La ilusión óptica ocurre por determinadas propiedades de un fenómeno que "impresionan" al ojo humano normal. La figura 2.107 también muestra una pintura en la cual la posición de las vigas del techo da una idea tridimensional en la imagen.[84]

"Los pintores son los que con más frecuencia saben convertir en provechosa una percepción ilusoria general. En ello se basa todo el arte pictórico", escribió en el siglo XVIII el insigne matemático Euler. En el estudio de la geometría no podemos confiar en lo que vemos, sino en los datos dados.

Ejercicios

1. Investiga en la biblioteca, en la enciclopedia Encarta y en otras fuentes de consulta, datos sobre la vida del matemático Leonard Euler y sus apreciaciones acerca de las ilusiones ópticas. Pregunta a tu profesor de Física, dónde puedes profundizar en esta temática.
2. Dadas las siguientes representaciones de la figura 2.108, identifica todas las relaciones de posición que observas entre un punto y una recta o entre dos rectas.

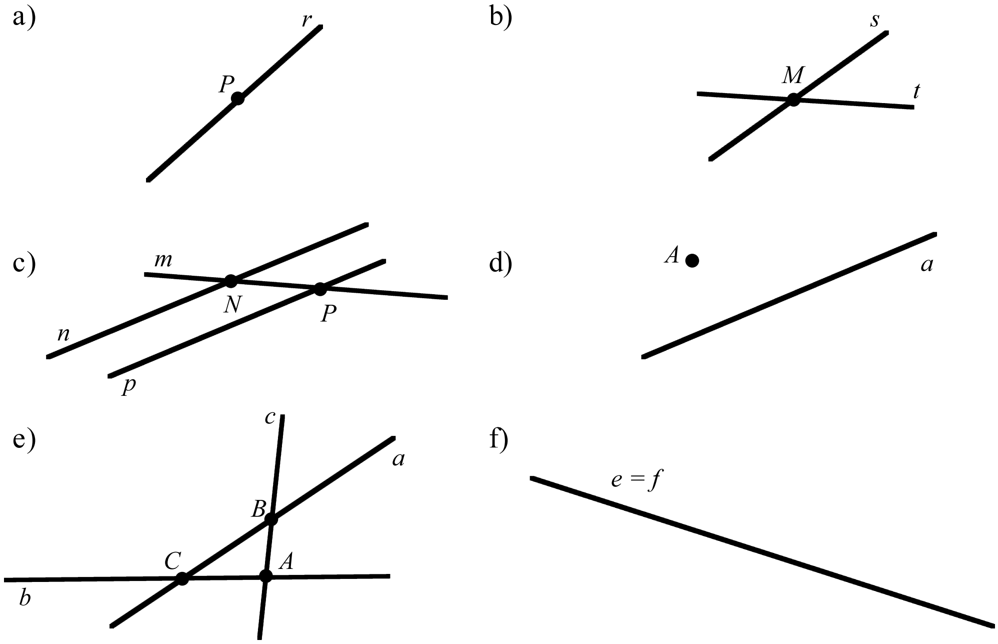


Figura 2.108

3. Ilustra gráficamente todas las posibilidades que puedan ocurrir respecto a la posición de una recta y dos puntos.

[84] Obra "Casa de Antonia Eiriz" del artista cubano Jorge Guanche. Museo de San Miguel del Padrón.

4. Confecciona un esquema sobre todos los casos de la posición relativa de tres rectas cualesquiera del plano, similar al de las posiciones relativas de dos rectas.

5. Dados tres puntos en las posiciones a) y b), ¿Cuántas rectas puedes trazar en cada caso?

5.1 Por dos puntos.

5.2 Por tres puntos (fig. 2.109).

Figura 2.109

6. Dos carros transitan con la misma velocidad constante por dos carreteras que en todo momento están a igual distancia una de la otra. Di si las carreteras son:

   a) Perpendiculares b) Paralelas c) Coincidentes d) Se cortan

7.* Demuestra que si para dos rectas a y b se cumple que $a \mid\mid b$ entonces $b \mid\mid a$. (Simetría del paralelismo de rectas)

8.* Demuestra que si dos rectas r y s tienen dos puntos comunes diferentes entonces son iguales.

9.* Demuestra que dos rectas diferentes a y b tienen a lo sumo un punto común P.

10. Traza dos rectas d y e de modo que: $d \mid\mid e$ y considera una recta f tal que d y f se corten en un punto P. ¿Cuál es la posición relativa entre las rectas e y f? Repite este análisis con otras tres rectas. Elabora conclusiones acerca de ello.

2.2.2 Construcciones geométricas elementales

Después de conocer cuáles son las posiciones relativas de dos rectas solo falta saber cómo trazarlas con exactitud y para ello necesitaremos usar los instrumentos de dibujo. Los que utilizas en la escuela son la regla, el cartabón y el compás. Estos se emplean para resolver problemas de construcción, es decir, para encontrar determinados elementos como puntos, segmentos, rectas, circunferencias, etc., que deben satisfacer ciertas condiciones, relacionadas con otros elementos dados en el planteamiento del problema.

En el proceso de resolución de un problema encuentras con frecuencia que necesitas resolver otras construcciones más sencillas. Por ejemplo, para construir un cuadrado hay que trazar rectas paralelas y rectas perpendiculares. Precisamente son estas construcciones, llamadas elementales, las que aprenderás a realizar a continuación.

1. Construcción de la paralela a una recta por un punto exterior a ella

Descripción de la construcción

Sea *r* una recta y *G* un punto que no pertenece a la recta *r* (fig. 2.110).

a) Se coloca un cartabón por uno de los lados que son perpendiculares sobre la recta *r* y la regla sobre otro lado perpendicular del cartabón.
b) Se desliza el cartabón a lo largo de la regla hasta que el lado colocado sobre la recta *r* pase por el punto *G*.
c) Se traza la paralela buscada, *p*, a lo largo del lado que no determina el ángulo recto del cartabón que pasa por *G*.

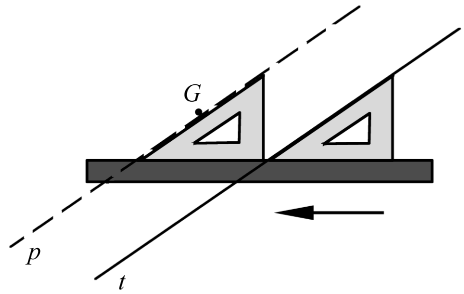


Figura 2.110

Recuerda el axioma de la unicidad del paralelismo de rectas:

Para cualquier recta *r* y para todo punto *P* que no está en la recta *r,* existe exactamente una recta *p* que pasa por *P* y es paralela a *r.*

Según este axioma no es posible en la geometría euclidiana trazar por un punto dos paralelas a una recta, sino una y solamente una.

2. Construcción de la perpendicular *s* a la recta *r* por un punto *G*

(*G* puede pertenecer a la recta o ser exterior a ella)

Para realizar esta construcción utilizaremos el cartabón y la regla, pero a diferencia de la anterior, en este caso hay que tener mucho cuidado con el lado del cartabón que se escoge para colocar sobre la recta o sobre la regla.

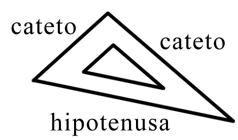


Figura 2.111

¿Qué forma tiene el cartabón? Te has dado cuenta que es un triángulo rectángulo (fig. 2.111). Los lados que forman el ángulo recto reciben el nombre de *catetos* y el lado que se opone a este ángulo se llama *hipotenusa*.

Descripción de la construcción

Sean a y b los "catetos" y c la hipotenusa del cartabón (fig. 2.112). Entonces:

a) Se coloca un "cateto" del cartabón, por ejemplo a, sobre la recta r y la regla sobre la "hipotenusa" c,
b) Se desliza el cartabón a lo largo de la regla hasta que b pase por G,
c) Se traza la perpendicular buscada, s, a lo largo del lado de b.

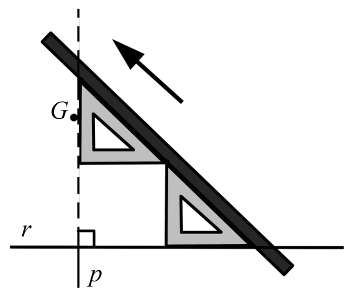


Figura 2.112

Considera un segmento $\overline{AB}$, ¿cuántas rectas perpendiculares a él se pueden trazar por uno de sus puntos?

Recuerda la unicidad de la perpendicularidad de rectas:

Por una recta r y un punto G cualquiera (puede estar en la recta r o no pertenecer a ella) existe exactamente una recta p que pasa por G y es perpendicular a la recta r.

Se pueden trazar infinitas rectas perpendiculares a un segmento dado, por cada uno de sus infinitos puntos, pero solamente la que pasa por su punto medio lo divide en dos segmentos iguales. Esta recta recibe el nombre de *mediatriz*.

Recuerda la definición de mediatriz:

Se llama **mediatriz** de un segmento a la recta perpendicular a él que pasa por su punto medio.

3. Construcción de la mediatriz de un segmento

Descripción de la construcción

1. Se trazan con el compás las circunferencias de centro A y B, respectivamente y radios iguales a, longitud que es mayor que la mitad de la longitud del segmento $\overline{AB}$.
2. Sean D y E los puntos de intersección de esas circunferencias anteriores. La recta b que pasa por los puntos D y E es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, luego lo corta en su punto medio F (fig. 2.113).

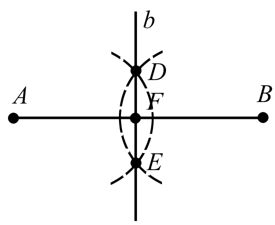


Figura 2.113

3. Si consideramos los puntos D y E que utilizamos para trazar la mediatriz, podemos darnos cuenta que determinan con A y B un triángulo a cada lado del segmento $\overline{AB}$: ΔABD y ΔABE. Analiza las longitudes de los lados de estos triángulos.

   ¿Qué tipo de triángulo son estos? Observa la figura 2.114.

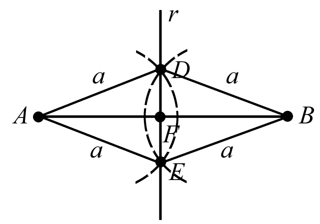


Figura 2.114

   Se trata de triángulos isósceles, pues los puntos E y D se obtienen por la intersección de dos circunferencias de centro A y B respectivamente y de radios iguales. Esta propiedad se cumple para cualquier punto que pertenece a la mediatriz de un segmento y la podrás demostrar en 8.º grado. Así podemos concluir que:

Recuerda que:

Todo punto situado sobre la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos.

Hasta el momento, para transportar segmentos y ángulos, has utilizado la regla y el cartabón para los primeros y el semicírculo, para los segundos. Aprenderás ahora a realizar estas operaciones con regla y compás.

4. Transporte de un segmento sobre una semirrecta

Descripción de la construcción

Sean $\overline{AB}$ un segmento y OP la semirrecta de origen O que pasa por el punto P (fig. 2.115).

a) Trazamos con un compás la circunferencia de centro O y radio igual a la longitud del segmento $\overline{AB}$ (fig. 2.116).

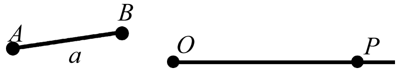


Figura 2.115

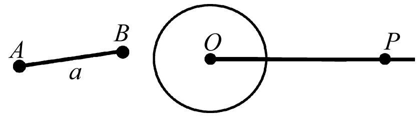


Figura 2.116

b) Determinamos el punto C de intersección de la semirrecta OP y la circunferencia (fig.2.117).

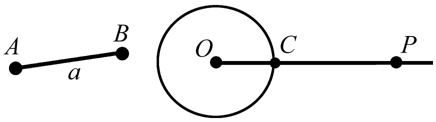


Figura 2.117

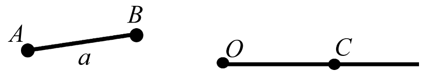


Figura 2.118

c) El segmento $\overline{OC}$ es igual al segmento $\overline{AB}$ (fig. 2.118).

5. Transporte de un ángulo

Descripción de la construcción

Sea $\angle ABC$ un ángulo y OP la semirrecta de origen O que contiene al punto P (fig. 2.119).

a) Tracemos con el compás una circunferencia de centro B y radio r cualquiera. Denotemos por N y Q, respectivamente a los puntos de intersección de la circunferencia y los lados del $\angle ABC$ (fig. 2.120).

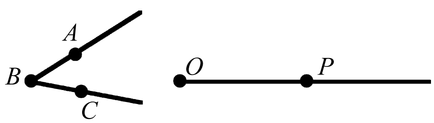


Figura 2.119

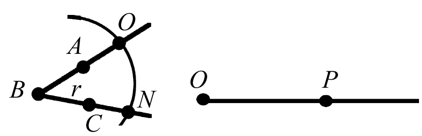


Figura 2.120

b) Nuevamente con el compás, tracemos una circunferencia de centro O y radio r y denotemos por H el punto de intersección de la semirrecta OP y la circunferencia (fig. 2.121).

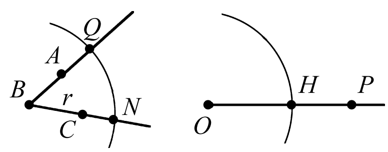


Figura 2.121

c) Tracemos una circunferencia de centro H y radio igual a la longitud del segmento $\overline{NQ}$. Denotemos por T el punto de intersección de ambas circunferencias (fig. 2.122).

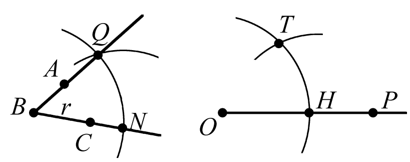


Figura 2.122

d) Tracemos la semirrecta de origen O que pasa por el punto T (fig. 2.123).

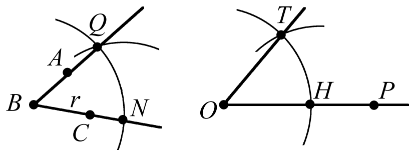


Figura 2.123

El $\angle HOT$ es igual al $\angle ABC$.

Ejercicios

1. Construye la perpendicular a una recta m por un punto $P \notin m$. Describe los pasos de esta construcción.
2. Traza un segmento de longitud 2 cm y a partir de lo aprendido en la construcción de paralelas, perpendiculares y el transporte de segmentos, construye un cuadrado $ABCD$.
3. Traza dos segmentos, uno de longitud 2 cm y otro de longitud 2,5 cm. A partir de lo aprendido en la construcción de paralelas, perpendiculares y el transporte de segmentos, construye un rectángulo $MNPQ$.
4. Traza un segmento $\overline{AB}$ y construye su mediatriz. Ubica un punto M cualquiera en la mediatriz y compara las distancias desde M a los extremos del segmento $\overline{AB}$. Selecciona otro punto K que no pertenezca a la mediatriz de $\overline{AB}$ y compara también las distancias de K a los extremos del segmento $\overline{AB}$. Fundamenta estas comparaciones.
5. Dado un triángulo ABC, construye un punto P que equidiste de los puntos A y B y de los puntos A y C. Fundamenta la construcción realizada.
6.* Demuestra que para tres rectas a, b y c, si $a \,||\, b$ y $c \,||\, b$ entonces $a \,||\, c$. (Principio de comparación respecto a un tercero).
7.* Demuestra que para tres rectas a, b y c, si $a \,||\, b$ y $b \,||\, c$ entonces $a \,||\, c$. (Transitividad del paralelismo de rectas).
8. Traza un ángulo agudo cualquiera β y construye otro ángulo cuyos lados sean respectivamente paralelos a los lados del ángulo β. Mide con el semicírculo las amplitudes de ambos ángulos y compáralas. Repite el procedimiento y elabora una conclusión respecto a ello.
9. Fernanda quiere medir la amplitud del ángulo de la figura 2.124 con un semicírculo, pero inexplicablemente no es posible acceder a su vértice ni prolongando las rectas que contienen sus lados. Determina un procedimiento práctico a partir de las construcciones estudiadas, para determinar la amplitud del ángulo ABC.

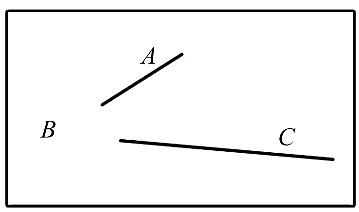


Figura 2.124

10.* Traza un segmento de longitud a y construye un triángulo equilátero cuyos lados tengan longitud a. Describe la construcción realizada y fundaméntala a partir de las construcciones estudiadas.

11.* Demuestra la propiedad geométrica que obtuviste como resultado del análisis del ejercicio 10 del epígrafe anterior.

12.* Construye un triángulo ABC con un ángulo agudo α de vértice A, en cuyos lados ubicarás los vértices restantes B y C. ¿Cómo?

De manera que al transportar en uno de estos lados, un segmento $\overline{AC}$ de longitud cualquiera b, queda determinado el vértice C y al tratar de cortar con el compás, a partir de este vértice C, al lado AB con una longitud a tal que $a < b$, queda determinado el tercer vértice B.

Analiza cuántas soluciones tiene este problema de construcción, según la relación entre la longitud b y la distancia de C a la recta AB.

2.2.3 Ángulos determinados por dos rectas que se cortan

Diferentes ramas de la técnica y la ciencia, como la astronomía y la topografía, necesitan de la medida precisa de los ángulos. Pero no siempre esto es posible lograrlo con el uso directo de instrumentos de medición. En muchos de estos casos es más fácil aplicar las relaciones que cumplen determinadas parejas de ángulos que determinan dos rectas. Vamos a estudiarlas a continuación (fig. 2.125).

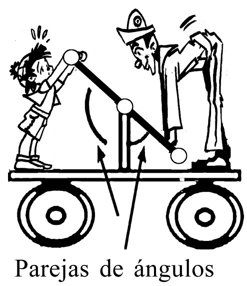


Figura 2.125

Si r y s son dos rectas que se cortan en un punto P, y determinan cuatro ángulos que denotaremos por los números naturales: 1, 2, 3 y 4. ¿Qué tipo de ángulo son $\angle 1$ y $\angle 2$, respecto a la recta r? (fig. 2.126)

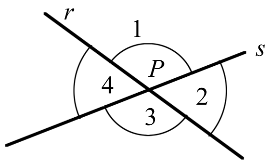


Figura 2.126

Efectivamente, son ángulos consecutivos del mismo lado de la recta, pues tienen en común el vértice y un lado y están situados en el mismo semiplano de borde *r.*

Pero fíjate que el lado no común forma en la recta *r* dos semirrectas opuestas de origen en el vértice *P.* Esta pareja de ángulos así determinados se denomina: **ángulos adyacentes.**

¿Cuál es la amplitud suma de las amplitudes de dos ángulos adyacentes?

En la figura 2.126 se aprecia que el ángulo cuya amplitud es la suma de las amplitudes de los ángulos consecutivos $\angle 1$ y $\angle 2$ tiene como lados semirrectas opuestas, que determina el punto *P* sobre la recta *r,* es decir, es un ángulo llano. Por lo cual, su amplitud suma es 180º.

Recuerda la definición de ángulos adyacentes:

Una pareja de ángulos consecutivos situados del mismo lado de una recta, de manera que sus amplitudes suman 180° se denominan ángulos adyacentes.

Observa los ángulos $\angle 1$ y $\angle 3$ (fig. 2.127). Tienen el vértice común y sus lados están formados por semirrectas opuestas. Los ángulos que cumplen estas características se llaman **ángulos opuestos por el vértice**.

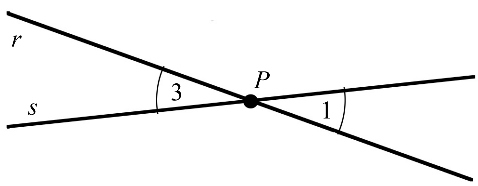


Figura 2.127

¿Puedes establecer alguna relación entre las amplitudes de dos ángulos opuestos por el vértice?

Compara estas amplitudes de diferentes formas: midiéndolas con un semicírculo o con una plantilla de uno de esos ángulos que superpones al otro o utilizando alguno de los asistentes geométricos que te permiten mover la figura, por ejemplo, el *Geómetra,* que puedes encontrar en el *software* educativo Elementos Matemáticos.

Recuerda el teorema sobre los ángulos opuestos por el vértice:

Teorema 1

Sean r y s dos rectas que al cortarse en un punto P determinan los ángulos $\angle 1$ y $\angle 3$ opuestos por el vértice, entonces estos ángulos tienen igual amplitud.

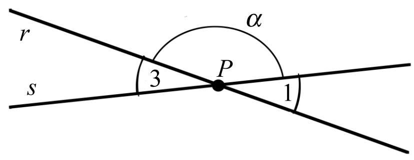


Figura 2.128

Demostración

Premisa: $\angle 1$ y $\angle 3$ opuestos por el vértice

Tesis: $\angle 1 = \angle 3$

Sea α el ángulo adyacente común a estos ángulos $\angle 1$ y $\angle 3$, entonces se cumple que: $\angle 1 + \alpha = 180°$ y $\angle 3 + \alpha = 180°$, por propiedad de ángulos adyacentes.
Comparando estas igualdades se cumple que: $\angle 1 + \cancel{\alpha} = \angle 3 + \cancel{\alpha}$
Por tanto: $\angle 1 = \angle 3$ lqqd.

Ejemplo 1:

En la figura 2.129, los puntos *D, A, B* y los puntos *E, A, F* son alineados, $\angle CAB = 97°$, $\angle DAE = 48°$, Calcula la amplitud de los ángulos:

a) $\angle DAC$ b) $\angle CAF$

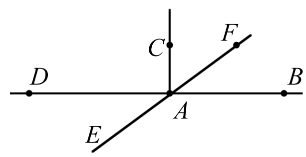


Figura 2.129

Solución:

a) $\angle DAC + \angle CAB = 180°$ por ser adyacentes
Como $\angle CAB = 97°$ por datos, sustituyendo y despejando, tenemos que:
$\angle DAC = 180° - \angle CAB = 180° - 97° = 83°$

b) $\angle DAE = \angle FAB$ por opuestos por el vértice Luego $\angle FAB = 48°$ $\angle CAF + \angle FAB = \angle CAB$ por suma de amplitudes de ángulos consecutivos
$\angle CAF + 48° = 97°$ por sustitución
$\angle CAF = 49°$

R/ La amplitud de estos ángulos es: $\angle DAC = 83°$ y $\angle CAF = 49°$.
Si comparas las amplitudes de los ángulos $\angle CAF$ y $\angle FAB$, verás que son iguales (fig. 2.130), por lo que la semirrecta de origen A que contiene a F ha dividido al ángulo $\angle CAB$ en dos ángulos iguales. Esta semirrecta se llama **bisectriz.**

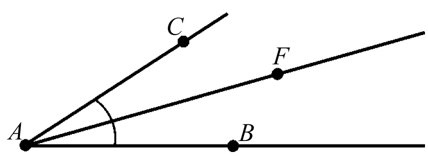


Figura 2.130

Recuerda la definición de bisectriz:

> Se llama **bisectriz** de un ángulo a la semirrecta de origen en el vértice del ángulo que pasa por su interior y lo divide en dos ángulos iguales.

Ahora toma un punto *P* cualquiera de la bisectriz del ángulo de la figura 2.131 y mide la distancia desde él a cada lado del ángulo y compara ambas distancias.

Por supuesto, al medir la distancia de un punto a una recta debe hacerse sobre la perpendicular. En este caso, para no dibujar sobre el libro, puedes medir sobre el ángulo recto del cartabón como en la figura 2.131.

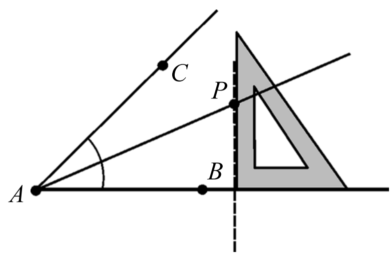


Figura 2.131

Ubica otros puntos en la bisectriz y repite este procedimiento, ¿qué conclusión puedes elaborar sobre ello?

Recuerda la propiedad de los puntos de la bisectriz:

> Todo punto situado en la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.

6. Construcción de la bisectriz de un ángulo

Descripción de la construcción

Sea *A* el vértice del ángulo $\angle$ (*a, b*) (fig. 2.132):

a) Se traza una circunferencia de centro *A* y de radio cualquiera *r* que corte a los lados *a*, *b* en *E* y *F,* respectivamente.

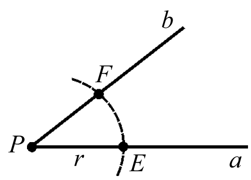


Figura 2.132

b) Con centro en E y en F(fig. 2.133) se trazan dos circunferencias del mismo radio r que se cortan en un punto G diferente de A.

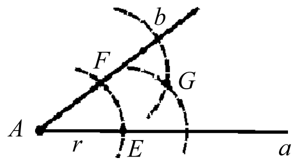


Figura 2.133

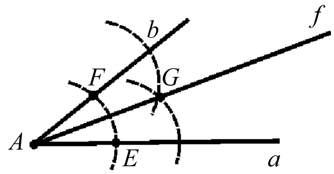


Figura 2.134

c) La semirrecta f de origen A, que pasa por el punto G (fig. 2.134) es la bisectriz del ángulo $\angle$ (a, b).

Ejercicios

1. Selecciona la respuesta correcta:

   a) Sean α y β dos ángulos adyacentes y $\alpha = 28°$, entonces:

   $\beta = 82°$ $\quad$ $\beta = 28°$ $\quad$ $\beta = 152°$

   b) Sean α y β dos ángulos opuestos por el vértice y β es agudo, entonces:

   α es obtuso $\quad$ α es agudo $\quad$ α es recto

   c) Sea el ángulo ABC agudo y P un punto cualquiera de su bisectriz, entonces:

   - La distancia de P a los lados del ángulo ABC es diferente.
   - Los ángulos $\angle ABP$ y $\angle PBC$ son iguales.
   - El ángulo $\angle ABP$ es la tercera parte del ángulo ABC.

   d) Si m es la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ y P es un punto que está situado sobre la recta m, tal que $P \notin \overline{AB}$ entonces:

   - ABP es un triángulo isósceles.
   - $\overline{AP} \neq \overline{BP}$.
   - Los ángulos $\angle PAB$ y $\angle ABP$ son diferentes.

2. ¿Toda pareja de ángulos adyacentes son suplementarios? ¿Toda pareja de ángulos suplementarios son adyacentes? Fundamenta tu respuesta.

3. Completa los espacios en blanco:

   - De un par de ángulos adyacentes, si uno es agudo, el otro es ________
   - Si uno de los ángulos opuestos por el vértice es obtuso, el otro es _________
   - Si dos ángulos opuestos por el vértice son rectos, las rectas que los determinan son ____________

4. Las siguientes proposiciones no son verdaderas. Justifica su falsedad con un ejemplo.
   - Si dos ángulos tienen un lado común entonces son adyacentes.
   - Si dos ángulos tienen el mismo vértice entonces son adyacentes.
   - Si dos ángulos tienen el mismo vértice son opuestos por el vértice.

5. En la figura 2.135 las rectas *BE, AD,* y *CF* se cortan en *M.* Compara las amplitudes de los ángulos. Justifica.

   a) $\angle AMB$ ____ $\angle EMD$

   b) $\angle BME$ ____ $\angle FMC$

   c) $\angle AMB + \angle AMF$____$\angle DME + \angle CMD$

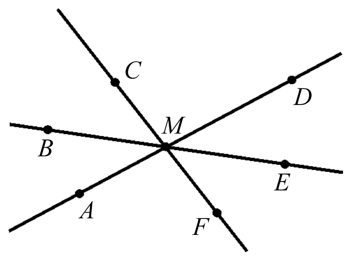


Figura 2.135

6. Sean *AB* y *CD* dos rectas que se cortan en *O* (fig. 2.136). Si $\angle AOB = 43°$, calcula la amplitud de los ángulos restantes que se forman.

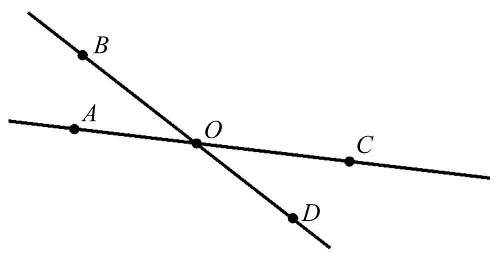


Figura 2.136

7. Determina la veracidad de la siguiente proposición. Fundamenta. "Si dos ángulos son consecutivos y sus amplitudes suman 180°, entonces son ángulos adyacentes".

8. En la figura 2.137 $\overline{OD} \perp \overline{OB}$. Si $\angle AOB = 90° + \beta$

   a) Completa: $\alpha = 90° +$ ______

   b) Compara $\angle AOB$ ____$\angle DOC$

   c) ¿Cómo son dos ángulos obtusos de lados perpendiculares?

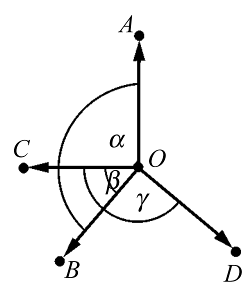


Figura 2.137

9. Comprueba que los ángulos α y β tienen lados perpendiculares (figuras 2.138 y 2.139). Compara las amplitudes de estos ángulos en cada inciso y elabora una conclusión respecto a ello, según el tipo de ángulo que los datos nos informan.

   a) α y β son agudos

   b) α es agudo y β es obtuso

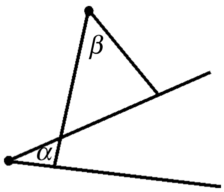


Figura 2.138

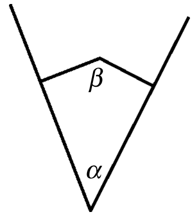


Figura 2.139

10. Fundamenta en cada caso por qué las semirrectas p y q no son opuestas (fig. 2.140 y fig. 2.141).

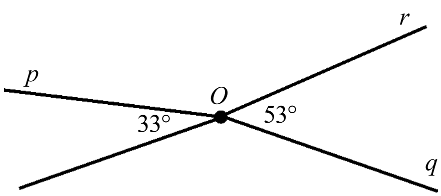


Figura 2.140

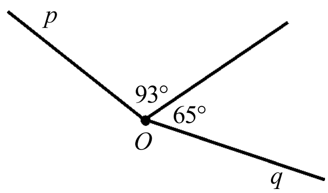


Figura 2.141

11.* Demuestra que:

   a) Todo ángulo de igual amplitud que su adyacente es recto.
   b) Todo ángulo recto es de igual amplitud que su adyacente.
   c) Si dos ángulos tienen igual amplitud entonces sus respectivos ángulos adyacentes tienen igual amplitud.
   d) Dos rectas r y s perpendiculares se cortan formando cuatro ángulos rectos.

2.2.4 Ángulos formados por dos rectas cortadas por una tercera

Sean r y s dos rectas cualesquiera del plano, ellas determinan tres regiones en el plano que denominaremos externa o interna como se muestra en la figura 2.142:

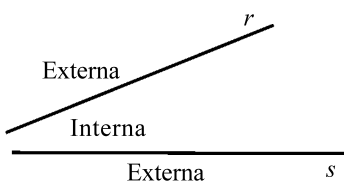


Figura 2.142

Consideremos ahora otra recta t que corta a la recta r en el punto P y a la recta s en el punto Q. Esta recta recibe el nombre de **recta secante** (fig. 2.143).

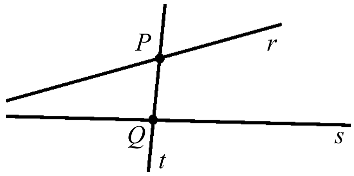


Figura 2.143

Observa que se forman cuatro ángulos en la región interna ($\angle 4$, $\angle 3$, $\angle 6$ y $\angle 5$) y cuatro en la región externa ($\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$ y $\angle 8$). Estos ángulos reciben diferentes denominaciones en función de la posición que ocupan respecto a las rectas (fig. 2.144):

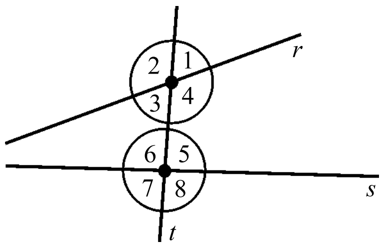


Figura 2.144

Ángulos correspondientes: es una pareja de ángulos, situados al mismo lado de la secante, uno en la región interna y el otro en la externa y que no tienen el vértice común. (Ejemplo: $\angle 1$ y $\angle 5$, $\angle 2$ y $\angle 6$, $\angle 3$ y $\angle 7$, $\angle 4$ y $\angle 8$) (fig. 2.145).

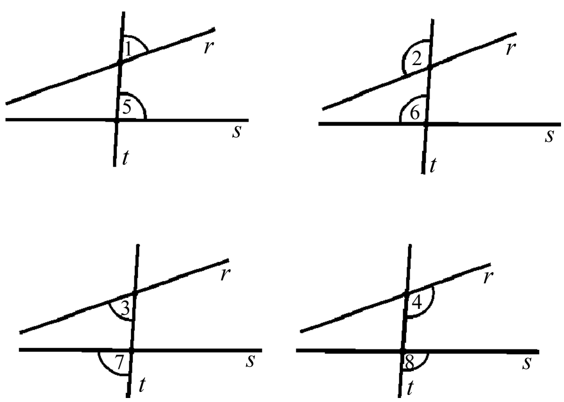


Figura 2.145

Ángulos alternos: son los que están situados a distintos lados de la secante y en la misma región (interna o externa) y no tienen el vértice común. ($\angle 1$ y $\angle 7$, $\angle 2$ y $\angle 8$, $\angle 3$ y $\angle 5$, $\angle 4$ y $\angle 6$) (fig. 2.146).

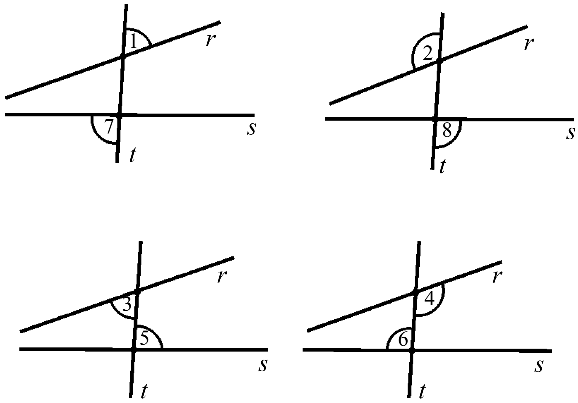


Figura 2.146

Ángulos conjugados: son los que están situados al mismo lado de la secante y en la misma región (interna o externa) y no tienen el vértice común. ($\angle 1$ y $\angle 8$, $\angle 2$ y $\angle 7$, $\angle 3$ y $\angle 6$, $\angle 4$ y $\angle 5$) (fig. 2.147).

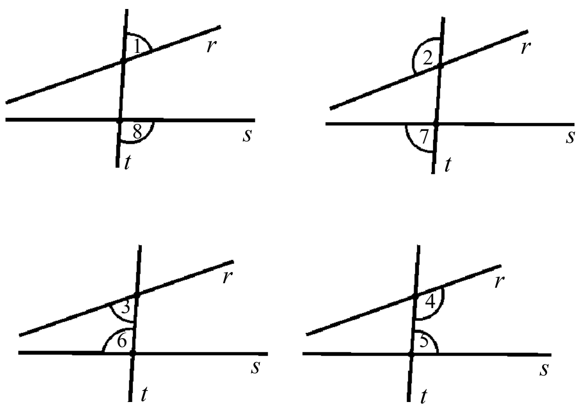
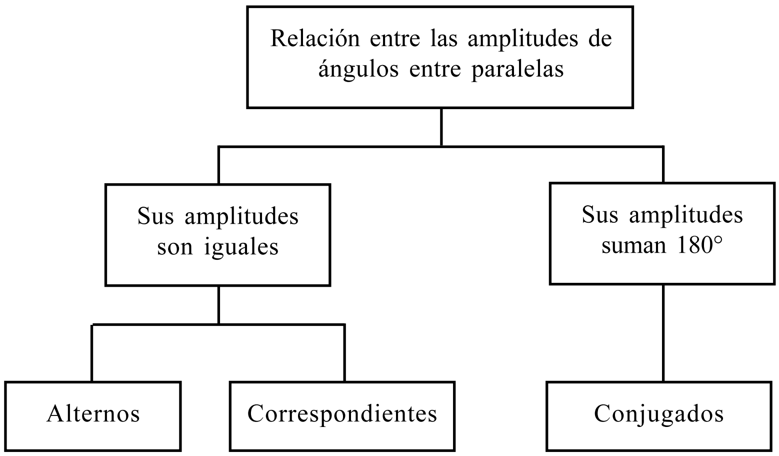


Figura 2.147

¿Existe alguna relación entre las amplitudes de cada pareja de estos tipos de ángulos determinados por dos rectas que se cortan? Es decir, ¿entre las amplitudes de las parejas de correspondientes, alternos o conjugados? Si mides sus amplitudes podrás darte cuenta de que, por lo general, no es posible establecer una relación entre ellas.

¿Y si las rectas r y s fueran paralelas, se mantendría la conclusión anterior? En estas nuevas condiciones, al realizar una vez más el proceso de medición, verás que sí, es posible establecer relaciones entre las amplitudes de estos tipos de ángulos entre paralelas.

En el siguiente esquema se resume la relación entre las amplitudes de los ángulos entre paralelas, que constituyen importantes teoremas de la geometría plana:



El teorema que plantea que la suma de las amplitudes de los ángulos conjugados entre paralelas es igual a 180°, es una propiedad equivalente al axioma de las paralelas que formuló Euclides en *Los Elementos.* Podemos demostrar que los ángulos alternos o los ángulos correspondientes entre paralelas son respectivamente iguales, aplicando esa propiedad, que para nosotros es un teorema, veamos cómo:

Teorema 2

Si dos rectas paralelas a y b son cortadas por una secante c entonces los ángulos alternos que se determinan tienen igual amplitud.

Demostración

Premisa: $a \,||\, b$ y c secante

Tesis: los ángulos alternos que se determinan tienen igual amplitud. Sin perder generalidad sean $\angle 1$ y $\angle 2$ una pareja de ángulos alternos cualquiera, la tesis expresada de forma más sencilla es: $\angle 1 = \angle 2$

Si consideramos $\angle 3$ conjugado con $\angle 2$ y adyacente al $\angle 1$, se tiene:

$\angle 1 + \angle 3 = 180°$ por adyacentes.

$\angle 3 + \angle 2 = 180°$ por conjugados con $a \mid\mid b$ y c secante
$\angle 1 + \cancel{\angle 3} = \cancel{\angle 3} + \angle 2$ Comparando ambas igualdades

Por tanto: $\angle 1 = \angle 2$ lqqd.

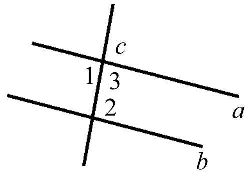


Figura 2.148

De forma análoga se procede para demostrar la igualdad de los ángulos correspondientes entre paralelas. ¡Inténtalo tú!

¿Cómo se aplican estos contenidos?

Ejemplo 1:

Si *a* y *b* son dos rectas paralelas cortadas por la recta *c,* como puedes observar en la figura 2.149 y $\angle 2 = 143°$. Calcula las amplitudes de los ángulos: $\angle 3$ y $\angle 4$.

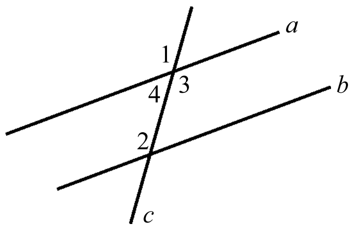


Figura 2.149

1.ª vía de solución

a) $\angle 3 = \angle 2$ porque son alternos entre las paralelas *a* y *b,* cortadas por la secante *c.* Luego $\angle 3 = 143°$, porque $\angle 2 = 143°$ por datos.

b) $\angle 4 + \angle 2 = 180°$, porque son conjugados entre las paralelas *a* y *b,* cortadas por la secante *c.*
Sustituyendo $\angle 2 = 143°$, que se da como dato se tiene que:
$\angle 4 = 180° - \angle 2 = 180° - 143° = 37°$;
$\angle 4 = 37°$

2.ª vía de solución

a) $\angle 3 = \angle 1$ por opuestos por el vértice.
$\angle 1 = \angle 2$ por correspondientes con $a \mid\mid b$ y c secante
Luego $\angle 3 = \angle 2$ y como $\angle 2 = 143°$ por datos: $\angle 3 = 143°$.

b) $\angle 4 + \angle 3 = 180°$ porque son adyacentes
Luego: $\angle 4 = 180° - \angle 3$
Sustituyendo el dato: $\angle 3 = 143°$ $\angle 4 =$
$= 180° - 143° = 37°$

R/ Por tanto, la amplitud de estos ángulos es: $\angle 3 = 143°$ y $\angle 4 = 37°$.

Ejercicios

1. Marca con una X las proposiciones falsas y fundaméntalas, teniendo en cuenta en la figura 2.150, que las rectas *r* y *s* son rectas secantes cortadas por la recta *t*.

   a) ___ Los ángulos 2 y 4 son ángulos correspondientes.

   b) ___ Los ángulos 7 y 1 son ángulos alternos.

   c) ___ La amplitud del ángulo 6 es igual a la amplitud del ángulo 2.

   d) ___ Los ángulos 3 y 6 son adyacentes.

   e) ___ La suma de las amplitudes de los ángulos 5 y 8 es 180°.

   f) ___ Los ángulos 1 y 2 son opuestos por el vértice.

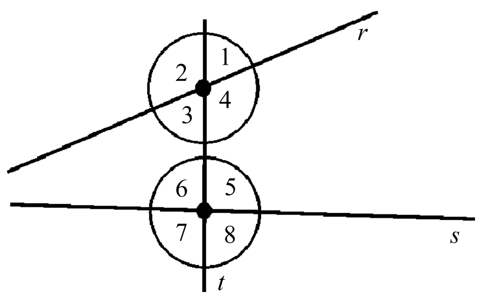


Figura 2.150

2. Dada la figura 2.151 completa los espacios en blanco para obtener una proposición verdadera en cada inciso.

   a) El $\angle 8$ es ____________ con el $\angle 4$ y este a su vez es______________ con el $\angle 2$.

   b) El ___ es correspondiente con el $\angle 12$ y opuesto por el vértice con el _____.

   c) El $\angle 3$ es ______________ con el $\angle 6$ y a la vez alterno con ____.

   d) El $\angle 11$ es conjugado con el ____ y este a su vez _____________ con el $\angle 6$.

   e) El ___ es alterno con el $\angle 1$ y a su vez conjugado con él ________.

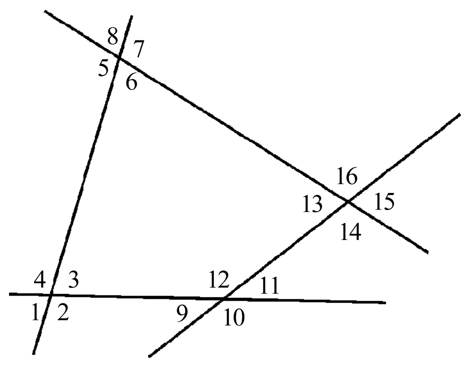


Figura 2.151

3. Fundamenta por qué se cumplen las relaciones siguientes, si las rectas m y n son paralelas y t es una recta secante respecto a ellas (fig.2.152).

   a) $\angle ABD = \angle BFE$
   b) $\angle DBF + \angle BFE = 180°$
   c) $\angle ABD = \angle GFH$
   d) $\angle BFE + \angle EFH = 180°$
   e) $\angle ABC = \angle DBF$

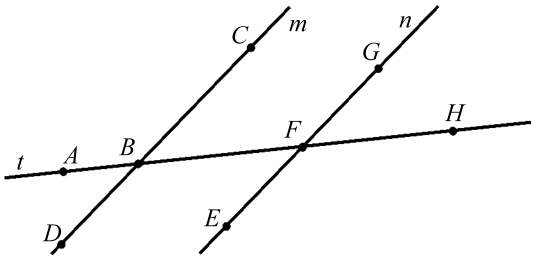


Figura 2.152

4. Enjuicia la veracidad de las siguientes afirmaciones, fundamentando aquellas que consideras falsas.

   a) Al trazar dos rectas cortadas por una secante, todas las parejas de ángulos alternos son de igual amplitud.
   b) Al trazar dos rectas paralelas cortadas por una secante, todas las parejas de ángulos alternos son de igual amplitud.
   c) Al trazar dos rectas paralelas cortadas por una secante, cada pareja de ángulos alternos tiene la misma amplitud.

5. Marca con una X las proposiciones falsas y justifique su respuesta en esos casos, teniendo en cuenta que las rectas c y d son rectas paralelas, cortadas por la recta secante $t,$ como se muestra en la figura 2.153:

   a) ___ Los ángulos 1 y 2 son ángulos suplementarios.
   b) ___ Los ángulos 4 y 6 son ángulos alternos.
   c) ___ La amplitud del ángulo 4 es igual a la amplitud del ángulo 5.
   d) ___ Los ángulos 2 y 4 son opuestos por el vértice.
   e) ___ La suma de las amplitudes de los ángulos 5 y 8 es 180°.
   f) ___ Los ángulos 4 y 8 son opuestos por el vértice.

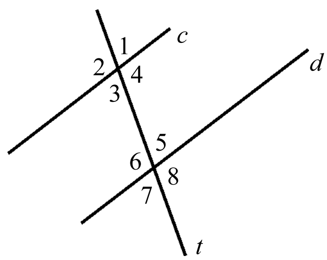


Figura 2.153

6. En la figura 2.154, las rectas m y n son paralelas, cortadas por las rectas secantes r y s. Completa los espacios en blanco para obtener una proposición verdadera en cada inciso.

   a) El $\angle 5$ es ____________ con el $\angle 3$ y este a su vez es______________ con el $\angle 8$.

   b) El ___ es correspondiente con el $\angle 15$ y opuesto por el vértice con el ___.

   c) El $\angle 14$ es ______________ con el $\angle 4$ y a la vez conjugado con ____.

   d) El $\angle 11$ es alterno, con el ____ y este a su vez _________________ con el $\angle 9$.

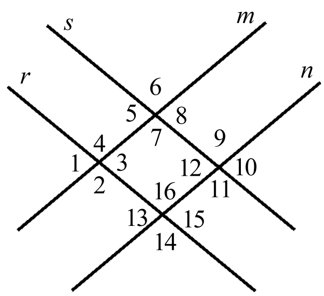


Figura 2.154

7. En la figura 2.155, d y e son rectas paralelas cortadas por la recta f.

   Si $\alpha = 28°$, $\theta = 152°$ y b es la bisectriz de λ. Calcula la amplitud de β, λ y del $\angle 1$.

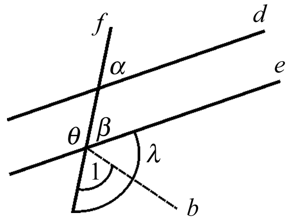


Figura 2.155

8. Calcula los ángulos denotados por letras griegas en las figuras 2.156, 2.157 y 2.158; teniendo en cuenta las amplitudes de los ángulos que allí se dan y que las saetas indican rectas paralelas.

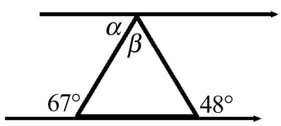


Figura 2.156

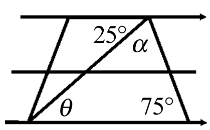


Figura 2.157

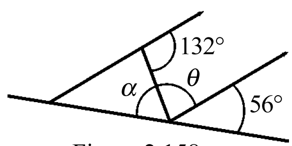


Figura 2.158

9. En la figura 2.159: Se tiene que $\alpha = 65°$ y $\theta = 115°$
Calcula con estos datos la amplitud de β.

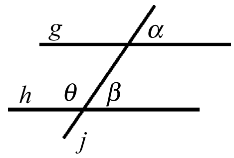


Figura 2.159

10.* Para probar que dos rectas son paralelas, basta encontrar una pareja de ángulos alternos o correspondientes que sean iguales, o una pareja de ángulos conjugados que sumen 180°. Teniendo en cuenta los resultados del ejercicio 9 y la afirmación anterior, analiza la figura 2.159 y demuestra que:
"Si *p* y *r* son dos rectas cortadas por la recta *n* y se cumple que: $\alpha = 65°$ y $\theta = 115°$ entonces $p \parallel r$".

11.* Se tiene un punto *A* exterior a una recta *n,* construye la recta paralela a *n* que pasa por *A*. ¿En qué te fundamentas para asegurar que esta recta es paralela a la recta *n*?

Vanesa buscaba información en la prensa sobre el ahorro y la conservación de recursos hidráulicos para un trabajo práctico y vio esta caricatura (fig. 2.160) que tituló: "Ahorrativa simetría". ¿Por qué? ¿Qué título le pondrías tú? Este nombre se relaciona con los movimientos del plano que estudió en quinto grado y recordó algunas de sus muchas aplicaciones en la vida práctica.

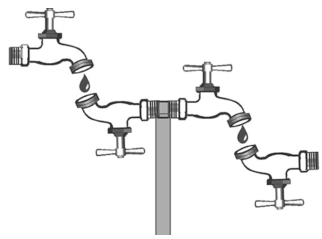


Figura 2.160

2.3 Los movimientos del plano y sus propiedades

Vamos a ver aquí dos ejemplos.
¿Qué palabra está escrita en este renglón?

Toma tu libro de Matemática y mostrando esta página, párate frente a un espejo e intenta leer el reflejo de esta palabra en él. ¿Qué diferencia puedes apreciar?
¡Por supuesto, leíste: AMBULANCIA!

¿Sabías que en la parte delantera de las ambulancias aparece escrito su nombre así, para que los choferes que van delante la identifiquen rápidamente por el retrovisor y le den paso (fig. 2.161)?

Figura 2.161

Otro ejemplo se aprecia en la fachada del centro cultural "Raquel Revuelta".

Este centro está ubicado en la intersección de las calles Línea y B, en El Vedado, La Habana. El centro honra la memoria de una gran actriz cubana, fundadora de Teatro Estudio. El logotipo de la instalación nos hace pensar en un movimiento del plano (fig. 2.162), ¿cuál es?

Figura 2.162

Propiedades generales de los movimientos del plano

Piensa en otros ejemplos de movimientos de la vida práctica: el lanzamiento de una pelota, el movimiento del péndulo de un reloj, de un tren por su línea férrea, entre otros. ¿Qué tienen en común y en qué se diferencian? (fig. 2.163)

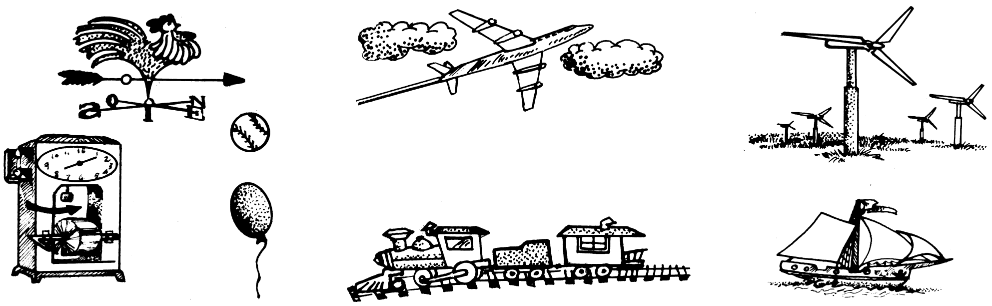


Figura 2.163

Aunque estos son ejemplos de movimientos diferentes, sin embargo, todos los objetos se mantienen iguales, no se deforman como resultado del movimiento.

Puedes determinar si dos figuras son iguales, cuando al superponerlas coinciden (fig. 2.164). Para lograr esto es preciso "mover" una de ellas hasta que esté situada sobre otra, de modo que cada punto de la figura que se ha movido quede totalmente encima de su correspondiente en la otra figura.

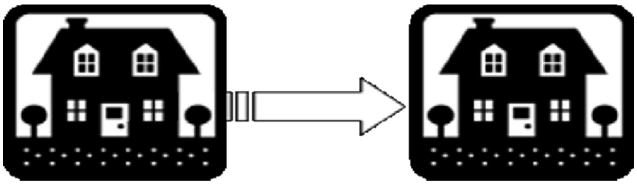


Figura 2.164

Recuerda la definición de movimiento del plano:

> Toda correspondencia de puntos del plano, en la cual a cada punto original se le asocia exactamente un punto imagen y viceversa, de manera que siempre se conserven las distancias entre dos puntos cualesquiera, es un movimiento del plano.

Ejemplo 1:

Una figura cualquiera del plano, siempre es posible moverla hasta hacerla coincidir con otra figura igual a ella. En estos ejemplos puedes pensar cómo "moverías" las figuras iguales dadas para hacerlas coincidir (figuras 2.165 a la 2.168):

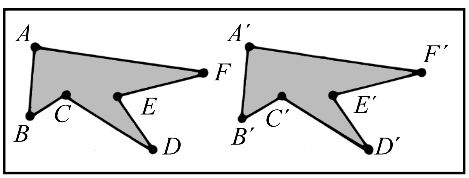


Figura 2.165

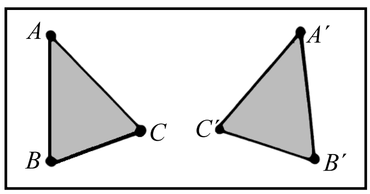


Figura 2.166

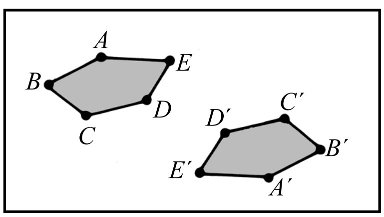


Figura 2.167

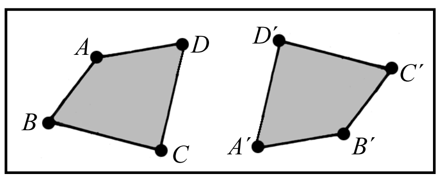


Figura 2.168

Recuerda las propiedades de los movimientos del plano:

a) Toda figura y su imagen por un movimiento son iguales.

b) Cuando se realiza un movimiento, las figuras conservan su forma y su tamaño, no sufren deformación alguna.

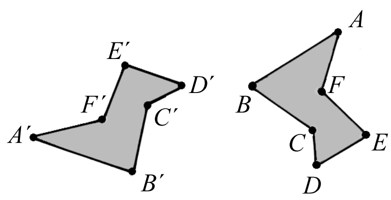


Figura 2.169

c) Los segmentos, semirrectas y rectas se transforman, respectivamente, en segmentos, semirrectas y rectas.

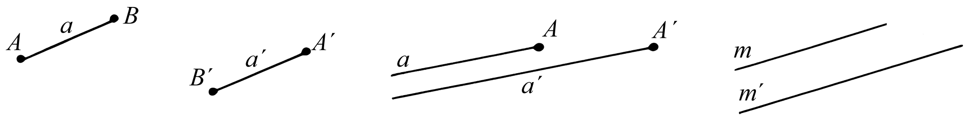


Figura 2.170

d) Los segmentos y ángulos se transforman en segmentos y ángulos respectivamente, de la misma medida.

Figura 2.171

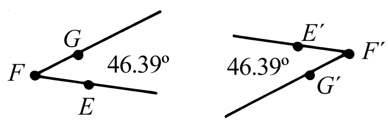


Figura 2.172

e) Las rectas paralelas se transforman en rectas paralelas.

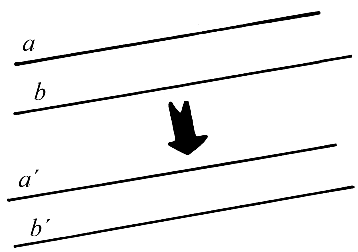


Figura 2.173

f) Las rectas secantes se transforman en rectas secantes. Los puntos de intersección son correspondientes.

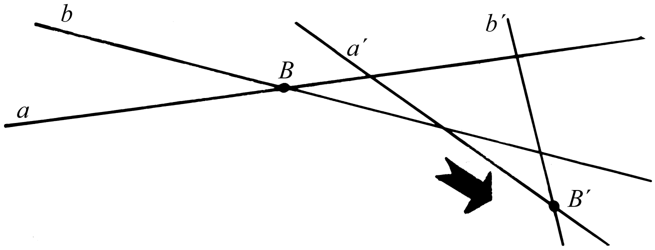


Figura 2.174

Reflexión respecto a una recta o simetría axial

Para tener una idea intuitiva de este movimiento toma una hoja de papel transparente y dibuja una figura cualquiera *F.* Luego dobla esta hoja a la mitad y calca la figura en el otro lado. Cuando abres el papel tienes la imagen de *F* dispuesta como en la figura 2.175, por la reflexión que tiene como eje la recta *d* que contiene la línea del doblado del papel.

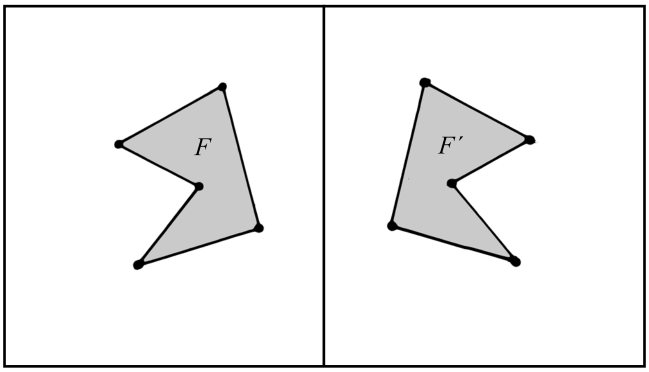


Figura 2.175

Recuerda que:

La simetría axial está determinada por una recta del plano, llamada eje de reflexión o eje de simetría.

¿Cómo construir la imagen de un punto por una reflexión respecto a una recta?

Descripción de la construcción

Sea r una recta y P un punto cualquiera del plano (fig. 2.176).

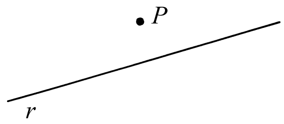


Figura 2.176

a) Trazamos la perpendicular a la recta r que pasa por el punto P (fig. 2.177).

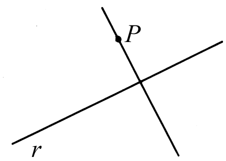


Figura 2.177

b) Determinamos el punto de intersección de ambas rectas (fig. 2.178). Sea M este punto.

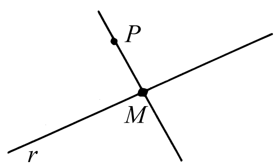


Figura 2.178

c) Transportamos el segmento $\overline{PM}$ sobre la semirrecta opuesta a la semirrecta MP (fig. 2.179), queda así determinado el punto P', que es la imagen del punto P, por la reflexión de eje r.

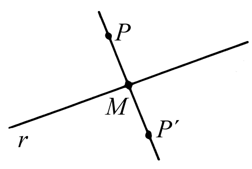


Figura 2.179

El punto P' es entonces el simétrico del punto P por esa reflexión de eje r.

Ejemplo 1:

Determina la imagen del cuadrilátero $ABCD$ por la reflexión de eje a (fig. 2.180).

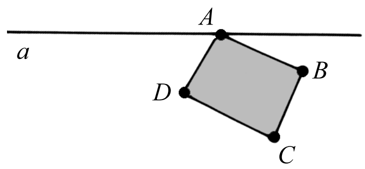


Figura 2.180

Respuesta:

a) Construimos las imágenes *A', B', C'* y *D'* de los puntos *A, B, C* y *D* tal como se indicó en la descripción de la construcción (fig. 2.181).

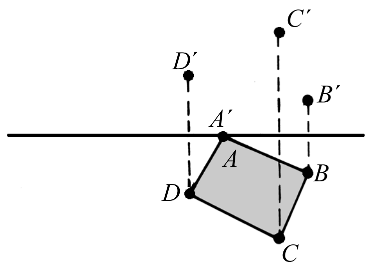


Figura 2.181

b) Unimos los puntos *A', B', C'* y *D'* y obtenemos la imagen del cuadrilátero *ABCD* (fig. 2.182).

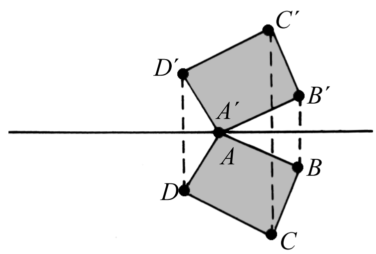


Figura 2.182

En el movimiento de reflexión respecto a una recta, hay puntos y rectas que cumplen determinadas propiedades. Por ejemplo, observa las figuras 2.181 y 2.182 y trata de responderte las siguientes interrogantes:

¿Dónde está situado el punto *A?* ¿Dónde está situada su imagen? ¿Ocurrirá lo mismo si tomamos otro punto que esté en el eje de simetría?

Recuerda que:

Todo punto situado sobre el eje de reflexión coincide con su imagen.

Considera ahora el punto *D* y su imagen *D'* en la figura 2.182. ¿Qué representa el eje de simetría para el segmento determinado estos dos puntos?

Recuerda que:

> En el movimiento de reflexión respecto a una recta, el eje es la mediatriz de todo segmento determinado por un punto y su imagen.

Observa la figura 2.183. Si *b* es una recta paralela al eje de simetría *a,* ¿qué posición relativa tienen esta recta *b* y su imagen *b',* por la reflexión de eje *a*?

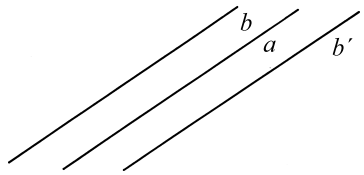


Figura 2.183

Si la recta *b* no es paralela al eje de simetría *a,* ¿serán paralelas la recta *b* y su imagen *b',* por la reflexión de eje *a?,* ¿dónde está situado el punto de intersección? La figura 2.184 cumple estas condiciones, ¿a qué conclusiones puedes llegar?

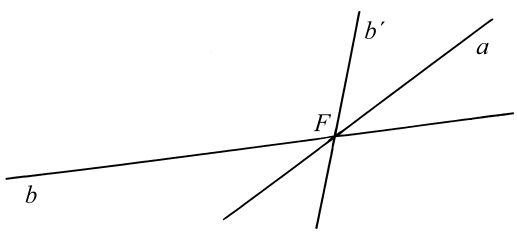


Figura 2.184

Recuerda que:

> - La imagen de una recta paralela al eje de reflexión es otra recta que es paralela a ambas.
> - Si una recta contiene a un punto del eje de reflexión, su imagen –que contiene a todos los puntos-imagen de la recta– contiene también a ese punto del eje que es fijo y por consiguiente, este punto está en la recta, está en la imagen de la recta y está en el eje.

Ya puedes responder qué movimiento del plano evidencian las imágenes del logotipo del Centro Cultural Raquel Revuelta y de la caricatura que aparece al inicio de este epígrafe. Efectivamente, se realizó en ambas una reflexión. En el centro cultural, una reflexión con respecto a un eje y en la caricatura, una reflexión con respecto a un punto.

Reflexión respecto a un punto o simetría central

Para tener una idea intuitiva de este movimiento toma una hoja de papel y dibuja una figura cualquiera *F* y un punto *O* (fig. 2.185).

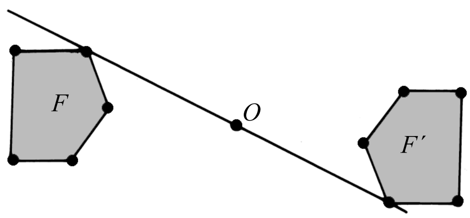


Figura 2.185

Traza la recta que pasa por *O* y por un punto cualquiera de la figura *F,* se determinan dos semirrectas de origen *O,* una que contiene al punto de *F* y otra que no lo contiene.

Toma una hoja de papel transparente y calca en ella el punto *O,* la figura *F* y la recta *OP*.

Gira la hoja transparente de modo que el punto *O* te quede fijo y el punto de *F* te quede sobre la semirrecta que no lo contenía.

Reproduce la figura *F* en la nueva posición y has obtenido la imagen de la figura *F* por la reflexión en el punto *O.*

Recuerda que:

Todo movimiento de simetría central está determinado de manera única por un punto del plano considerado su centro de simetría.

¿Cómo construir la imagen de un punto por una reflexión respecto a un punto?

Descripción de la construcción

Sea *O* centro de reflexión y *P* un punto cualesquiera del plano (fig. 2.186).

Figura 2.186

a) Trazamos la recta r que pasa por los puntos O y P (fig. 2.187).

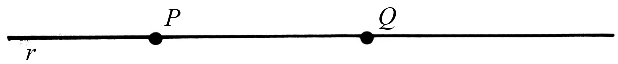


Figura 2.187

b) Transportamos el segmento OP sobre la semirrecta opuesta a la semirrecta OP. Sea P' la imagen de P en esta semirrecta (fig. 2.188).

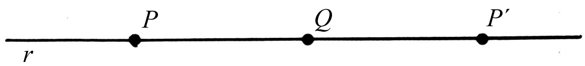


Figura 2.188

El punto P' es el simétrico del punto P por la reflexión de centro O.

Ejemplo 1:

Determina la imagen del triángulo ΔRST por la reflexión de centro P (fig. 2.189).

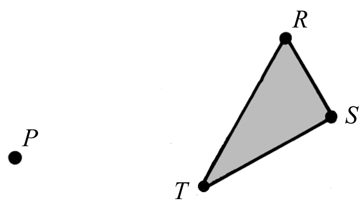


Figura 2.189

Respuesta:

a) Construimos las imágenes R', S' y T' de los puntos R, S y T tal como se indicó en la descripción de la construcción (fig. 2.190).

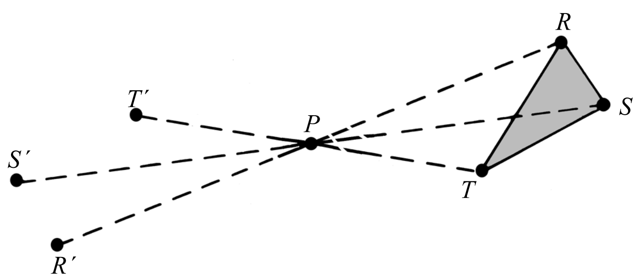


Figura 2.190

b) Unimos los puntos R', S' y T' y obtenemos la imagen del triángulo ΔRST (fig. 2.191).

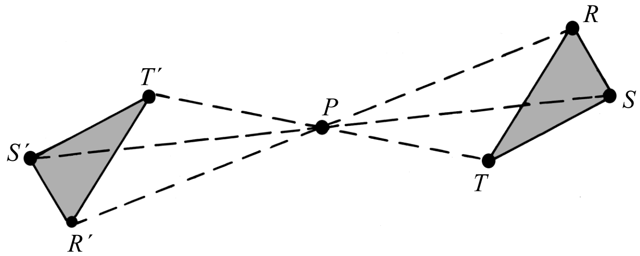


Figura 2.191

Observa la construcción que acabas de realizar y responde las siguientes preguntas:

¿Dónde está situada la imagen del centro de simetría?

Efectivamente, el centro de simetría coincide con su imagen.

Recuerda que:

En todo movimiento de simetría central o reflexión respecto a un punto, el centro de simetría se transforma en sí mismo. Es un punto fijo.

¿Qué relación puedes establecer en la figura 2.191 entre las longitudes de los segmentos $\overline{RP}$ y $\overline{R'P}$? ¿Qué representa el centro de simetría para el segmento determinado por un punto y su imagen?

Recuerda que:

El centro de simetría es el punto medio de todo segmento determinado por un punto y su imagen por ese movimiento.

¿Qué posición relativa tienen las rectas RT y $R'T'$ en la figura 2.191? ¿Cuál es la posición relativa de una recta y su imagen por una reflexión en un punto?

Recuerda que:

En todo movimiento de simetría central o reflexión respecto a un punto, cada recta y su imagen son paralelas.

Traslación en el plano

En grados anteriores estudiaste que un vector tiene una dirección, un sentido y una longitud. Se representan mediante una flecha donde la punta indica el sentido y se denotan con dos letras mayúsculas (la primera es el origen y la segunda el extremo) o con una letra minúscula, colocándole una pequeña flecha encima: $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}$

Se lee: vector $\overrightarrow{AB}$, vector $\vec{v}$

Recuerda que:

> Todo movimiento de traslación en el plano está determinado de manera única por el vector de traslación o por un punto y su imagen.

Para tener una idea intuitiva de este movimiento toma una hoja de papel y dibuja una figura cualquiera F y una recta r.

Cubre la hoja de dibujo con una hoja de papel transparente y calca en ella la figura F y la recta r.

Desplaza la hoja transparente a lo largo de la recta r.

Ahora reproduce la figura F en la nueva posición (fig. 2.192). Has obtenido la imagen de la figura F por la traslación de dirección r. El vector de traslación está determinado por un punto y su imagen.

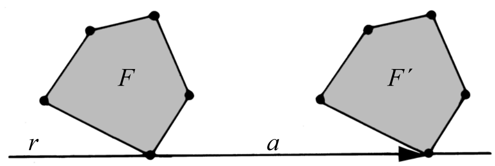


Figura 2.192

¿Cómo construir la imagen de un punto por una traslación en el plano?

Descripción de la construcción

Sea P un punto cualquiera del plano y $\vec{a}$ el vector de traslación (fig. 2.193).

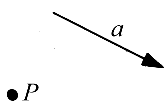


Figura 2.193

a) Trazamos una semirrecta de origen P, paralela al vector $\vec{a}$ y con el mismo sentido (fig. 2.194).

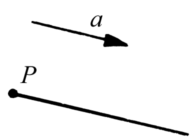


Figura 2.194

b) Transportamos sobre esta semirrecta un segmento de igual longitud que la del vector $\vec{a}$. Denotamos por *P'* el otro extremo de este segmento.

El punto *P'* es la imagen del punto *P* por la traslación de vector $\vec{a}$ (fig. 2.195).

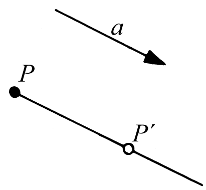


Figura 2.195

Ejemplo 1:

Determina la imagen del polígono *MNPQR* por la traslación de vector $\vec{a}$ (fig. 2196).

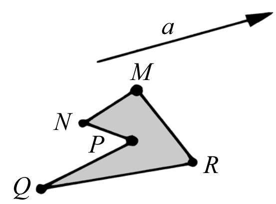


Figura 2.196

Respuesta:

a) Construimos las imágenes *M', N', P', Q'* y *R'* de los puntos *M, N, P, Q* y *R* tal como se indicó en la descripción de la construcción (fig. 2.197).

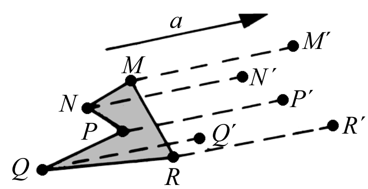


Figura 2.197

b) Unimos los puntos *M', N', P', Q'* y *R'* y obtenemos la imagen del polígono *MNPQR* (fig. 2.198).

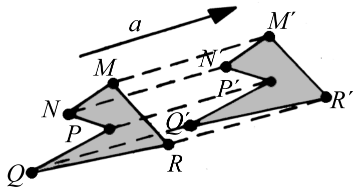


Figura 2.198

En los movimientos anteriores observaste que existen puntos que se mantienen fijos, es decir, que se transforman en sí mismos. ¿Existe algún punto del plano que coincida con su imagen por una traslación?

Recuerda que:

En todo movimiento de traslación, cada punto y su imagen son diferentes. No existen puntos fijos.

En la figura 2.198 del ejemplo 1, ¿cuál es la posición relativa de la recta *MN* y su imagen *N'M'* por la traslación de vector $\vec{a}$?

Recuerda que:

Toda recta y su imagen por un movimiento de traslación son paralelas.

Rotación en el plano

Ejemplos de este movimiento los vemos a diario en las ruedas de un automóvil, las manecillas del reloj, las ruedas de las bicicletas al girar y los engranajes de algunos mecanismos, entre otros. Para obtener una idea intuitiva de este movimiento toma una hoja de dibujo y una hoja de papel transparente y marca un punto *O* en la hoja de dibujo y construye una figura cualquiera *F.*

Cubre la hoja de dibujo con el papel transparente y calca el punto *O,* así como la figura *F.* Gira con un ángulo α la figura de la hoja de dibujo de manera que el punto calcado coincida con *O*.

Reproduce la figura *F.* Has obtenido la imagen de la figura *F* (fig. 2.199) por la rotación de centro *O.*

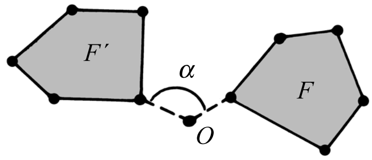


Figura 2.199

Recuerda que:

El movimiento de rotación está determinado por una de estas dos condiciones:

- El centro de rotación y un punto y su imagen.
- El centro y el ángulo de rotación.

Este movimiento puede realizarse en dos sentidos: a favor o en contra de las manecillas del reloj (sentido horario o antihorario). Siempre que no se indique lo contrario, consideraremos la rotación en sentido antihorario.

¿Cómo construir la imagen de un punto por una rotación en el plano?

Descripción de la construcción

Consideremos un punto O del plano y un ángulo $\angle ABC$. Vamos a determinar la imagen de un punto cualquiera P del plano por la rotación de centro O y ángulo $\angle ABC$ (fig. 2.200).

a) Tracemos la semirrecta de origen O que pasa por el punto P (fig. 2.201).

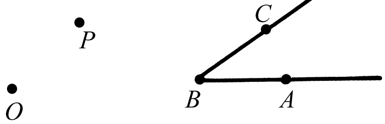


Figura 2.200

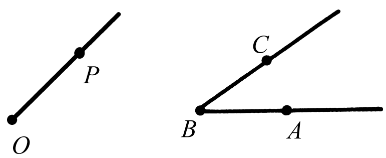


Figura 2.201

b) Transportemos el ángulo $\angle ABC$ a partir de la semirrecta OP en sentido antihorario (fig. 2.202).

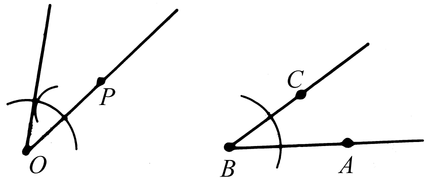


Figura 2.202

c) Transportemos el segmento $\overline{OP}$ sobre el lado que acabamos de construir (fig. 2.203).

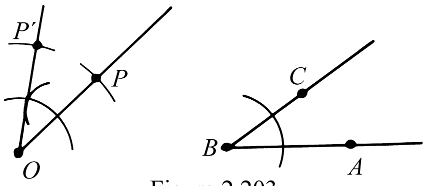


Figura 2.203

El punto *P'* es la imagen del punto *P* por la rotación de centro *O* y ángulo $\angle ABC$.

Ejemplo 1:

Determina la imagen del triángulo ΔXYZ por la rotación de centro *A* y ángulo de 90° (fig. 2.204).

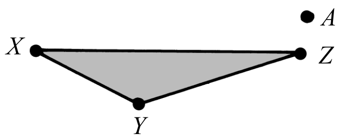


Figura 2.204

Respuesta:

a) Construimos las imágenes *X', Y'* y *Z'* de los puntos *X, Y* y *Z* tal como se indicó en la descripción de la construcción (fig. 2.205).

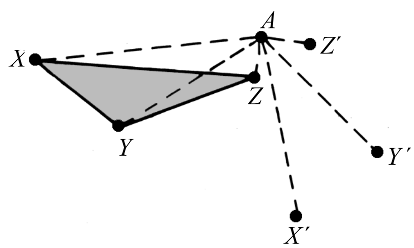


Figura 2.205

b) Unimos los puntos *X', Y'* y *Z'* y obtenemos la imagen del triángulo ΔXYZ (fig. 2.206).

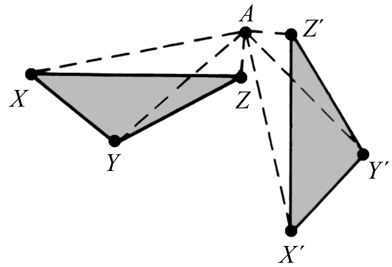


Figura 2.206

Vamos a analizar qué propiedades cumple el movimiento de rotación, a partir de la figura 2.205 en la cual aparecen el ΔXYZ y su imagen por la rotación de centro A y ángulo de rotación: $\angle XAX'$. Para ello, pensemos en la respuesta de las siguientes preguntas:

• ¿Cuál es la imagen del centro de rotación?

Recuerda que:

El centro de rotación coincide con su imagen. Es un punto fijo en este movimiento.

• ¿Qué relación existe entre las longitudes de los segmentos $\overline{AX}$ y $\overline{AX'}$?

Recuerda que:

El segmento que se forman al unir el centro de rotación con un punto y el que se forma, al unir su imagen por esa rotación con el centro de rotación, tienen la misma longitud, es decir, todo punto y su imagen por rotación equidistan del centro de rotación.

• ¿Qué relación existe entre las amplitudes de los ángulos $\angle XAX'$ y $\angle YAY'$?

Recuerda que:

Todos los ángulos que tienen su vértice en el centro de rotación y que sus lados contienen respectivamente, a un punto y a su imagen, son iguales e iguales al ángulo de rotación.

Composición de movimientos del plano

El estudio de la composición o aplicación compuesta, asociada al concepto de correspondencia tiene gran importancia, por su utilización en diferentes ramas de la matemática. Trataremos en este epígrafe una composición en particular, la composición de movimientos.

Una idea general de la composición de movimientos, puedes tenerla si piensas en una aplicación sucesiva de los movimientos estudiados, es decir, cuando "movemos" una misma figura sucesivamente por dos o más movimientos. En el lenguaje matemático decimos que se le aplicó a la figura la composición de esos dos o más movimientos.

Recuerda que:

La aplicación sucesiva de dos o más movimientos del plano es también un movimiento del plano.

Por tratarse también de un movimiento, la composición de dos o más movimientos cumple las siguientes propiedades:

- Las figuras conservan su forma y su tamaño, no sufren deformación alguna.
- Los segmentos, semirrectas y rectas se transforman, respectivamente, en segmentos, semirrectas y rectas.
- Los segmentos y ángulos se transforman en segmentos y ángulos respectivamente, de la misma medida.
- Transforma rectas paralelas en rectas paralelas y rectas que se cortan en rectas que se cortan.

Ejemplo 1:

Determina la imagen del ΔPQR por la composición de la simetría axial con eje en la recta PQ y la traslación de vector de dirección (fig. 2.207).

$\Delta PQR \longrightarrow \Delta PQR' \longrightarrow \Delta P'Q'R'$

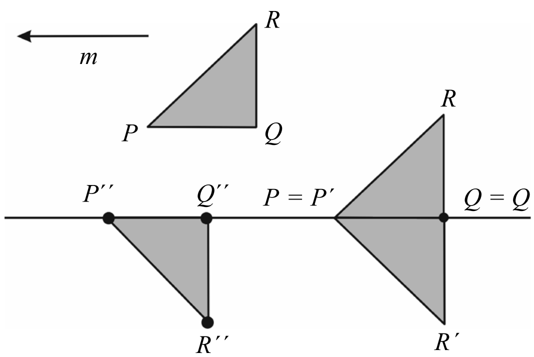


Figura 2.207

Ejercicios

1. Construye un triángulo ΔMNP y determina su imagen por cada uno de los siguientes movimientos:
   i. Reflexión de eje *r:* mediatriz del lado $\overline{MN}$.
   ii. Traslación de vector $\vec{a} = 2\,\overrightarrow{MP}$.
   iii. Reflexión de centro *O*: punto medio del lado $\overline{NP}$.
   iv. Rotación de centro *M* y ángulo de 45°.
2. En la figura 2.208 se muestra un hexágono regular de centro *O*. Los triángulos ΔAOB, ΔBOC, ΔCOD,

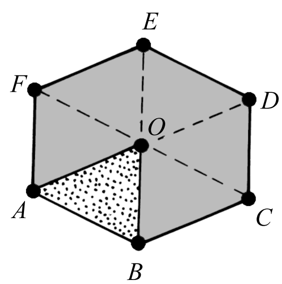


Figura 2.208

ΔDOE, ΔEOF y ΔFOA son equiláteros e iguales. Completa los espacios en blanco en cada una de las siguientes proposiciones:

a) La imagen del triángulo ΔAOB por una rotación de centro O y ángulo de 120° es ______.

b) La imagen del ΔDOE por simetría central de centro O es ____.

c) El ΔBOC es la imagen del ΔAOB por _______________________.

d) El segmento ____ es la imagen del segmento $\overline{AO}$ por una traslación de vector $\overrightarrow{AB}$.

e) El segmento ____ es la imagen del segmento $\overline{AO}$ por una reflexión de centro O.

f) El segmento ____ es la imagen del segmento $\overline{FC}$ por una reflexión de eje FC.

g) La imagen del ΔDOE por una rotación de centro O y ángulo de 180º es ____.

h) Analiza tus respuestas b) y d). ¿Puedes establecer alguna relación entre rotación y simetría central?

3. Determina el eje de la simetría que transforma la figura G en la figura G' en cada caso, si se conoce que mediante este movimiento, el punto A' es la imagen del punto A (fig. 2.209):

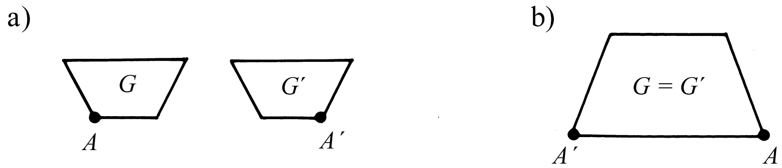


Figura 2.209

4. Completa en tu libreta a partir de algunos puntos de referencia, las imágenes simétricas dadas a continuación, auxiliándote de las propiedades de la simetría axial (fig. 2.210).

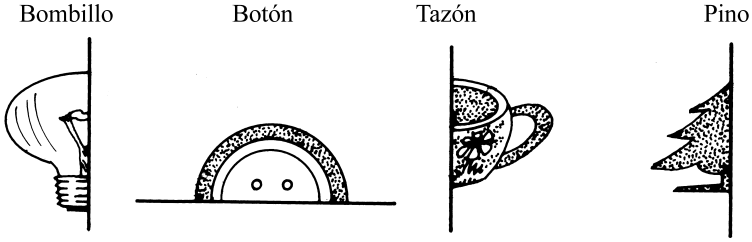


Figura 2.210

5. Observa las siguientes figuras y di en cuáles la recta trazada constituye uno de sus ejes de simetría, realiza para ello las mediciones de amplitudes y longitudes necesarias y argumenta tu respuesta (figura 2.211):

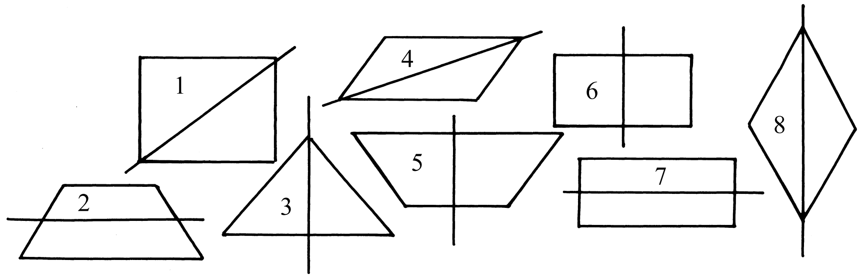


Figura 2.211

6. En cada una de las figuras siguientes, identifica el movimiento que transforma el cuadrilátero *ABCD* en el cuadrilátero *A'B'C'D'* y caracteriza los elementos que lo determinan (figuras 2.212 a 2.216).

a)

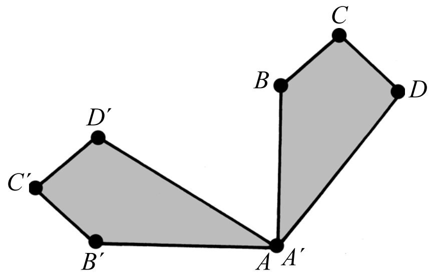


Figura 2.212

b)

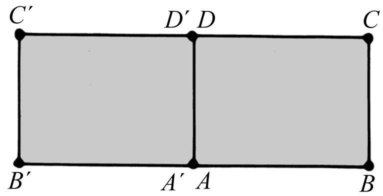


Figura 2.213

c)

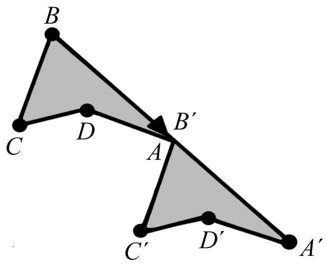


Figura 2.214

d)

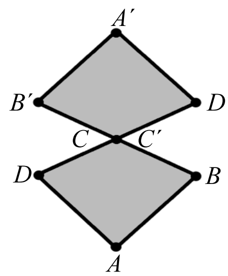


Figura 2.215

e)

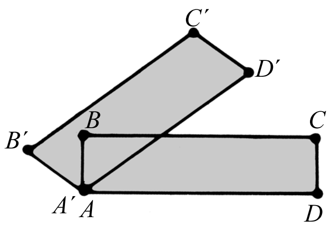


Figura 2.216

7. a) Dibuja un rectángulo *ABCD* y tomando como eje de simetría axial a la recta que contiene al lado *CD,* dibuja el rectángulo simétrico de *ABCD*. Llámalo *A'B'C'D'*. Vuelve a aplicar **la misma simetría** al rectángulo *A'B'C'D'*. ¿A qué conclusión puedes llegar?
   b) Aplica al rectángulo *ABCD* la composición de una simetría axial de eje en la recta *BC* y una rotación de centro *B* y ángulo de 90°.

8. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica las falsas.

   a) En el movimiento de rotación el centro de rotación coincide con su imagen.
   b) Una recta y su imagen por una traslación son paralelas.
   c) El movimiento de simetría central transforma toda semirrecta de origen en el centro de simetría en su semirrecta opuesta.
   d) En el movimiento de simetría axial la imagen de la recta que pasa por un punto y su imagen es paralela al eje de simetría.
   e) El movimiento de reflexión respecto a un punto es equivalente a una rotación de centro en el centro de reflexión y ángulo de 120°.
   f) Todo movimiento del plano conserva las amplitudes de los ángulos.
   g) Una figura y su imagen por un movimiento son diferentes.

9. Las ilustraciones 1, 2, 3 y 4 de la figura 2.218 están formadas por diferentes combinaciones de la unión de piezas iguales del tipo que aparece en la figura 2.217.
   De esta forma, los ángulos que en una misma figura aparecen formados por dos de estas piezas consecutivas y con vértice en el punto *O,* tienen igual amplitud. Describe para cada una de estas ilustraciones 1, 2, 3 y 4 todos los movimientos mediante los cuales permanecen invariantes.

Figura 2.217

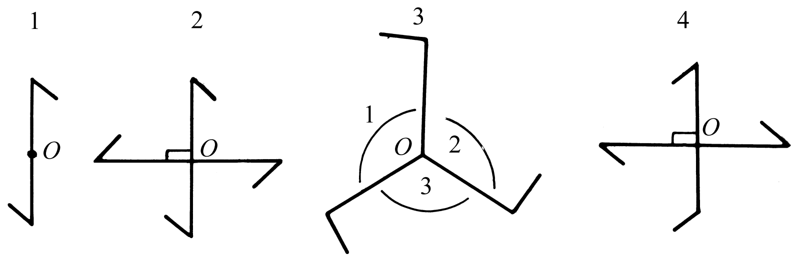


Figura 2.218

10. La figura 1 representa una cápsula de cristal que tiene grabada la palabra "MAR" y las figuras 2, 3 y 4 representan distintas posiciones de la misma cápsula (fig. 2.219).

    a) ¿Cuál de las figuras 2, 3 y 4 representa a la cápsula 1 mirada por detrás?
    b) ¿Cuál de las figuras 2, 3 y 4 representa a la imagen de la cápsula 1 por una simetría con eje en el lado *a?* ¿Cuál representa la imagen por una simetría con eje en el lado *b?*
    c) ¿Cuál de las figuras 2, 3 y 4 es la imagen de la cápsula 1 al aplicarle las dos simetrías anteriores consecutivamente?

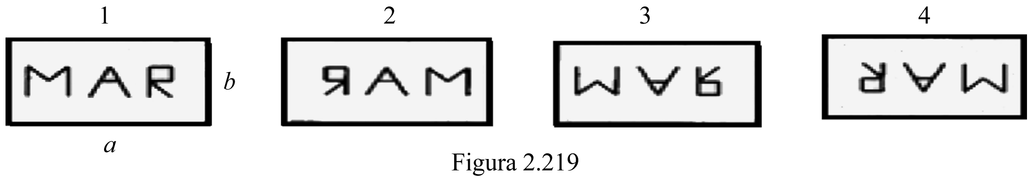


Figura 2.219

2.4 Relaciones entre los elementos de un triángulo y los de un cuadrilátero

Alejandro y Yadira están buscando relaciones entre los lados y ángulos de los triángulos y los cuadriláteros, para responder en la tarea de Matemática de 7.º grado (fig. 2.220). En este epígrafe estudiaremos esas propiedades. Realiza las actividades que se indican para que puedas obtenerlas.

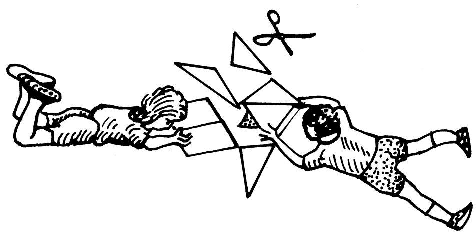


Figura 2.220

2.4.1 Relaciones entre los ángulos en el triángulo

¡! Al triángulo *ABC* de la figura 2.221, cuyos ángulos interiores tienen amplitudes α, β, γ, se le ha borrado el vértice *A* y no puede medirse la amplitud α.

¿Podrá calcularse α a partir de las amplitudes de los dos ángulos restantes? ¿Podrán calcularse también las amplitudes de los ángulos exteriores del triángulo?

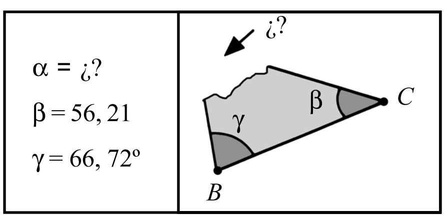


Figura 2.221

Busca papel o cartulina y toma unas tijeras como Yadira y Alejandro, para que sigas los pasos que les indicó su profesora de Matemática, con el propósito de indagar relaciones entre los ángulos de un triángulo:

1. Construye la plantilla de un triángulo cualquiera *ABC* y recorta sus ángulos interiores, cuyas amplitudes llamaremos: α, β, γ (fig. 2.222).

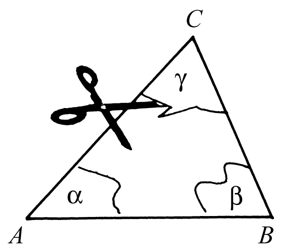


Figura 2.222

2. Denota por *r* a una recta y por *O* a uno de sus puntos (fig. 2.223):

Figura 2.223

3. Coloca los ángulos recortados sobre uno de los dos lados (lado sombreado) de la recta *r* con vértice en el punto *O* de forma consecutiva (fig. 2.224).
   ¿Qué tipo de ángulo has obtenido? Seguramente afirmarás que has construido un **ángulo llano,** cuya amplitud es de 180°, por lo cual:

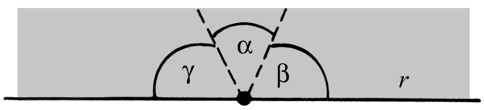


Figura 2.224

En ΔABC se cumple: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ o $\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 180°$ ¿Se cumplirá también esta relación en otros triángulos?

Recuerda el teorema de la suma de las amplitudes de los ángulos de un triángulo:

Teorema 3

En todo ΔABC las amplitudes de sus ángulos interiores suman 180°.

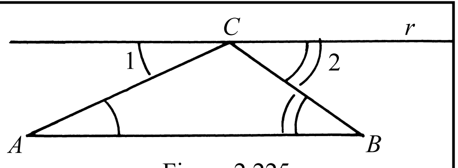


Figura 2.225

Demostración

Premisa: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ángulos interiores de ΔABC

Tesis: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

(continuación)

Sea r, con $r \parallel \overline{AB}$, por el punto C y si consideramos las secantes AC y BC, obtenemos así las parejas de ángulos alternos iguales: $\angle A = \angle 1$ y $\angle B = \angle 2$
$\angle 1 + \angle C + \angle 2 = 180°$ porque están del mismo lado de la recta r, luego:
$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ sustituyendo los ángulos respectivamente iguales a $\angle 1$ y $\angle 2$ en esta suma de amplitudes. lqqd

Después, Alejandro y Yadira trazaron el ángulo α^*, exterior al triángulo ABC en el vértice A, recortaron los ángulos interiores de los dos vértices restantes: B, C y los colocaron sobre el ángulo exterior construido, como puedes observar en la figura 2.226

¿A qué otra conclusión, ellos pudieron llegar?

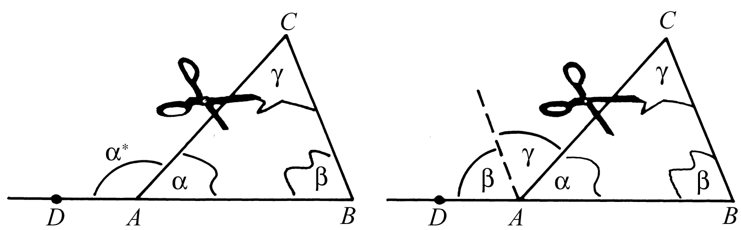


Figura 2.226

Conclusión: en el triángulo ABC se cumple: $\alpha^* = \beta + \gamma$ o $\alpha^* = \angle ABC + \angle BCA$.
Verifica que estas relaciones se cumplen también en otros triángulos.

Recuerda el teorema del ángulo exterior:[85]

Teorema 4

En todo triángulo, la amplitud de cada ángulo exterior es igual a la suma de las amplitudes de los dos ángulos interiores no adyacentes a él.

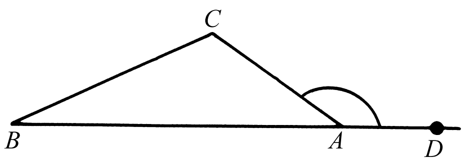


Figura 2.227

Demostración

Sin perder generalidad, sea ΔABC cualquiera y $\angle CAD$ uno de sus ángulos exteriores

[85] En algunos textos llaman teorema del ángulo exterior al que plantea que este tiene una amplitud mayor que la de los ángulos interiores del triángulo no adyacentes a él y que aquí es consecuencia de este teorema. En estas decisiones priman criterios didácticos o convencionales, según el ordenamiento en la construcción de la geometría.

Premisa:

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ángulos interiores de ΔABC y $\angle CAD$ ángulo exterior

Tesis: $\angle CAD = \angle B + \angle C$

$\angle A + \angle CAD = 180°$ porque cada ángulo exterior es adyacente a su interior correspondiente, por definición de ángulo exterior
$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ por suma de las amplitudes de los ángulos interiores de ΔABC
$\angle A + \angle CAD = \angle A + \angle B + \angle C$ comparando ambas igualdades
$\angle CAD = \angle B + \angle C$ lqqd

R ¡! Solución del problema planteado

Sí, se puede calcular la amplitud del tercer ángulo interior de un triángulo y de sus ángulos exteriores, si se da como dato la amplitud de los dos ángulos interiores restantes. ¿Cómo?

– **Para un ángulo interior:** a 180° le restamos la suma de las dos amplitudes dadas y obtenemos la amplitud del tercer ángulo:
$\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - (56{,}21° + 66{,}72°) = 57{,}07°$
– **Para un ángulo exterior:** sumando las amplitudes de los dos ángulos interiores no adyacente a este exterior: Exterior α^*(adyacente a α) $\alpha^* = \beta + \gamma = 56{,}21° + 66{,}72°$
Exterior β^*(adyacente a β) $\beta^* = \alpha + \gamma = 57{,}07° + 66{,}72°$
Exterior γ^*(adyacente a γ) $\gamma^* = \alpha + \beta = 57{,}07° + 56{,}21°$

Ejemplo 1:

En el triángulo isósceles de base *FG*. Los puntos *E, F, G* son alineados y $\angle FGH = 50°$ (fig. 2.228).
a) Calcula la amplitud de los ángulos *FHG* y *EFH*.
b) Clasifica al ΔFGH según la amplitud de sus ángulos.

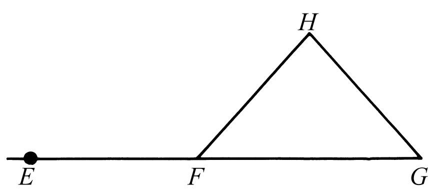


Figura 2.228

Solución:

a) En el triángulo *FGH*: $\angle FGH = 50°$ por datos

$\angle HFG = 50°$ porque es el otro ángulo base igual al $\angle FGH = 50°$ en ΔFGH isósceles.
$\angle FHG = 80°$ porque $\angle FGH + \angle HGF + \angle FGH = 80°$ por suma de amplitudes en FGH
$50° + 50° + \angle FGH = 180°$ sustituyendo las amplitudes.
$\angle FHG = 80°$ despejando y calculando.
$\angle EFH = \angle FHG + \angle FGH = 80° + 50° = 130°$ por ser ángulo exterior en el ΔFGH en F.

b) Por tanto, el triángulo FGH es acutángulo, porque todos sus ángulos son agudos. Otras propiedades referidas a los ángulos y lados de un triángulo, que podrás verificar haciendo las mediciones y comparaciones necesarias, son las siguientes:

Recuerda que en cualquier triángulo se cumple que:

- Si dos ángulos interiores tienen igual amplitud, los lados opuestos a estos ángulos, tienen igual longitud.
- Recíprocamente, si dos lados tienen igual longitud, entonces los ángulos interiores opuestos a estos lados tienen igual amplitud.
- De dos ángulos interiores, al de mayor amplitud, se opone el lado de mayor longitud entre los dos lados opuestos a estos dos ángulos.
- Recíprocamente, de dos lados, al lado de mayor longitud, se opone el ángulo interior de mayor amplitud entre los dos ángulos opuestos a dichos lados.

Ejemplo 2:

En la figura 2.229, clasifica el triángulo ABE según las longitudes de sus lados. ¿Cuál es su lado de mayor longitud si: $\angle AEB = 70°$ y $\angle EAB = 55°$?

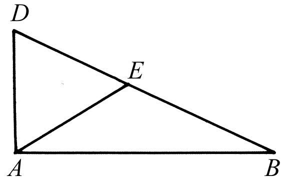


Figura 2.229

Solución:

$\angle ABE = 55°$ Por suma de amplitudes de los ángulos interiores del triángulo ABE y con ello, las amplitudes respectivas de sus ángulos interiores son: 55°, 55° y 70°; por lo cual, tiene dos ángulos de igual amplitud y los lados opuestos a estos ángulos, tienen igual longitud y el triángulo es isósceles. El lado de mayor longitud es $\overline{AB}$, pues se opone al ángulo AEB de mayor amplitud.

Ejercicios

1. Calcula la amplitud del tercer ángulo interior de un triángulo sabiendo que los dos restantes miden 35° y 95° respectivamente.
2. Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo mide 38°. ¿Cuánto mide el otro ángulo agudo?
3. El ángulo principal de un triángulo isósceles mide 46°. ¿Cuánto miden sus ángulos iguales?
4. Escribe tres medidas en grados que expresen respectivamente la amplitud de un ángulo exterior a un triángulo y de los dos ángulos interiores no adyacentes a él.
5. Halla la amplitud de los ángulos señalados en el triángulo de la figura 2.230, a partir de las amplitudes dadas en ella para el resto de los ángulos. Justifica tu respuesta.

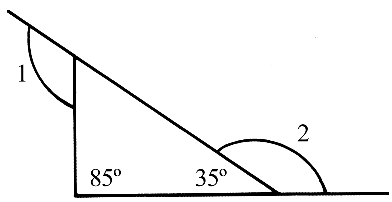


Figura 2.230

6. Dibuja un triángulo cuyos ángulos midan 30°, 50° y 100°. Calcula la amplitud de sus ángulos exteriores. ¿Cuánto suman las amplitudes de sus ángulos exteriores?
7. Calcula la suma de las amplitudes de los ángulos exteriores de un triángulo cualquiera.

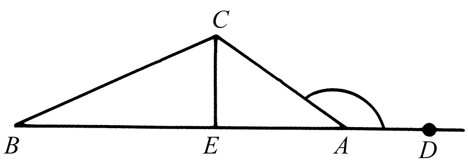


Figura 2.231

8. En el triángulo *ABC* de la figura 2.231: los puntos

   B, E, A, D son alineados; $\overline{CE}$ altura de $\overline{AB}$, $\angle BCE = 55°$ y $\angle CAD = 115°$.

   Determina la amplitud de los ángulos: $\angle CAE, \angle$ACE

   $\angle ACB$, $\angle CBE$. Justifica tu respuesta.
9. Un ángulo exterior a la base de un triángulo isósceles ¿puede ser un ángulo recto, agudo u obtuso? Fundamenta tu respuesta.

10.* Demuestra el Teorema de los terceros ángulos: Si dos triángulos tienen respectivamente dos ángulos de igual amplitud entonces los terceros ángulos también tienen igual amplitud.

2.4.2 Desigualdad triangular

Ya utilizaste en el epígrafe anterior la propiedad de la suma de las amplitudes de los ángulos de un triángulo, ¿existe alguna propiedad sobre la suma de las longitudes de los lados de un triángulo? En este epígrafe vamos a intentar descubrirlo, para lo cual te proponemos que analices el siguiente problema:

¡! Dunia observó que casi todos sus compañeros, cuando van al área deportiva desde la parada, siguen el caminito que dibujó con líneas discontinuas en este croquis. ¿Por qué?

Ellos no van por la acera, bordeando el triángulo de vértices en la parada (P), la escuela (E) y el área deportiva (A), en el recorrido que señaló con flechas (fig. 2.232).

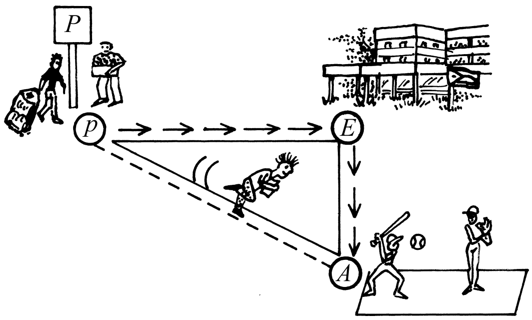


Figura 2.232

Compara ambos recorridos, determinados por las longitudes de los segmentos: $\overline{PA}$ y $\overline{PE} + \overline{EA}$. ¿Por qué los compañeros de Dunia siguen ese caminito?

R ¡! La respuesta es que la distancia $\overline{PA}$ es menor. Ello se fundamenta en una propiedad geométrica que todos los triángulos cumplen y que se denomina **desigualdad triangular.**

Recuerda la desigualdad triangular:

> En todo triángulo, la longitud de cualquier lado siempre es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados.

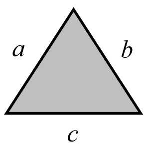
Ejemplo 1:

Se necesita cercar un terreno de forma triangular con 21 km de alambre. Si la cerca debe tener tres vueltas y la longitud de los lados del triángulo que forma el terreno son números enteros, ¿cuánto mide cada lado del terreno?

Solución:

– La cerca debe tener tres vueltas, luego una vuelta tendrá: 21 : 3 = 7 km.
– Para cada vuelta: $a + b + c = 7$, si a, b, c son las longitudes de los lados del terreno triangular, representadas por tríos de números naturales que deben cumplir también la desigualdad triangular: $b + c > a$. Fijemos la longitud de un lado y a partir de ella, demos valores de números naturales a las restantes longitudes, de manera que sumen 7 y cumplan la desigualdad triangular. Si fijas a, para $a = 1$, se cumple: $b + c = 6$ para que dé 7 y así, sucesivamente, obtenemos valores para b y c.

Vamos a disponer estos valores en una tabla:



a	***b***	***c***	***a***	***b***	***c***
1	1	5	2	1	4
1	2	4	2	2	3
1	3	3	3	1	3

Como a representa la longitud de un lado cualquiera, a partir de la última fila de la segunda tabla repiten los casos, ese es el tercero ya analizado, luego, se obtienen 5 casos y en ellos, 2 soluciones que se circularon en la tabla.

Ejemplo 2:

Dados tres segmentos (fig. 2.233) ¿puede formarse con ellos siempre un triángulo? ¿Influye en ello las exigencias de la desigualdad triangular? Haz una diferenciación de casos.

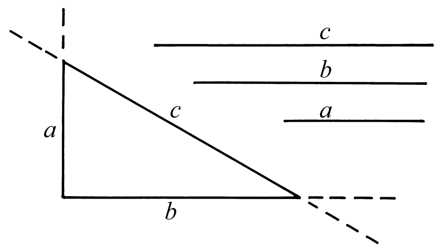


Figura 2.233

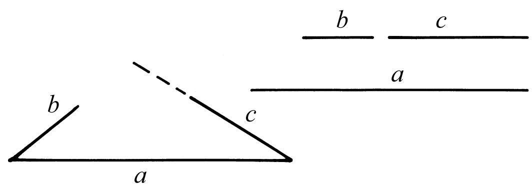
Caso 1:

Toma tres varillas de longitudes: a, b y c, respectivamente, de manera que la longitud de una de ellas, sea menor que la suma de las longitudes de las dos restantes o sea: $a < b + c$, $b < a + c$ y $c < b + a$, ¿puedes formar un triángulo con ellas?

Comprobarás que se puede formar un triángulo con ellas cuando cumplen tal condición los tres segmentos seleccionados. ¿Y si no se cumple esta condición?

Caso 2: para que no se cumpla esta condición, basta con que la longitud de una varilla, no cumpla este requisito. Si *a* es la longitud que no lo cumple, pueden ocurrir a) o b), es decir:

Caso 2a): $a > b + c$



Caso 2b): $a = b + c$

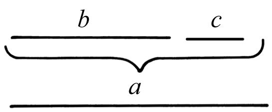


Figura 2.234

¿Podrá formarse en esos casos un triángulo?
Intenta averiguarlo con lápices cuyas longitudes estén dispuestas, según estos casos. La figura 2.232 te puede ayudar en la respuesta.

Conclusión: para el caso 1 se puede construir tal triángulo, pero para los casos 2a) y 2b) no es posible hacerlo, porque no existe un triángulo cuyos lados no cumplan esta propiedad, que se denomina **desigualdad triangular**.

Recuerda que:

Dados tres segmentos, si la longitud de cualquiera de ellos es mayor o igual que la suma de las longitudes de los otros dos segmentos, no es posible construir un triángulo con ellos, tal triángulo no existe en la geometría euclidiana.

Ejemplo 3:

En la respuesta de un ejercicio del concurso de Matemática, Daniel tiene dos posibilidades de solución sobre los lados *m, n* y *c* de un triángulo: la solución A y la B. Daniel escogió para la respuesta la solución B. Analiza estas soluciones y responde ¿Es acertada la respuesta de Daniel? Explica por qué.

Solución:

Solución A: (lado $m = 2$ cm, lado $n = 1$ cm, lado $c = 1$ cm)
Solución B: (lado $m = 3$ cm, lado $n = 5$ cm, lado $c = 4$ cm)

R/ La respuesta seleccionada por Daniel es correcta, porque en la solución A, no existe un triángulo con estos datos y esa respuesta debe descartarse.

Ejercicios

1. Argumenta o refuta la veracidad de la siguiente afirmación: "el terreno de forma triangular donde está enclavada la escuela mide por cada lado 1 km, 2 km y 3 km respectivamente".

2. Dados en cada inciso tres segmentos de determinada longitud, argumenta si en cada caso es posible construir con ellos un triángulo:

   a) 2 cm, 3 cm, 5 cm b) 4 cm, 3 cm, 5 cm c) 1 cm, 3 cm, 5 cm d) 3 cm, 3 cm, 3 cm

3. El lado desigual de un triángulo isósceles mide 5,0 cm, indica si es posible que la medida de sus lados iguales sea:

   a) 3 cm   b) 2 cm   c) 2,5 cm

4. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 3,0 cm, indica si es posible que la longitud de su tercer lado sea:

   a) 3 cm   b) 12 cm   c) 6 cm

5. Escribe tres números que expresados en centímetros pudieran corresponder a las longitudes de los lados de un triángulo.

6. Escribe tres números que expresados en centímetro no puedan corresponder a las longitudes de los lados de un triángulo.

7. Construye un cuadrado *MNPQ* y compara la longitud de su lado con la longitud de su diagonal. Fundamenta tu respuesta.

8. Construye un rombo *ABCD* y compara la longitud de su lado con la longitud de su diagonal. Fundamenta tu respuesta.

9. Observa que en la figura 2.235 aparecen dos cuadrados, el cuadrado *PRTU,* cuyos vértices son los puntos medios de los lados respectivos del cuadrado *OQSU,* de manera que $OQ > PR$. ¿Cuál de las desigualdades planteadas es correcta? Fundamenta tu respuesta.

   a) $OP + PQ + QR > PR + RQ + QS$
   b) $QS + SU < OS$
   c) $VT + TR > VR$

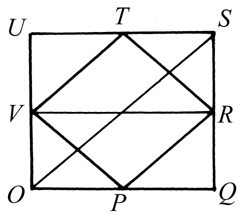


Figura 2.235

10. En la figura 2.236 se ha trazado un rombo *ABCD* cuyas diagonales se cortan en el punto *O*. ¿Cuál es el recorrido más corto *AODBO* o *ABDCO*?

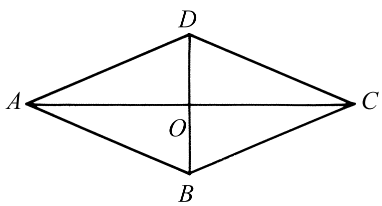


Figura 2.236

2.4.3 Rectas, segmentos y puntos notables en un triángulo

Andy realizaba un trabajo práctico de educación vial en la biblioteca sobre qué vía y en qué dirección debemos caminar. En él argumentó que **los peatones debemos transitar siempre por la derecha en cualquier dirección que tomemos** y complementó su trabajo con la ilustración de diferentes señales previstos en el Código de Tránsito, para avisar a los conductores de vehículos que deben detenerse o seguir con cautela.

Andy observó que estas señales tienen la forma de diferentes figuras geométricas. ¿Qué figuras geométricas reconoces en las señales de la figura 2.237? ¿Y qué nos indica cada una de estas señales?

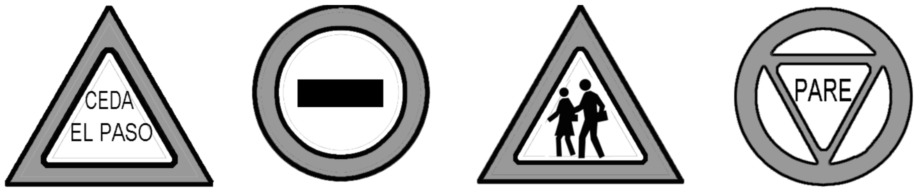


Figura 2.237

¡! Los mosaicos del piso de la biblioteca también tienen dibujos con figuras geométricas.

Aunque al primer vistazo, no parecen estar relacionadas, Andy observó que tanto en la conocida señal internacional de PARE, como en estos mosaicos está dibujada una circunferencia que contiene los tres vértices de un triángulo, mírala tú también en la figura 2.238, y se preguntó cómo podría construirse una circunferencia así.

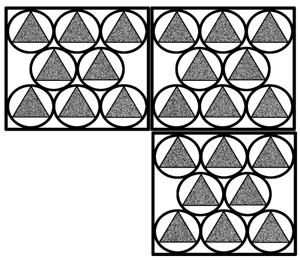


Figura 2.238

Con el estudio en este epígrafe, de los elementos notables del triángulo, podrás decirle a Andy cómo construir una circunferencia que contiene los tres vértices de un triángulo y su utilidad práctica.

a) Mediatriz

En un triángulo llamaremos *recta notable a la mediatriz* de cada uno de sus lados, y *segmentos notables a las medianas y las alturas* de sus lados y a las *bisectrices* de sus ángulos interiores.

La **mediatriz** de un lado de un triángulo (fig. 2.239) es la perpendicular trazada por el punto medio de dicho lado, que lo divide en dos segmentos de igual longitud. Al referirnos a ella, decimos: **“mediatriz del lado** $\overline{AB}$ **o mediatriz** m_{AB}**”.**

Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto llamado **circuncentro.** Para determinar el circuncentro, basta trazar solamente dos mediatrices, que al cortarse determinan, en el punto de intersección, al circuncentro. Por lo general, el circuncentro se denota con una letra O y puede ser un punto de un lado del triángulo, un punto interior o un punto exterior al triángulo, como puedes apreciar en la figura 2.240.

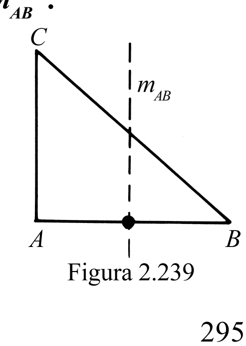
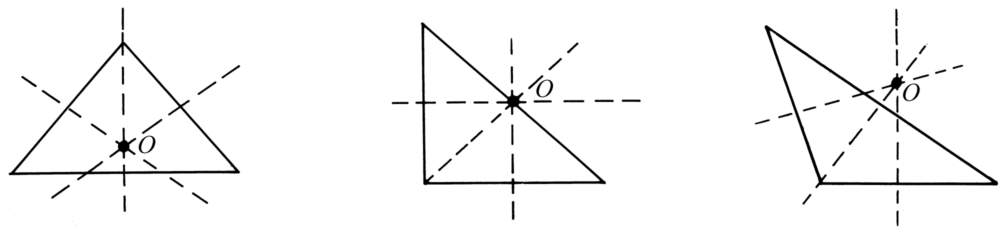


Figura 2.239



Triángulo acutángulo
El circuncentro es un punto interior al triángulo.

Triángulo rectángulo
El circuncentro es un punto de un lado del triángulo.

Triángulo obtusángulo
El circuncentro es un punto exterior al triángulo.

Figura 2.240

R ¡! Ahora podemos responder la interrogante que se planteó Andy: ¿Cómo puede construirse una circunferencia que pasa por los tres vértices de un triángulo?

Tal circunferencia tiene como centro al circuncentro del triángulo, es decir, el punto en que se cortan las mediatrices de los lados del triángulo. Haciendo centro en este punto y tomando como radio la longitud del segmento que une el circuncentro con uno de los vértices del triángulo basta para trazar tal circunferencia.

¿Qué utilidad práctica tiene esta circunferencia?

Pues que su centro está a la misma distancia de tres puntos no alineados, que en este caso son los vértices del triángulo. Al trazar una circunferencia determinas todos los puntos que están a la misma distancia de su centro, pero este problema es a la inversa; tenemos tres puntos cualesquiera no alineados ¿dónde ubicar uno que equidiste de ellos tres? Este punto es el circuncentro del triángulo que estos puntos forman.

b) Altura

La **altura** de un lado de un triángulo es el segmento perpendicular trazado desde un vértice hasta el lado opuesto o a su prolongación.

Por ejemplo, en la figura 2.241 al referirnos a ella decimos: **“la altura del lado** $\overline{AB}$**”** o **“la altura desde el vértice** C”.

En ocasiones se denota con la letra h o con esta letra, tomando como subíndice el lado correspondiente. En esta figura sería: h_{AB}.

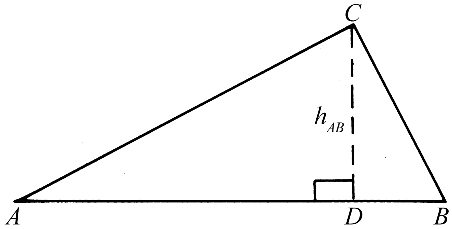


Figura 2.241

En la práctica, los albañiles necesitan determinar con precisión la altura de un lado de un triángulo con una plomada, procedimiento que tú también puedes aplicar:

- Recorta una plantilla de cartulina del triángulo que quieres trazarle la altura o dibújalo en una hoja de papel y confecciona una plomada con un pedazo de hilo a cuyo extremo atas un pequeño objeto pesado.
- Pincha con un alfiler el otro extremo del hilo en el vértice del triángulo, desde el cual vas a trazar la altura, como en la figura 2.242.

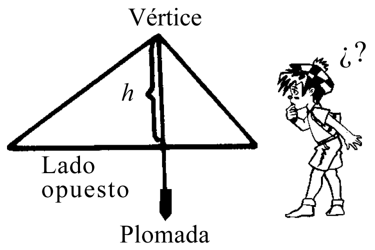


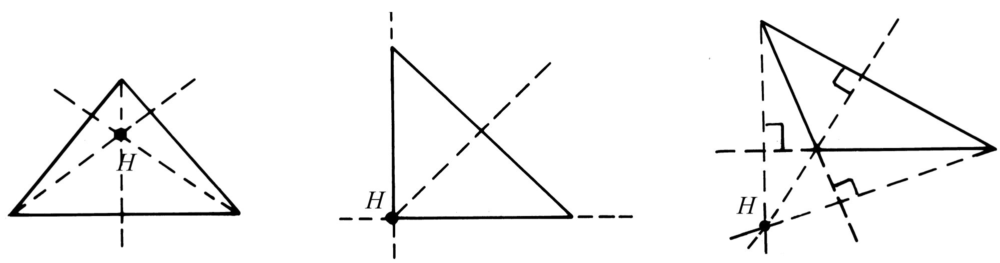
Figura 2.242

La longitud *h* del segmento de hilo determinado desde ese vértice hasta el lado que se le opone en el triángulo, constituye la altura de ese lado. Indaga con tu profesor en qué se fundamenta este procedimiento.

Las rectas que contienen las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado **ortocentro**. Para determinar el ortocentro, basta trazar solamente dos alturas, que al cortarse determinan en el punto de intersección al ortocentro.

Por lo general, el ortocentro se denota con una letra *H.*

El ortocentro puede ser un vértice, un punto interior o un punto exterior al triángulo, como puedes apreciar en la figura 2.243.



Triángulo acutángulo
El ortocentro es un punto interior al triángulo.

Triángulo rectángulo
El ortocentro es un vértice del triángulo.

Triángulo obtusángulo
El ortocentro es un punto exterior al triángulo.

Figura 2.243

c) Mediana

¡! Daniel recortó la plantilla de un triángulo y la colocó sobre la punta de su dedo índice, que extendió verticalmente y le dijo a Mercedes: ¡Mira el triángulo no se me cae! (fig. 2.244)

¿Cómo Daniel logró que el triángulo no se cayera?

Ahora estudiaremos una propiedad de las medianas de un triángulo que es la causa de este equilibrio.

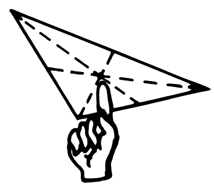


Figura 2.244

La **mediana** de un lado de un triángulo es el segmento que une su punto medio con el vértice opuesto a este lado. Por ejemplo, en la figura 2.245 al referirnos a ella, si M es punto medio de $\overline{AB}$, decimos: **"la mediana del lado $\overline{AB}$ o la mediana $\overline{CM}$"**.

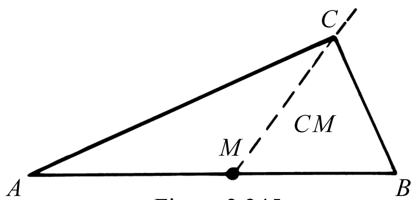
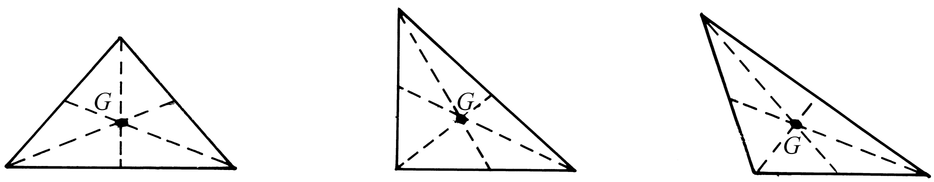


Figura 2.245

Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado **baricentro,** que es también el centro de gravedad del triángulo y por lo general, se denota con una letra G.

Para determinar el baricentro basta trazar solamente dos medianas, que al cortarse determinan en el punto de intersección al baricentro.



Triángulo acutángulo	Triángulo rectángulo	Triángulo obtusángulo
El baricentro es un punto interior	El baricentro es un punto interior	El baricentro es un punto interior

Figura 2.246

El baricentro es siempre un punto interior del triángulo, como puedes apreciar en la figura 2.246.

R ¡! Al trazar las tres medianas del triángulo y apoyar tu dedo índice en el baricentro, punto en que se cortan las medianas de un triángulo, el triángulo queda en equilibrio porque este punto es también el centro de gravedad del triángulo. Ya puedes explicarle a Mercedes por qué Daniel logró el equilibrio en el triángulo.

d) Bisectriz

¡! Tres bases de campismo están en posición triangular, unidas dos a dos por una pequeña carretera de acceso, como observas en este croquis de la figura 2.247.

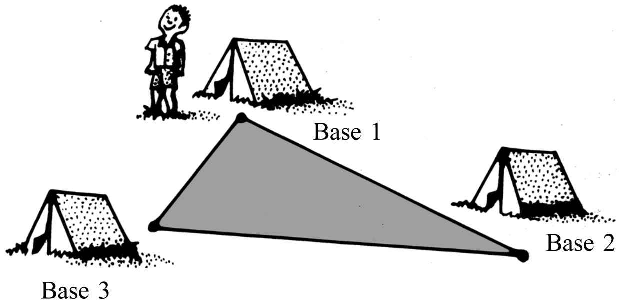


Figura 2.247

¿Dónde construir un puesto de mando que esté a la misma distancia de las tres carreteras?

Si se quisiera que el puesto de mando equidistara de cada base de campismo, ya sabes que estaría en el circuncentro del triángulo formado, pero se quiere que equidiste de las carreteras de acceso a cada base que supuestamente son los lados de este triángulo.

¿Dónde ubicamos el puesto de mando entonces? Vamos a estudiar las propiedades de la bisectriz para resolver este problema.

La **bisectriz** de un ángulo interior de un triángulo es el segmento contenido en la bisectriz de ese ángulo que une su vértice con el punto en que corta al lado opuesto (fig. 2.248).

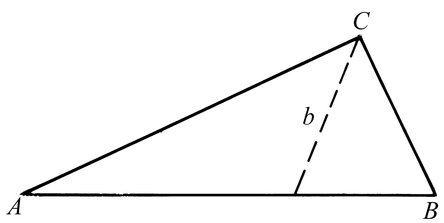


Figura 2.248

Divide al ángulo en dos ángulos de igual amplitud. Al referirse a ella, por ejemplo en la figura, decimos: **"la bisectriz del ángulo** *ACB"*.

Las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto llamado **incentro**.

Por lo general, el incentro se denota con una letra *I*. Para determinar el incentro, basta trazar solamente dos bisectrices que al cortarse determinan en el punto de intersección al incentro.

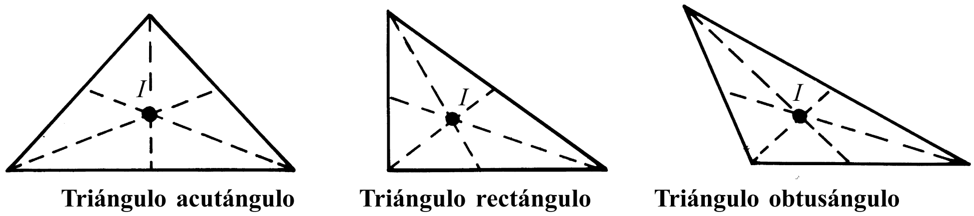


Figura 2.249

El incentro es siempre un punto interior del triángulo, como aprecias en la figura 2.249.

Ahora podemos resolver el problema relacionado con la base de campismo.

R ¡! Las tres bases de campismo pueden considerarse vértices de un triángulo, cuyos lados son las carreteras que las unen (fig. 2.250).

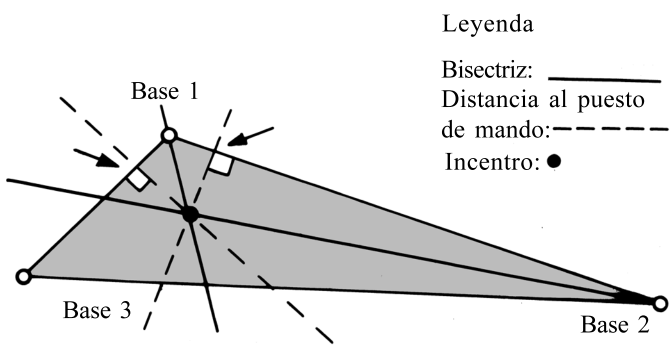


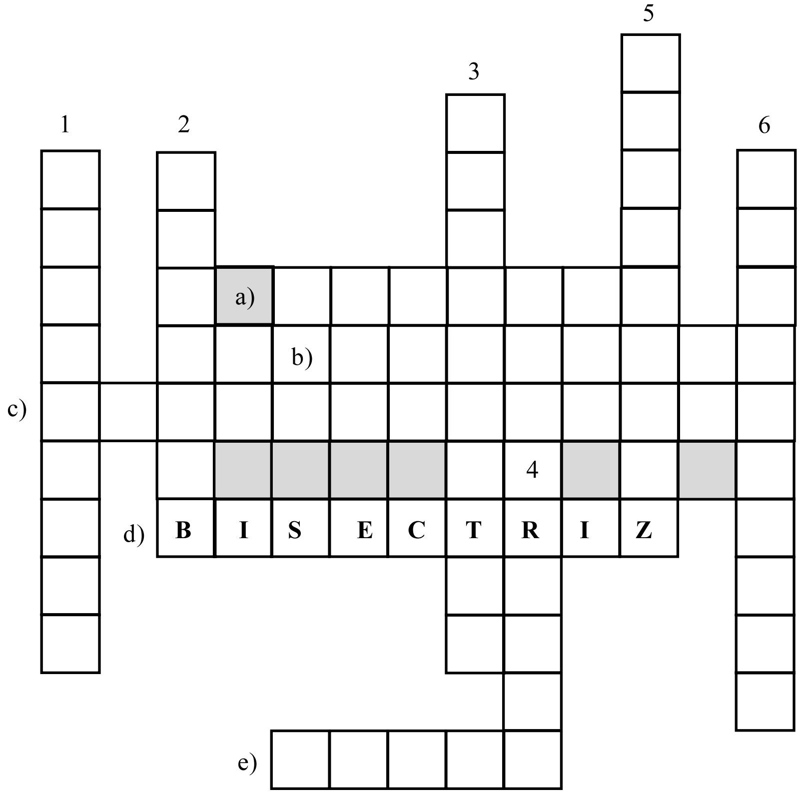
Figura 2.250

El puesto de mando estaría en el incentro, que es el punto donde concurren las bisectrices, porque equidista de los lados del triángulo.

Luego para ubicarlo, basta trazar dos de las bisectrices del triángulo y en su intersección está el incentro.

Ejercicios

1. Resuelve el siguiente crucigrama:



VERTICALES:

1. Triángulo en el que coinciden la mediana y la altura de un solo lado.
2. Segmento trazado desde un vértice del triángulo y que corta perpendicularmente al lado opuesto.
3. Centro de gravedad del triángulo.
4. Tipo de ángulo que determina la altura al cortar a su lado correspondiente en el triángulo.
5. Recta notable perpendicular a un lado del triángulo que lo corta en su punto medio.
6. Punto de intersección de las alturas de un triángulo.

HORIZONTALES:

a) Segmento que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto.
b) Punto de intersección de las bisectrices de un triángulo.
c) Punto de intersección de las mediatrices de un triángulo.
d) Segmento que divide a un ángulo de un triángulo en dos ángulos de igual amplitud.
e) Nombre del punto que divide a un segmento en dos segmentos de igual longitud.

2. Di cuáles afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas. Argumenta las falsas:

   a) La bisectriz de un ángulo es su eje de simetría.
   b) La bisectriz de un ángulo de un triángulo es un eje de simetría del triángulo.

c) El circuncentro equidista de los lados de un triángulo.
d) El incentro equidista de los vértices del triángulo.
e) Un triángulo tiene tres medianas.
f) Toda recta que pase por el punto medio de un lado del triángulo es su mediatriz.

3. Traza diferentes tipos de triángulos y construye el circuncentro de cada uno.
4. Traza diferentes tipos de triángulos y construye el ortocentro de cada uno.
5. Traza diferentes tipos de triángulos y construye el incentro de cada uno.
6. Traza diferentes tipos de triángulos y construye el baricentro de cada uno.
7. Recorta un triángulo de cartulina y determina su ortocentro, con una pequeña plomada que tú mismo confecciones.
8. Refuta o fundamenta lo que pensó Sonia:

   Un triángulo tiene tres alturas, pero las tres tienen la misma longitud, porque la altura se utiliza para calcular el área del triángulo y el área del triángulo es única, un triángulo no tiene tres áreas diferentes.

9.* Demuestra que las bisectrices de dos ángulos adyacentes forman un ángulo recto.

10. **Para investigar…** ¿Pueden coincidir la mediatriz, la altura y la mediana de un triángulo? Formula a partir de ello una conclusión.
11. **Para investigar…** En el triángulo existe una recta llamada *Recta de Euler,* cuyo trazado se relaciona con sus puntos notables. Queda ahora por ti consultar en otras fuentes de información cómo se traza esta recta. Traza un triángulo y determina su *Recta de Euler.*

2.4.4 Relaciones en el triángulo rectángulo

¡! Rebeca y Sofía están de acuerdo en que la mayor distancia que se puede recorrer entre dos puntos, en un terreno de forma rectangular de dimensiones 8,0 y 6,0 m, es la longitud de la diagonal. Sin embargo, no saben cómo pueden calcularla (fig. 2.251).

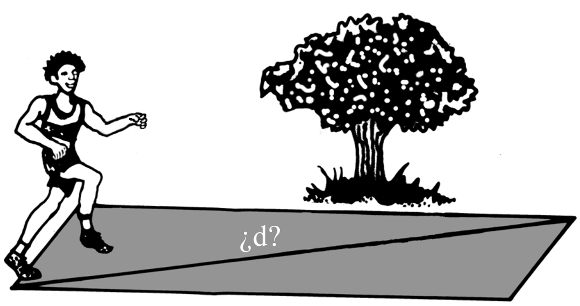


Figura 2.251

Al trazar una diagonal del terreno, quedan determinados dos triángulos rectángulos, cuyas propiedades debes estudiar cuidadosamente para que puedas ayudar a Rebeca y Sofía a calcular esta distancia (fig. 2.252).

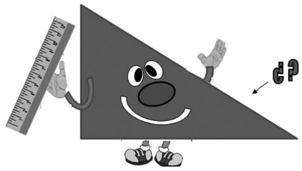


Figura 2.252

Un triángulo rectángulo tiene un ángulo **recto** y los dos restantes **agudos.**

A los lados que forman al ángulo recto les llamaremos **catetos** y el lado que se opone al ángulo recto: **hipotenusa** (fig. 2.253).

Los triángulos rectángulos cumplen la importante propiedad denominada Teorema de Pitágoras.

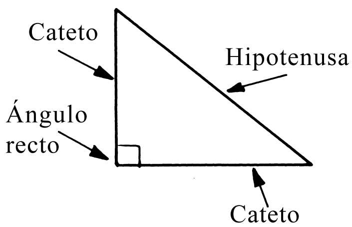


Figura 2.253

Recuerda el Teorema de Pitágoras:

En un triángulo rectángulo *ABC,* con hipotenusa de longitud c y catetos de longitudes respectivas a y b, se cumple que el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de la longitud de cada cateto, es decir:

En ΔABC rectángulo se cumple: $c^2 = a^2 + b^2$

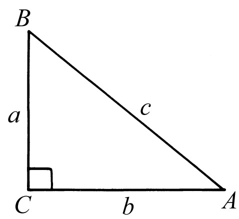


Figura 2.254

R ¡! Ahora, al igual que Rebeca y Sofía, ya puedes calcular la mayor longitud entre dos puntos en un terreno rectangular, que es la de su diagonal y que además, constituye la hipotenusa o lado que se opone al mayor ángulo –en este caso al ángulo recto– en los dos triángulos rectángulos que esta determina (fig. 2.255). Para calcularla aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$d^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$; $d = \sqrt{100} = 10$

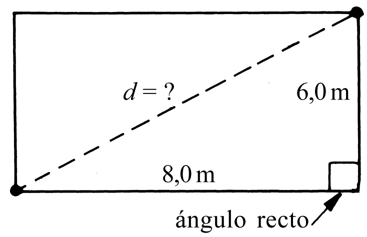


Figura 2.255

R/La mayor longitud que se puede recorrer en ese terreno entre dos puntos es 10 m.

Ejercicios

1. ¿Cuál es el mayor lado de un triángulo rectángulo? ¿Por qué?
2. Fundamenta la siguiente afirmación sobre los triángulos rectángulos:

   La longitud de la hipotenusa es menor que la suma de las longitudes de los catetos.
3. El pie de una escalera de 5,0 m está situado a 3,0 m de la pared a la cual está recostada, ¿qué altura alcanza la escalera en esta posición?
4. La base de un triángulo isósceles tiene longitud 6,0 cm. Halla la longitud de los lados iguales si su altura mide 4,0 cm.
5. ¿Puede decirse que los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios?
6. Se desea medir la distancia entre dos puntos A y B entre los cuales hay un edificio como obstáculo (fig. 2.256).

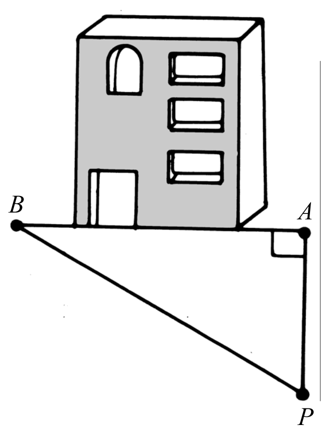


Figura 2.256

Para ello se trazó desde un punto P una perpendicular a uno de los dos puntos, en este caso A y se consideró el segmento que une este punto P con el otro punto B, como se aprecia en el croquis. A partir de ello se hicieron las mediciones de $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$. ¿Puedes calcular la distancia entre los puntos A y B con estos datos?

7. Esta propiedad se conoce como la generalización del recíproco del Teorema de Pitágoras:

   S*i en un triángulo el cuadrado de la longitud del lado mayor es igual que la suma de los cuadrados de las longitudes respectivas de los dos lados restantes, el ángulo que se opone al lado mayor es un ángulo recto y como consecuencia, el triángulo es rectángulo.*
   Si el cuadrado del lado mayor es menor que tal suma, el triángulo es acutángulo y si es mayor se trata de un triángulo obtusángulo.

   Aplica esa propiedad para clasificar al triángulo cuyos lados miden 12, 22 y 15 cm, respectivamente.

8. Halla la longitud de la altura de un triángulo isósceles, si su base mide 8,0 cm y sus otros dos lados iguales miden 5,0 cm.

9.* ¿Por qué en todo triángulo acutángulo la suma de las longitudes de sus alturas es menor que la suma de las longitudes de sus lados? Fundamenta tu respuesta.

10.* Halla la altura de un triángulo equilátero cuyos lados miden 20 cm.

2.4.5 Relaciones en los paralelogramos

¡! A una microbrigada social se le asignó un terreno para construir un edificio, que tiene la forma del cuadrilátero convexo $DCBA$ de la figura 2.257.

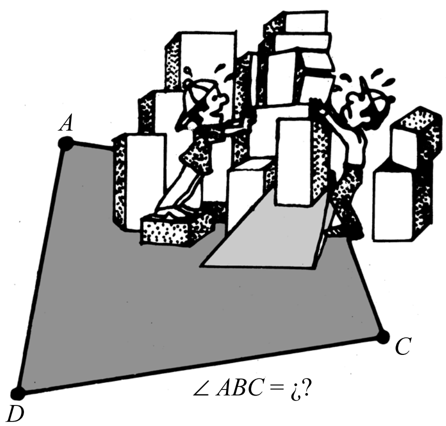


Figura 2.257

Sin embargo, un grupo de escombros no permite acceder a uno de los vértices e impide hacer las mediciones necesarias para confeccionar el plano del proyecto.

¿Cómo puede obtenerse la amplitud del ángulo ABC de dicho vértice a partir de las amplitudes del resto de los ángulos?

Datos: $\angle ADC = 70{,}09°$; $\angle DAB = 89{,}94°$; $\angle DCB = 81{,}34°$

Las propiedades de los cuadriláteros convexos te ayudarán a responder esta interrogante. Como recordarás los cuadriláteros, al igual que los polígonos, se clasifican en convexos y no convexos. Pero, ¿cómo sabemos si un cuadrilátero es convexo?

Para saber si un cuadrilátero es convexo, coloca una regla sobre uno de sus lados, como si fueras a trazar la recta que lo contiene. Observa si el cuadrilátero (fig. 2.258) está totalmente contenido en uno de los dos semiplanos que el borde de la regla determina en la hoja de papel.

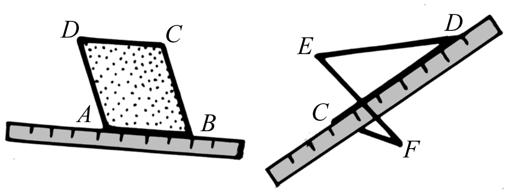


Figura 2.258

Si cuando repites el procedimiento para cada lado siempre se cumple, es convexo. En lo adelante, si no se especifica de otra forma, al decir solamente cuadrilátero, sobrentendemos que se trata de un cuadrilátero convexo.

Recuerda las propiedades de los cuadriláteros convexos:

- Las amplitudes de los ángulos interiores de los cuadriláteros convexos suman 360°.
- Las diagonales de un cuadrilátero convexo se cortan en un punto interior del cuadrilátero.

R ¡! Aplicando la propiedad anterior, puedes determinar la amplitud del ángulo que necesitan los microbrigadistas.

En el cuadrilátero convexo $DCBA$ (fig. 2.259):

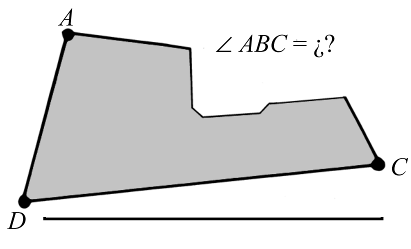


Figura 2.259

$\angle ADC = 70{,}09°$ $\angle DAB = 89{,}94°$ $\angle DCB = 81{,}34°$
$\angle ADC + \angle DCB + \angle ABC + \angle DAB = 360°$
$70{,}09° + 81{,}34° + \angle ABC + 89{,}94° = 360°$ por datos
$\angle ABC = 360° - 241{,}37° = 118{,}63°$

R/ La amplitud del cuarto ángulo es 118,63°.

Leticia resumió en un diagrama de Venn (fig. 2.260), las relaciones entre los diferentes tipos de paralelogramos, analízalo y cópialo también en tu libreta:

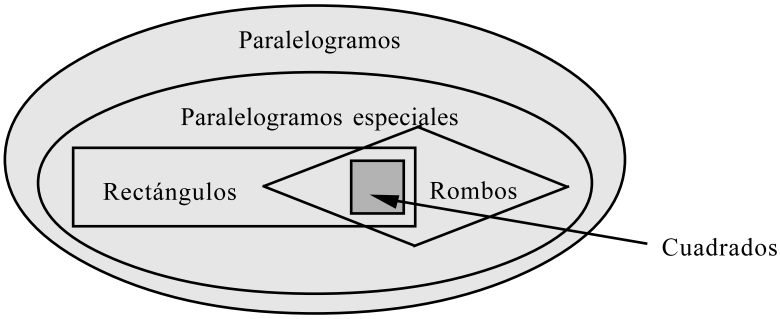


Figura 2.260

Recuerda las propiedades generales de todos los paralelogramos:

- La suma de las amplitudes de los ángulos interiores es 360°.
- Lados opuestos paralelos.
- Lados opuestos de igual longitud.
- Ángulos opuestos de igual amplitud.
- Las amplitudes de cada pareja de ángulos interiores consecutivos suman 180°.
- Las diagonales se cortan en el punto medio.

Para probar que un cuadrilátero convexo es un paralelogramo, basta con fundamentar que tiene par de lados opuestos iguales y paralelos o probar una de las propiedades del recuadro anterior.

La mayor parte de las propiedades del recuadro podrás demostrarlas en 8.º grado, cuando estudies la igualdad de triángulos, ahora demostraremos solamente el siguiente teorema:

Recuerda este teorema sobre los cuadriláteros convexos:

Teorema 5

Las amplitudes de los ángulos interiores de todo cuadrilátero convexo suman 360°.

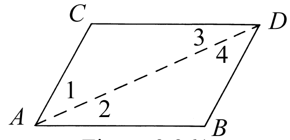


Figura 2.261

(continuación)

Demostración

Sea *ABDC* un cuadrilátero convexo cualquiera.

Premisa: ABDC cuadrilátero convexo

Tesis: $\angle A + \angle B + \angle D + \angle C = 360°$

Del universo de propiedades geométricas conocidas sobre ángulos interiores de un polígono, hasta el momento solamente conocemos que la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, vamos a tratar de aplicarla. Necesitamos pues *contar con triángulos* para aplicarla. ¿Qué se te ocurre hacer? ¿Cómo obtener triángulos a partir de un cuadrilátero convexo?
Efectivamente, si trazamos una diagonal, obtenemos dos triángulos en *ABCD.* Consideremos entonces la diagonal $\overline{AD}$ y así, los triángulos *ADC* y *ADB.* Pero también quedan divididos en ángulos consecutivos, los ángulos: $\angle A$ y $\angle D$.
¿Qué obtendremos como resultado de la suma de amplitudes
$\angle A + \angle B + \angle D + \angle C$? Veamos:

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = (\angle 1 + \angle 2) + \angle \mathrm{B} + (\angle 3 + \angle 4) + \angle C$ sustituyendo $\angle A$ y $\angle D$
$= (\angle 1 + \angle 3 + \angle C) + (\angle 2 + \angle 4 + \angle B)$ por conmutatividad y asociatividad
$= 180° + 180°$ por suma de amplitudes en ΔADC y ΔADB
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ lqqd.

¿Cómo aplicamos las propiedades de los paralelogramos?

Ejemplo 1:

En el paralelogramo *FGHI* (fig. 2.262), un ángulo interior mide 78°. ¿Cuánto miden los tres ángulos interiores restantes?

Solución:

– Sea *FGHI* el paralelogramo considerado y $\angle FGH$ el ángulo dado. Así, el ángulo que se le opone mide también 78°, porque en un paralelogramo los ángulos opuestos son iguales, luego $\angle FIH = 78°$.

– $\angle IFG$ y el ángulo dado son adyacentes al lado *FG,* suman 180°, por lo cual $\angle IFG = 102°$.

– De igual forma, $\angle GHI = 102°$, porque junto al ángulo dado es adyacente al lado *HG.*

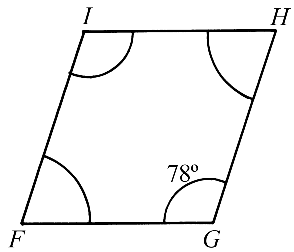


Figura 2.262

R/ Las amplitudes de los tres ángulos interiores restantes son 78°, 102° y 102°, respectivamente.

Ejemplo 2:

En el paralelogramo *EFGH* (fig. 2.263) se han trazado sus dos diagonales que se cortan en el punto *O*. Compare la longitud de las poligonales *OGHE* y *OEFG*. Argumenta tu respuesta.

Solución:

$\overline{OG}=\overline{OE}$ Obiseca a la diagonal $\overline{EG}$ de *EFGH*

$$\left.\begin{array}{l}\overline{GH}=\overline{EF}\\ \overline{HE}=\overline{FG}\end{array}\right\}\text{ Por lados opuestos del paralelogramo } EFGH$$

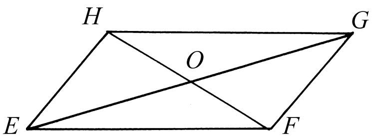


Figura 2.263

Luego: $\overline{OG}+\overline{GH}+\overline{HE}=\overline{OE}+\overline{EF}+\overline{FG}$

R/ Ambas poligonales tienen la misma longitud, porque están formadas por segmentos de igual longitud.

Paralelogramos especiales

¡! Está próximo el 4 de abril y los pioneros de séptimo grado preparan su fiesta, para la cual quieren confeccionar unas tarjetas de invitación de forma cuadrada (fig. 2.264).

Yaíma y Mary recortan cuadrados de cartulina rosada, miden sus lados para ver si son iguales y comprueban así, que tienen forma de cuadrado.

Alberto y Reinier recortan cuadrados azules, pero comprueban que son cuadrados de manera diferente: ellos miden las diagonales para ver si son iguales.

¿Son correctos los procedimientos que utilizan estos estudiantes?

Enjuiciar estos procedimientos, requiere dominar las propiedades del cuadrado.

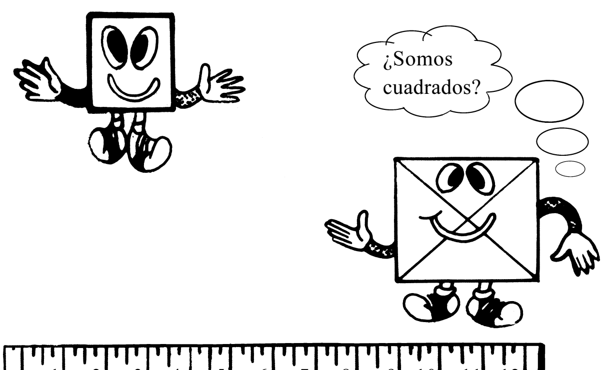
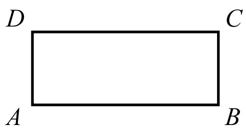
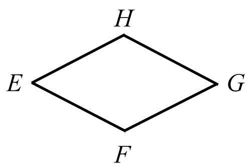
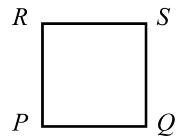


Figura 2.264

El cuadrado es un paralelogramo especial. Los paralelogramos especiales, además de las propiedades generales de los paralelogramos, cumplen otras propiedades que permiten distinguirlos en rectángulos, rombos y cuadrados. ¿Conoces estas propiedades? Te invitamos a que las estudies en la siguiente tabla, para que puedas determinar si son correctos los procedimientos que emplearon los pioneros en los preparativos del 4 de abril.

Recuerda las propiedades de los paralelogramos especiales:

Paralelogramos especiales		
Rectángulos Paralelogramos que tienen cuatro ángulos rectos.	**Rombos** Paralelogramos que tienen cuatro lados iguales.	**Cuadrados** Paralelogramos que tienen cuatro ángulos rectos y cuatro lados iguales.
Rectángulo *ABCD*  Figura 2.265	Rombo *EFGH*  Figura 2.266	Cuadrado *PQRS*  Figura 2.267
Propiedades que cumplen – Propiedades generales de los paralelogramos. – Todos los ángulos rectos. – Diagonales de igual longitud.	Propiedades que cumplen – Propiedades generales de los paralelogramos. – Todos sus lados de igual longitud. – Diagonales perpendiculares. – Diagonales bisectrices de los ángulos interiores cuyos vértices unen.	Propiedades que cumplen – Propiedades generales de los paralelogramos. – Todas las propiedades de los rectángulos. – Todas las propiedades de los rombos.

Ejemplo 3:

En el triángulo *ABC* rectángulo en el vértice *A* se cumple: $F \in \overline{AB}$; $D \in \overline{CA}$; $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{EF} \parallel \overline{CA}$ Fundamenta que *AFED* es un rectángulo (fig. 2.268).

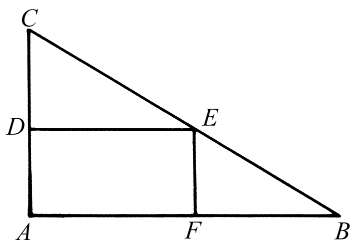


Figura 2.268

Solución:

Para probar que el cuadrilátero *AFED* es un rectángulo, necesitamos fundamentar que:

Es un paralelogramo y sus ángulos interiores todos son rectos. Veamos.

1) *AFED* es un paralelogramo, porque sus lados opuestos son paralelos:

$\overline{DE} \,||\, \overline{AF}$ pues $F \in \overline{AB}$ y $\overline{DE} \,||\, \overline{AB}$ por datos

$\overline{EF} \,||\, \overline{AD}$ pues $D \in \overline{CA}$ y $\overline{EF} \,||\, \overline{CA}$ por datos

2) Los cuatro ángulos interiores del cuadrilátero *AFED* son rectos ya que:

$\angle A = 90°$ porque *ABC* rectángulo en *A*

$\angle AFE = 90°$ por ser conjugado al $\angle A$ con $\overline{EF} \,||\, \overline{CA}$

$\angle ADE = 90°$ por ser conjugado al $\angle A$ con $\overline{DE} \,||\, \overline{AB}$

$\angle DEF = 90°$ por suma de las amplitudes de los ángulos de *AFED.*

De 1) y 2) *AFED* es rectángulo, porque es un paralelogramo con cuatro ángulos rectos.

R ¡! Para comprobar que las plantillas de triángulos de cartulina son cuadradas, no basta con medir sus lados, porque un rombo tiene sus lados iguales y no necesariamente es un cuadrado.

Tampoco es suficiente medir sus diagonales, porque los rectángulos y trapecios isósceles también tienen diagonales iguales y no son cuadrados, por tanto, este procedimiento no es correcto en ambos casos.

Ejemplo 4:

Resume las propiedades de los paralelogramos especiales en una tabla.

Solución:

Paralelogramo especial	**Diagonales**			**Lados iguales**	
	Iguales	**Perpendiculares**	**Se bisecan**	**Todos**	**Opuestos**
Rectángulo	X		X		X
Rombo		X	X	X	X
Cuadrado	X	X	X	X	X

Ejercicios

1. ¿Existen cuadriláteros convexos con todos sus ángulos interiores obtusos? ¿Por qué?
2. ¿Puede un cuadrilátero convexo tener los cuatro ángulos interiores agudos? ¿Por qué?
3. Un ángulo exterior de un paralelogramo mide 117°. Calcula todos sus ángulos interiores.

4. ¿Podemos decir que…?
   - Un paralelogramo que tiene un ángulo recto es un rectángulo.
   - Un cuadrilátero convexo que tiene cuatro lados iguales es un rombo.
   - Un paralelogramo que tiene dos lados consecutivos iguales es un rombo.
5. ¿Quién soy? Tengo los lados iguales y no soy un cuadrado.
6. ¿Quién soy? Tengo las diagonales iguales y no soy un rectángulo.
7. Un ángulo interior de un paralelogramo mide 57°. Calcula el resto de sus ángulos interiores.
8. Busca en la sopa de letras las palabras convenientes para completar las propiedades de un paralelogramo que se plantean a continuación:

   a) Los ángulos interiores de igual amplitud se denominan: ____________________.

   b) Las diagonales ____ _________________________.

   c) Las amplitudes de los ángulos interiores consecutivos: _____.

   d) Los lados opuestos son _____________________ y ____________________.

R	A	E	**I**	P	A	R	A	L	E	L	O	S
E	W	D	**G**	L	S	O	S	U	T	B	O	A
C	R	S	**U**	M	A	N	180°	Q	T	T	B	I
T	D	T	**A**	G	S	O	T	S	E	U	P	O
O	F	G	**L**	P	Ñ	U		E	V	F	P	O
S	G	S	**E**		B	I	S	E	C	A	N	F
A	B	I	**S**	E	C	T	R	I	C	E	S	H

9.* Demuestra que los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.

10. **Para investigar…** El Tangram es un rompecabezas chino de forma cuadrada, llamado también *CHI – CHAE – PAN,* que significa *Tabla de la sabiduría* o *Tabla de los siete elementos* porque está formado por siete figuras planas. Investiga cómo confeccionarlo para que tengas tu propio tangram, así con sus piezas puedes construir triángulos, cuadrados, rectángulos, paralelogramos y muchas otras figuras geométricas planas.

2.4.6 Relaciones en los trapecios y trapezoides

Andrés, Elia y Teresa recopilan información sobre fuentes de energía renovable para complementar las exigencias de la tarea de Matemática.

Teresa precisó que el aire es un recurso renovable que no se agota nunca y el viento no es más que el aire en movimiento.

Elia indagó las ventajas de la energía eólica que aprovecha la energía del viento y tiene una incidencia ambiental saludable y Andrés aportó un dato histórico interesante: ¡las tres carabelas: La Pinta, La Niña y La Santamaría que llegaron a Cuba en 1492, dirigidas por Colón, vinieron impulsadas por el viento! Ahora solamente les resta resolver el problema geométrico siguiente.

¡! En centros agropecuarios de diferentes puntos del territorio nacional cubano se pueden observar molinos de viento para el bombeo del agua, que reportan por cada uno, un ahorro mínimo de 1,5 toneladas de combustible Diesel al año.[86] La figura 2.269 ilustra el modelo Taíno 822 producido en Cuba. ¿Cómo calcular las dimensiones de la vista frontal del soporte de la estructura de este modelo de molino de viento cubano? Necesitamos estudiar las propiedades del trapecio para ayudar a Elia, Teresa y Andrés en su trabajo práctico.

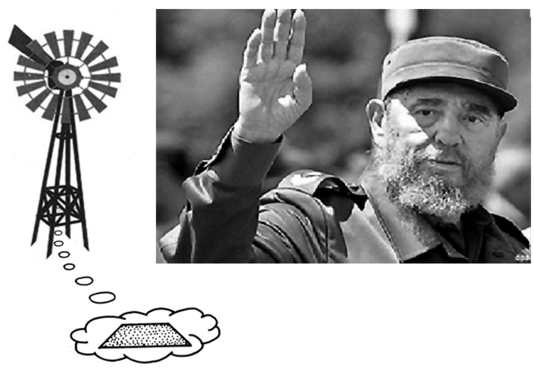


Figura 2.269

"Hemos encontrado, afortunadamente, algo más importante, el ahorro de energía, que es como encontrar un gran yacimiento"

Fidel, 5 de mayo del 2006.

[86] MINBAS: *Ahorro de energía: la esperanza del futuro,* Editora Política, La Habana, 2001.

Todos los trapecios tienen un par de lados opuestos paralelos y cumplen también la propiedad relativa a su base media.

Recuerda la propiedad de la base media de los trapecios:

La **base media** o paralela media de un trapecio es el segmento que une a los puntos medios de sus lados no paralelos y cuya longitud es igual a la semisuma de las longitudes de sus bases.

Ejemplo1:

En el trapecio *CDHG* de la figura 2.270:

$\overline{GH}$: base superior

E punto medio $\overline{HD}$

F punto medio $\overline{GC}$

$\overline{CD} = 2{,}2$ m ; $\overline{FE} = 2{,}1$ m

Calcula la longitud de $\overline{GH}$.

Solución:

Por propiedad de la base media del trapecio *CDHG* se cumple que:

$$\frac{\overline{GH} + 2{,}2}{2} = 2{,}1$$

$$\overline{GH} = \frac{4{,}2 - 2{,}2}{2} = 2{,}0 \text{ m}$$

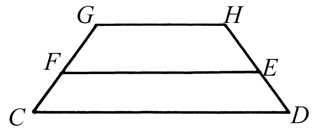
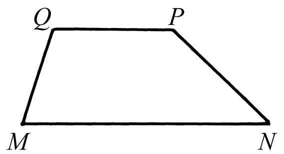
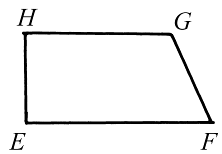
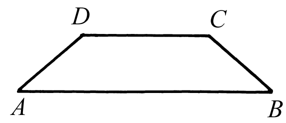


Figura 2.270

R/ La longitud de la base superior del trapecio *CDHG* es $\overline{GH} = 2{,}0$ m .

Recuerda las propiedades de los trapecios:

Trapecio general	**Trapecio rectángulo**	**Trapecio isósceles**
Es un cuadrilátero convexo que tiene un par de lados opuestos paralelos.	Es un cuadrilátero convexo que tiene un par de lados opuestos paralelos y al menos un ángulo recto.	Es un cuadrilátero convexo que tiene un par de lados opuestos paralelos y los lados no paralelos de igual longitud.

 Figura 2.271	 Figura 2.272	 Figura 2.273
Propiedades	**Propiedades**	**Propiedades**
• Propiedades de los cuadriláteros convexos. • Propiedad de la base media.	• Propiedades de los cuadriláteros convexos. • Propiedad de la base media. • Dos ángulos rectos.	• Propiedades de los cuadriláteros convexos. • Propiedad de la base media. • Ángulos adyacentes a cada base de igual amplitud. • Diagonales de igual longitud.

Los **trapezoides** son cuadriláteros convexos que no tienen lados paralelos. No los distingue ninguna propiedad, pero existe un trapezoide muy especial, es el llamado **trapezoide simétrico**, porque tiene la propiedad de ser simétrico, respecto a una de sus diagonales.

En la figura 2.274, *CDEF* es un trapezoide simétrico.

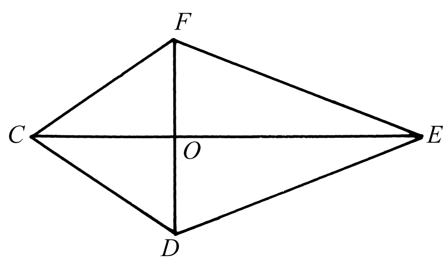


Figura 2.274

Recuerda las propiedades de los trapezoides simétricos:

– Es simétrico respecto a una de sus diagonales.
– Sus diagonales son perpendiculares.
– A consecuencia de su simetría tiene dos parejas de lados iguales. Cada pareja tiene un vértice común y sus dos lados son simétricos respecto a una diagonal, aquella que es eje de simetría y bisectriz de los ángulos interiores cuyos vértices corresponden a sus extremos.

Ejemplo 2:

En la figura 2.274, puedes apreciar que el trapezoide simétrico *CDEF* cumple que:

- Tiene como eje de simetría a la diagonal $\overline{CE}$.
- Se cumple que sus diagonales son perpendiculares: $\overline{CE} \perp \overline{DF}$.
- Sus parejas de lados simétricos e iguales son: $\overline{CF}$ y $\overline{CD}$; $\overline{FE}$ y $\overline{DE}$.
- La diagonal $\overline{CE}$ es bisectriz de los ángulos interiores con vértice en *C* y *E*.

Ejercicios

1. Si las bases de un trapecio miden 10 cm y 1,8 dm respectivamente. ¿Cuánto mide su base media?
2. Si la base media de un trapecio mide 210 cm y una de sus bases mide 22 dm. ¿Cuánto mide la otra base?
3. En la figura 2.275 está representado el trapecio *RSTU* rectángulo en *R*. Si $\angle S = 65°$, completa el resto de las amplitudes de sus ángulos interiores:

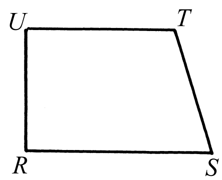


Figura 2.275

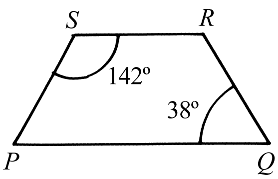
$\angle R =$ ________

$\angle U =$ ________

$\angle T =$ ________

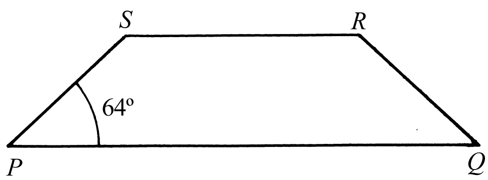
4. Si *PQRS* es un trapecio isósceles de bases $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$. Calcula y completa las amplitudes de sus ángulos interiores que se exigen en cada inciso con los datos dados en la figura 2.276:

a)



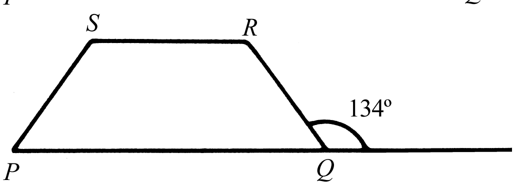
$\angle P =$ ____ $\angle R =$ ____

b)



$\angle Q =$ ____ $\angle R =$ ____ $\angle S =$ ___

c)



$\angle P =$ ____ $\angle Q =$ ____

$\angle R =$ ____ $\angle S =$ ____

Figura 2.276

5. ¿Quién soy? Tengo las diagonales iguales y no soy un rectángulo.
6. Fundamenta por qué las amplitudes de cada pareja de ángulos adyacentes a cada uno de los lados no paralelos del trapecio suman 180°.
7. ¿Puede un trapecio rectángulo ser también un trapecio isósceles? ¿Por qué?
8. Existe un trapecio con dos ángulos rectos. ¿Por qué?
9. Existe un trapecio con tres ángulos rectos. ¿Por qué?

10.* Demuestra que en todo trapecio isósceles los ángulos adyacentes a una misma base son de igual amplitud.

2.5 Circunferencia y círculo

Ocho estudiantes de séptimo grado decidieron reflexionar sobre la importancia de no fumar por los daños que ocasiona a la salud este hábito, para ello decidieron sentarse de forma tal que todos pudieran ver a la vez una cajetilla de cigarros y expondrán una razón para argumentar esta idea. ¿Puedes dar tú también una de estas razones?

Ellos se sentaron tal y como se ilustra en la figura 2.277 ¿Qué figura geométrica representa la posición en que se sentaron esos estudiantes? ¿Por qué?

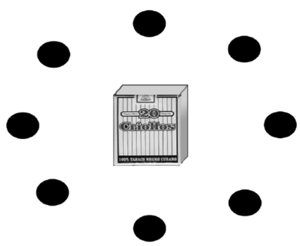


Figura 2.277

Seguramente has identificado a la circunferencia y al círculo. ¿Has pensado también en sus variadas aplicaciones prácticas?

Desde las antiguas civilizaciones puede verse la forma circular en la confección de instrumentos de trabajo, de carga, en medios para trasladarse, en escudos de guerra, entre otros (fig. 2.278).

Más tarde aparece en la esfera del reloj, en las poleas, anillos, pulseras y hasta en los discos compactos, que tanto se utilizan para guardar información en nuestros días.

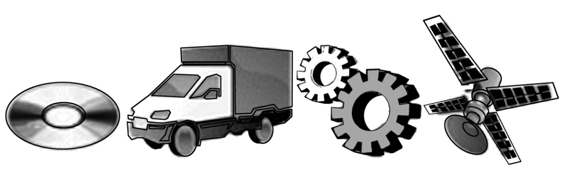


Figura 2.278

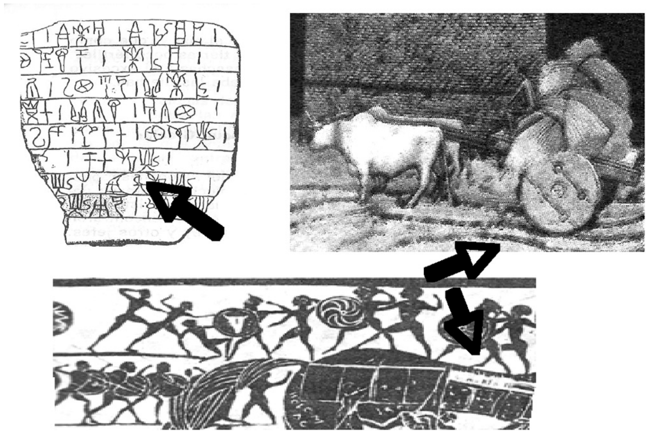


Figura 2.278

En Cuba, la manifestación del uso de circunferencias en nuestros antepasados, nos ha llegado como arte rupestre, en la imagen de *La Cruz Pinera* (fig. 2.279), en la Isla de la Juventud. ¡Cuántas circunferencias! ¿Verdad?

En las galerías con muestras de obras de arte, tanto en pinturas como esculturas, habrás notado que nunca faltan estás figuras.

La cubana Alicia Leal (1957) es una de las artistas de la plástica cubana actual. De una hermosa manera trata el tema de la mujer en sus pinturas, fíjate cómo se auxilia de círculos en esta que te mostramos (fig. 2.280).

Figura 2.279

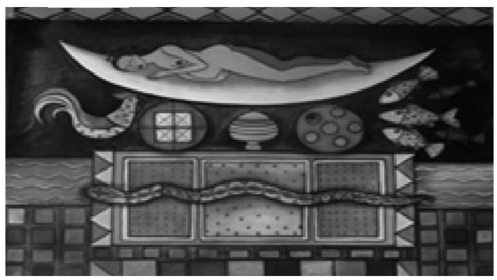


Figura 2.280

Vamos a comenzar el estudio de la circunferencia y el círculo. Demos paso a una situación que se le ha presentado a Raúl en la clase de Matemática, trabajemos juntos para darle una solución correcta.

¡! El Parque Nacional *Ciénaga de Zapata* es el humedal mejor conservado del Caribe Insular y además, reserva de la biosfera. Tiene una extensión de 34 000 ha de superficie húmeda en la que habitan 115 especies de flora y 310 de fauna.

En la figura 2.281 se aprecia una de sus lagunas y en ella un bello arreglo floral natural. ¿De qué figura geométrica tiene forma su base?

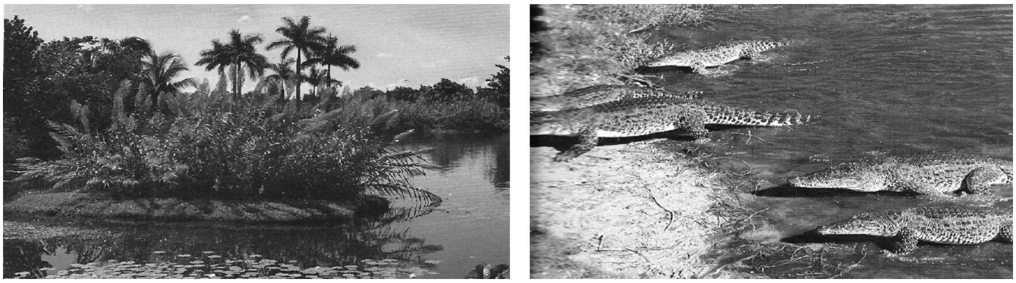


Figura 2.281

¿Cómo puede determinarse su centro para mantener con la poda las dimensiones del arreglo, durante su crecimiento?

Por supuesto, la base tiene forma de circunferencia; vamos a recordar algunas de sus propiedades fundamentales que nos permitirán determinar su centro.

2.5.1 Elementos principales de la circunferencia y el círculo

Ya hemos estudiado algunas de las figuras planas conocidas, solo nos falta la línea curva y cerrada que dibujas con un compás o marcando el borde de algunos objetos, como una moneda, el fondo de un vaso o botella (fig. 2.282), algunos botones, etcétera.

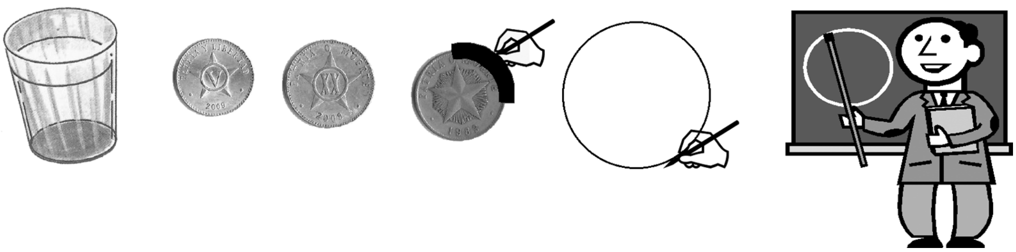


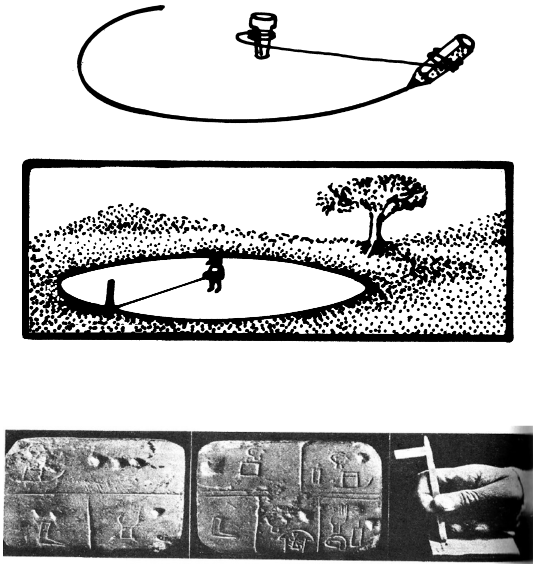
Figura 2.282

En grados anteriores estudiaste que esta línea curva se llama circunferencia.

Recuerda la definición de circunferencia:

> Se llama **circunferencia** al conjunto de todos los puntos del plano situados a la misma distancia de un punto fijo de dicho plano.

La necesidad de efectuar cálculos en la circunferencia comenzó en la región situada entre los ríos Éufrates y Tigris hace unos 3 500 años a.n.e., denominada *Mesopotamia,* que precisamente significa *país entre ríos.*



Tablillas de barro con escritura cuneiforme y el estilete de hueso para grabar en ellas

Figura 2.283

En la actualidad este territorio pertenece a la República de Irán. Sus conocimientos han llegado a nuestros días mediante la escritura cuneiforme o en forma de cuña (fig. 2.283), que grababan en tablillas de barro de forma casi cuadrada, con un estilete de hueso.

Para trazar la circunferencia empleaban una cuerda o cordel estirado con uno de sus extremos fijo a una estaca (fig. 2.283).

En la clase de Matemática se traza la circunferencia utilizando un compás, pero se sigue empleando el procedimiento de la estaca para construir circunferencias con fines prácticos, por ejemplo, en jardinería o en albañilería. Intenta con tus compañeros de aula utilizar este procedimiento para trazar una circunferencia con tiza en el patio de la escuela.

Te invito a realizar la construcción de una circunferencia de 2,0 cm de radio, pero, ¿qué es el radio de una circunferencia?

Fíjate en las ruedas de una bicicleta, figura 2.284. Tienen forma de circunferencia, ¿cuáles son sus radios? No lo dudes, son los rayos de la bicicleta. Observa que todos concurren en el centro de la rueda.

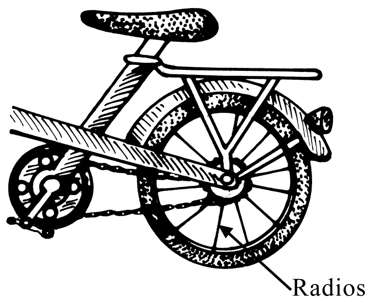


Figura 2.284

Comencemos a trabajar, necesitamos un compás y una regla o cartabón para seguir las indicaciones que siguen:

1. Fijamos con una longitud determinada las puntas del compás en la regla graduada o cartabón, longitud que es el radio de la circunferencia que queremos trazar. (En este ejemplo vamos a tomar como longitud 2,0 cm (fig. 2.285), porque es esta precisamente el radio de nuestra circunferencia).

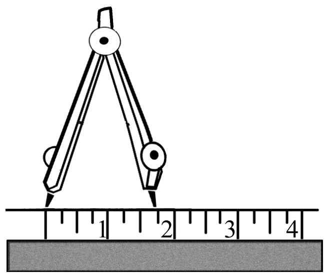


Figura 2.285

2. Seleccionamos un punto cualquiera sobre la hoja de papel y denotamos a este punto por *O*, figura 2.286.
3. Apoyamos la punta del compás sobre el punto *O* (fig. 2.287) y hacemos girar el compás alrededor de este punto ¡y ya está trazada la circunferencia!

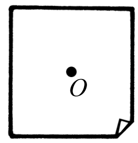


Figura 2.286

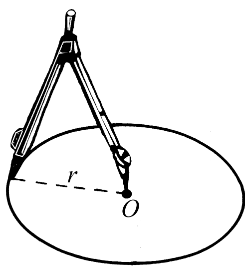


Figura 2.287

El punto de apoyo del compás en el papel se llama **centro** de la circunferencia.

En la figura de nuestro ejemplo el centro de la circunferencia es el punto *O.*

Recuerda que utilizando el asistente matemático *Geómetra* también puedes realizar construcciones geométricas, relacionadas con la circunferencia. Sigamos ahora trabajando en la circunferencia trazada (fig. 2.288):

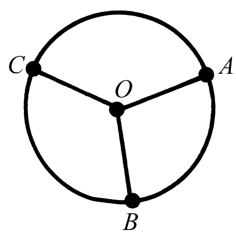


Figura 2.288

- Ubica en la circunferencia construida los puntos *A, B, C*.
- Mide la distancia de los puntos *A, B, C* al punto *O*.
- Compara las distancias del: Punto *A* al centro *O*, del punto *B* al centro *O* y del punto *C* al centro *O*.

Recuerda que:

Al punto fijo del plano se le llama **centro de la circunferencia** y a la distancia entre el centro y los puntos de la circunferencia se denomina **radio de la circunferencia.**

Toda circunferencia queda determinada de manera única si se indica su centro y su radio.

¿Qué significa la frase: queda determinada de manera única?

Ello significa que basta o que es suficiente tener como dato el centro y el radio para trazar una determinada circunferencia. No existen dos circunferencias diferentes con iguales datos, como sucede si se diera solamente el centro como dato, porque hay muchas circunferencias diferentes con el mismo centro.

Por ese motivo para denotar a la circunferencia se tienen en cuenta ambos elementos: el centro y el radio.

Recuerda que:

Una **circunferencia** de centro O y radio r, se denota como: $C(O; r)$.

Ejemplo 1:

En la figura 2.289, la circunferencia se denota por $C(O, \overline{OA})$, con O centro y $\overline{OA}$ su radio.

Si ubicas dos puntos C y D en una circunferencia $C(O,$ 3,0 cm) y trazas el segmento CD, ¿qué nombre recibe este segmento?

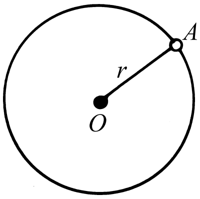


Figura 2.289

Recuerda que:

El segmento que une dos puntos de la circunferencia se llama **cuerda** y la mayor cuerda de una circunferencia que contiene o pasa por su centro se llama **diámetro.**

Ejemplo 2:

En la figura 2.290, el segmento CD es una cuerda que denotamos: cuerda $\overline{CD}$:

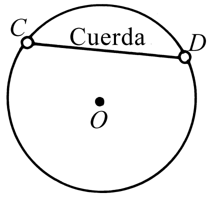


Figura 2.290

En la figura 2.291 se trazó el diámetro de la circunferencia dibujada. Compara las longitudes del radio y el diámetro.

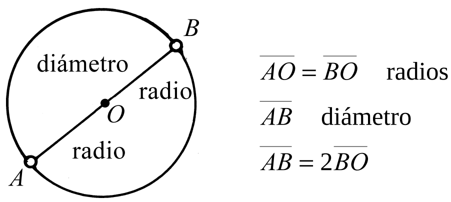


Figura 2.291

$(d > r)$

Dos radios forman un diámetro:

$d = 2\ r$

Recuerda que:

La longitud del **diámetro** es el **doble** del **radio.**

Ejemplo 3:

Construye una circunferencia de 4 cm de radio (fig. 2.292). Traza en ella las cuerdas CD y EF que no sean paralelas.
Traza la mediatriz de cada cuerda. ¿Por qué punto de la circunferencia pasan ambas mediatrices?

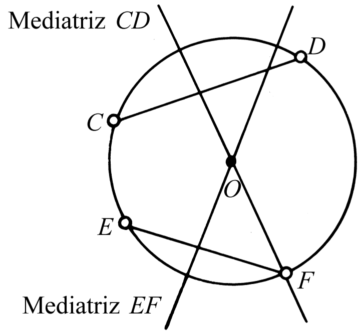


Figura 2.292

Recuerda que:

La mediatriz de toda cuerda pasa por el centro de la circunferencia.

Ahora puedes ratificar la propiedad de la mediatriz de un segmento de equidistar de sus extremos: como el centro de la circunferencia es un punto de ambas mediatrices trazadas –se trata de su punto de intersección– se halla a la misma distancia de los extremos de los dos segmentos (cuerdas). ¡Pero estas distancias también son iguales porque son radios de la circunferencia!

¿Qué observas en esta fotografía? (fig. 2.293)

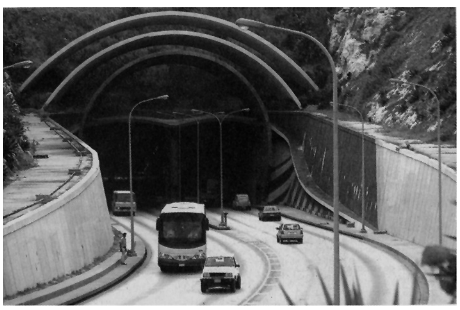


Figura 2.293

Pues nada menos que el túnel de La Habana. ¿Sabías qué es una de las maravillas de la ingeniería cubana? Tiene una longitud de 733 m. Cada senda tiene siete metros de ancho de los 22 m que tiene el ancho total.

¿Pero has apreciado la forma de las estructuras que adornan su entrada, ahora que estamos estudiando la circunferencia? Se trata de arcos de circunferencia.

Recuerda que:

Cada cuerda divide en dos partes a la circunferencia, llamadas **arcos de circunferencia.**

Ejemplo 4:

¿Cuáles son los arcos en que divide la cuerda *CD* a la circunferencia de la figura 2.294?

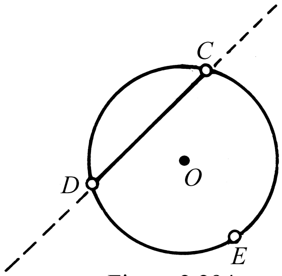


Figura 2.294

$\overset{\frown}{CED}$ es el arco mayor

$\overset{\frown}{CD}$ es el arco menor

Si consideras los dos semiplanos que determina la recta que contiene esta cuerda *CD*. Quedan determinados dos arcos. El arco que se encuentra en el mismo semiplano que el centro de la circunferencia, que es el mayor y el otro, el menor, que está en el semiplano opuesto.

Observa los arcos determinados por el diámetro de una circunferencia, compara dichos arcos en la figura 2.295.

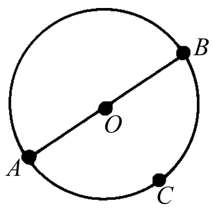


Figura 2.295

Los arcos se denotan con los puntos de sus extremos, pero para el mayor se considera, además, otro punto que esté contenido en él.

Recuerda que:

Los arcos determinados por el diámetro son iguales y cada uno de ellos se llama **semicircunferencia.**

Ejemplo 5:

Si sombreas el interior de una circunferencia, estás destacando otro conjunto de puntos del plano. ¿Qué nombre recibe este conjunto de puntos que determina toda circunferencia y del cual también forma parte?

Es el **círculo** (fig. 2.296) y no puedes confundirlo con la circunferencia. Observa que la circunferencia es una línea curva y el círculo es una superficie.

Círculo *(O, r)* Círcunferencia *C(O; r)*

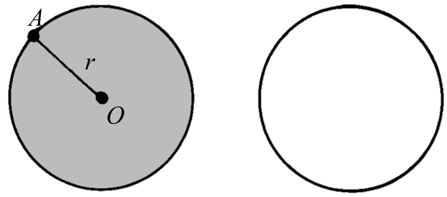


Figura 2.296

Recuerda que:

> Se llama **círculo** al conjunto formado por todos los puntos de una circunferencia y sus puntos interiores.

Ejercicios

1. En la figura 2.297, *P, Q, R, S, T* son puntos de la circunferencia de centro *O*. Marca con una X la proposición verdadera.

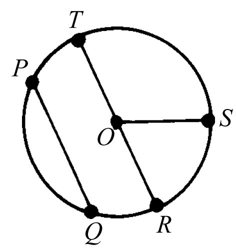


Figura 2.297

1.1 El segmento $\overline{PQ}$ representa:

a) __Una cuerda b) __Un diámetro c) __Un radio

1.2 La longitud de $\overline{TR}$ es igual a:

a) __$2\,\overline{PQ}$ b) __$\frac{1}{2}\,\overline{OS}$ c) __$2\,\overline{OR}$

1.3 La cuerda mayor de la circunferencia es:

a) __$\overline{PQ}$ b) __$\overline{TR}$ c) __$\overline{OS}$

1.4 El arco de semicircunferencia es:

a) __$\overset{\frown}{TS}$ b) __$\overset{\frown}{TR}$ c) __$\overset{\frown}{QR}$

2. Completa la siguiente tabla, apoyándote en la figura 2.298:

Elementos de la circunferencia	**Notación**
Radios	
	$\overline{AD}$, $\overline{DB}$, $\overline{EB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{AB}$
Diámetro	
Arcos	

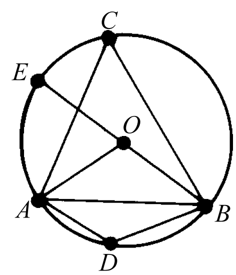


Figura 2.298

2.1 Compara, colocando convenientemente uno de los símbolos: <, >, = en los espacios en blanco:

a) $\overset{\frown}{EC}$ ___180° b) $\overset{\frown}{EAB}$ ___180° c) $\overset{\frown}{EBD}$___180°

3. Construye una circunferencia de centro O y radio 2,0 cm.

4. Construye una circunferencia de centro O y 1,5 cm de radio. Indica en la figura realizada (sin utilizar instrumentos) los puntos P, Q y R, tal que:

$\overline{OP} > 1{,}5$ cm, $\overline{OQ} < 1{,}5$ cm, $\overline{OR} = 1{,}5$ cm

5. Ubica un punto M del plano y construye la figura formada por todos los puntos del plano cuya distancia al punto M es de 4,0 cm.

6. Selecciona las proposiciones falsas y conviértelas en verdaderas.

   a) — El punto P pertenece a $C(P;$ 2 cm).
   b) — El punto P pertenece al círculo (P; 2 cm).
   c) — Los puntos que se encuentran a una distancia del punto P menor o igual que 2 cm pertenecen a $C(P;$ 2 cm).

7. Construye una circunferencia de 3 cm de radio.

   a) Indica un punto A que pertenezca a ella.
   b) Traza las cuerdas AB, AC y AD de longitud 4 cm; 5,5 cm y 5 cm respectivamente.

8. ¿Cuál es la mayor longitud que puede tener una cuerda de C (O; 7,0 cm)? Fundamenta.

9. Fundamenta la veracidad de la proposición siguiente:

   "Si dos circunferencias tienen sus radios iguales, entonces son iguales".

10.* En la figura 2.299, $\overline{NQ}$ diámetro,

$\overline{MN}$ cuerda.

Demuestra que: $\overline{NQ} > \overline{MN}$

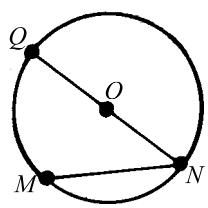


Figura 2.299

Relaciones de simetría en la circunferencia

R ¡! Ahora estás en condiciones de responder la pregunta sobre cómo determinar el centro del arreglo floral de la laguna del Parque Nacional Ciénaga de Zapata, donde se inicia este epígrafe.

Debes utilizar la relación estudiada entre las mediatrices de cuerdas no paralelas de una circunferencia. En el procedimiento a seguir, darás los siguientes pasos:

1. Trazar dos cuerdas no paralelas en la circunferencia.

2. Construir las mediatrices de las cuerdas.
3. Determinar el punto donde se cortan estas mediatrices.

Anteriormente estudiaste los movimientos del plano, observa la figura 2.300. ¿Crees que la circunferencia es simétrica?

En la figura 2.300, *P* es un punto cualquiera de la circunferencia y por la reflexión del eje *m,* su imagen se encuentra sobre la recta *PQ* perpendicular a *m.* Como *m* es mediatriz de *PP'* tenemos que *P* y *P'* equidistan de *O* por la propiedad de la mediatriz de un segmento, es decir, $PO = P'O = r$, por tanto $P' \in C(O, r)$.

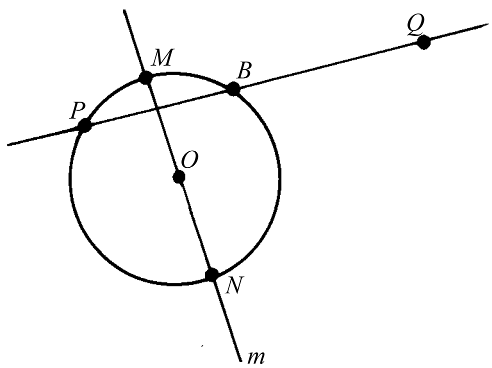


Figura 2.300

Recuerda que:

- Una circunferencia es simétrica respecto a cualquier recta que pase por su centro.
- La circunferencia es una figura centralmente simétrica, su centro de simetría es su propio centro.

Observa en este fragmento de una de las páginas del famoso libro de Euclides, del que ya conoces su nombre, como también aparecen los elementos de la circunferencia, figura 2.301.

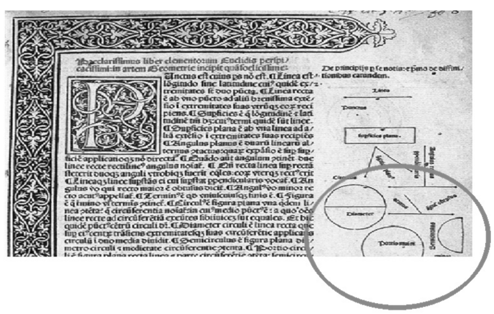


Figura 2.301

2.5.2 Posición relativa de una recta con respecto a una circunferencia

Para hacer pensar a sus estudiantes en las relaciones de posición entre una recta y una circunferencia, la profesora Yadira les propuso observar con cuidado las láminas siguientes (fig. 2.302):

Figura 2.302

Las opiniones de los estudiantes fueron muchas:

- La polea del pozo nos hace pensar en una recta que solo tiene un punto en común con una circunferencia.
- La recta *que contiene* a Maritza y a Laritza, corta a la circunferencia en dos puntos.
- La recta que contiene al borde de la barra de la bicicleta no tiene ningún punto común con la circunferencia contorno de la rueda, eso es más que evidente.

Precisamente hoy estudiaremos las posibles relativas entre la circunferencia y la recta.

Hagamos una abstracción de cada una de estas situaciones geométricas y pensemos solamente en la recta y en la circunferencia de cada caso, así las obtenemos en las láminas de una manera más simple, como puedes apreciar en la figura 2.303:

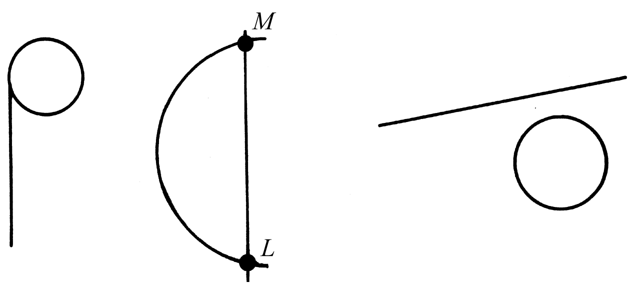


Figura 2.303

Ya sabes que todos los puntos de una circunferencia equidistan de su centro, o sea, están a una misma distancia del centro. Esta distancia la conoces como radio.

Observa los esquemas más simples, ¿puedes determinar cuáles son los puntos que están situados a una distancia mayor o menor del centro de la circunferencia?

Te propongo realizar el análisis de estas distancias, teniendo en cuenta la posición de un punto respecto a una circunferencia encontrando los puntos comunes entre ellas y si existen, cuántos son estos puntos.

Ejemplo 1:

En la figura 2.304 se muestra una circunferencia $C(O, r)$ y las rectas *t, s*, *m.*

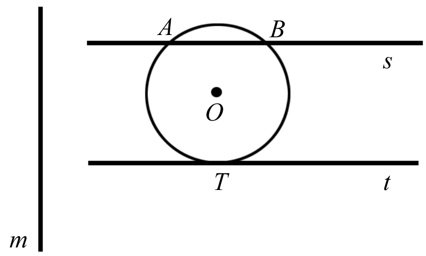


Figura 2.304

a) Determina la distancia de cada una de las rectas al centro de la circunferencia.
b) Determina en cuántos puntos cada una de las rectas cortan a la circunferencia.
c) Compara la distancia determinada con la longitud del radio de la circunferencia.

Solución:

– La recta *s* corta a la circunferencia en dos puntos (*A, B*) y la distancia de ella al centro de la circunferencia es menor que la longitud del radio.
– La recta *t* corta a la circunferencia en un punto (*T*) y la distancia de ella al centro de la circunferencia es igual que la longitud del radio.
– La recta *m* no corta a la circunferencia en ningún punto y la distancia de ella al centro de la circunferencia es mayor que la longitud del radio.
  ¿Qué nombre recibirán las rectas con relación a la circunferencia de acuerdo a su posición?

El estudio sobre las posiciones relativas entre una circunferencia y una recta, requiere de analizar si ellas tienen puntos comunes y de tenerlos, cuántos son.

Para ello, es necesario comparar la distancia del centro de la circunferencia a la recta considerada (d), con el radio de la circunferencia (r). Solo existen tres casos posibles: 1) $d > r$ 2) $d = r$ 3) $d < r$.

Si la recta y la circunferencia *no* tienen *puntos comunes,* se dice que la *recta* es *exterior* a la circunferencia y la *distancia* de la recta al centro de la circunferencia es *mayor* que la longitud del *radio* ($d > r$).

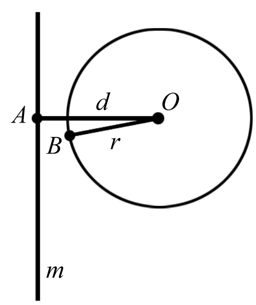


Figura 2.305

Ejemplo 2:

En la figura 2.305 la recta *m* es una recta exterior a la circunferencia, fíjate que: $\overline{AO} > \overline{BO}$.

Si la recta y la circunferencia tienen *dos puntos comunes,* se dice que la *recta* es *secante* a la circunferencia y la *distancia* de la recta al centro de la circunferencia es *menor* que la longitud del *radio* ($d < r$).

Ejemplo 3:

En la figura 2.306 la recta s es una recta secante a la circunferencia, fíjate que: $\overline{AO} < \overline{BO}$
Si la recta y la circunferencia tienen *un punto común,* se dice que la *recta* es *tangente* a la circunferencia. El punto común se denomina punto de tangencia y la *distancia* de la recta al centro de la circunferencia es *igual* que la longitud del *radio* ($d = r$).

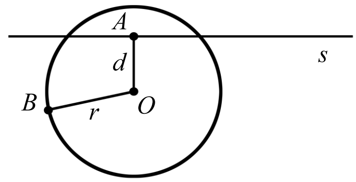


Figura 2.306

Ejemplo 4:

En la figura 2.307 la recta t es una recta tangente a la circunferencia, fíjate que: $\overline{AO} = \overline{BO}$; A es el punto de tangencia.

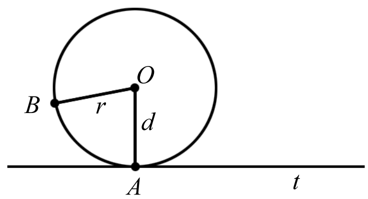


Figura 2.307

Podrás ahora encontrar la similitud de las láminas que mostró la maestra Yadira con la posición de una recta respecto a una circunferencia.

La lámina de la polea del pozo se asemeja a una recta tangente, la segunda, la de la estrella del parque de diversiones, ¿se te parece una recta secante y la de la bicicleta te sugiere que es una recta exterior?

Recuerda el teorema sobre la perpendicularidad de la tangente:

La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que tiene como extremo el punto de tangencia. Llamamos a este segmento radio de tangencia.

Recuerda el recíproco del teorema de la perpendicularidad de la tangente:

La recta perpendicular a un radio, en el extremo que pertenece a la circunferencia, es una recta tangente a dicha circunferencia en ese punto.

Ejemplo 5:

Demostremos que la recta tangente a la circunferencia, tiene solamente un punto común con ella.

Demostración:

Vamos a demostrar esta proposición por el absurdo, vamos a partir de suponer que no se cumple la tesis.

Sea entonces además de T, otro punto P que pertenece a la recta tangente t y a la circunferencia, situado a la derecha de T.

Trazamos los segmentos $\overline{OT}$ y $\overline{OP}$, se forma el triángulo OTP, que es rectángulo en T y en P al mismo tiempo, porque por la propiedad anterior: $\overline{OT}$ y $\overline{OP}$ son radios de tangencia. Pero no existe un triángulo con dos ángulos rectos, por lo cual lo supuesto es falso y se cumple la unicidad del punto de tangencia de la circunferencia y la recta.

Las rectas tangentes y secantes a una circunferencia también son consideradas elementos importantes de la circunferencia, figura 2.308.

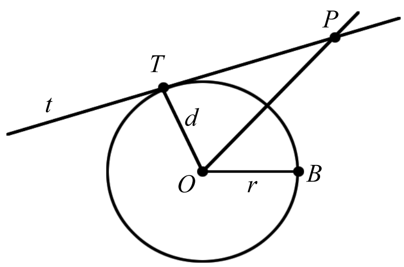


Figura 2.308

Ejemplo 6:

Construye una recta tangente a una circunferencia en un punto dado de ella, figura 3.309.

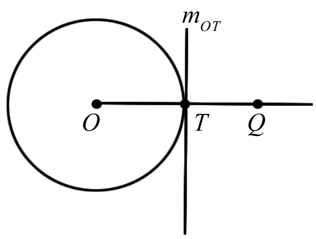


Figura 2.309

Solución:

Consideremos una circunferencia de centro *O* y un punto *T* en ella, por el cual vamos a trazar una tangente a la circunferencia.

Por el recíproco del teorema de la perpendicularidad de la tangente, sabemos que una recta perpendicular a un radio, con el extremo de este que pertenece a la circunferencia, es tangente a dicha circunferencia.

Por tanto, tenemos que trazar un radio en ese punto *T,* es decir, el radio $\overline{OT}$ y una recta perpendicular a $\overline{OT}$ en el punto *T.*

La construcción la puedes hacer utilizando el cartabón, o empleando el procedimiento para trazar la mediatriz de un segmento con regla y compás que trabajamos en epígrafes anteriores. Trazamos la semirrecta *OT* que contiene al radio $\overline{OT}$ y en ella un punto *Q* tal que $\overline{OT} = \overline{TQ}$ y construimos la mediatriz de la cual *T* es punto medio, te invitamos a hacerlo, con el *Geómetra* también.

Ejemplo 7:

En la figura 2.310, $\overline{PT}$ es tangente a la circunferencia:

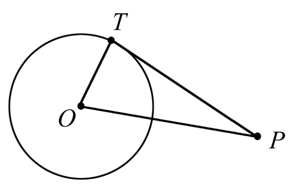


Figura 2.310

$C(O;$ 6,0 cm) en el punto *T* y $\overline{OP} = 15$ cm.

Calcula la longitud de $\overline{PT}$.

Solución:

Por el teorema tenemos que: $\angle OTP = 90°$, o sea, el triángulo *OTP* es rectángulo en *T* y, por tanto, aplicando el teorema de Pitágoras podemos plantear que:

$$\overline{OP}^2 = \overline{OT}^2 + \overline{PT}^2$$

Si despejamos $\overline{PT}$ y sustituimos los valores conocidos, obtenemos que:

$$\overline{PT} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OT}^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

R/ La longitud de $\overline{PT}$ es 12 cm.

En resumen, las posiciones de una recta y una circunferencia puedes estudiarlas en este esquema:

Posiciones relativas de una recta con respecto a una circunferencia

- Exteriores (Ningún punto común)
- Tangente (Un punto común)
- Secante (Dos puntos comunes)

Ejercicios

1. Construye la circunferencia que pasa por tres puntos dados.
2. Los puntos *A* y *D* pertenecen a la circunferencia *C*(*O, r*) de la figura 2.311 y son vértices de un rectángulo. Los otros dos vértices *B* y *C* son simétricos de *A* y *D* respectivamente respecto a un diámetro de la circunferencia. Construye el rectángulo.

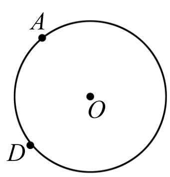


Figura 2.311

3. En la figura 2.312 se representan dos circunferencias que tienen el mismo centro *O*. Los puntos *M* y *N* son vértices de un cuadrilátero cuyos otros vértices son simétricos de *M* y *N* respecto a un diámetro de la circunferencia de mayor radio. Construye el cuadrilátero y clasifícalo.

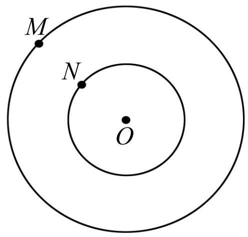


Figura 2.312

4. Dada una circunferencia de 3,0 cm de radio y tres rectas.

4.1 Completa los espacios en blanco teniendo en cuenta las relaciones estudiadas:
Si la distancia de una de las rectas a la circunferencia es:

a) mayor de 3,0 cm, entonces la recta es ______________ a la circunferencia.

b) de 3,0 cm, la recta es __________________ a la circunferencia.

c) de 2,5 cm, la recta es __________________ a la circunferencia.

4.2 Enlaza la columna *A* con la columna *B*.

A	*B*
Tipo de recta en relación a la circunferencia	Cantidad de puntos de intersección
tangente	dos
secante	ninguno
exterior	uno

5. Construye un ángulo agudo y una circunferencia que sea tangente a sus dos lados. ¿Cuántas circunferencias que cumplan esta condición se pueden construir?

2.5.3 Posición relativa entre dos circunferencias

Enrique se ha percatado que en la bicicleta tenemos dos circunferencias como ruedas, que mantienen una distancia entre ellas y que en la máquina de coser de su abuela, también aparecen dos circunferencias unidas por una polea y se ha puesto a pensar en objetos de la vida que representen dos circunferencias y de cuántas maneras se pudieran colocar estas: una delante de la otra, una al lado de la otra, una dentro de la otra… en fin, queremos que tú también medites en ello (fig. 2.313).

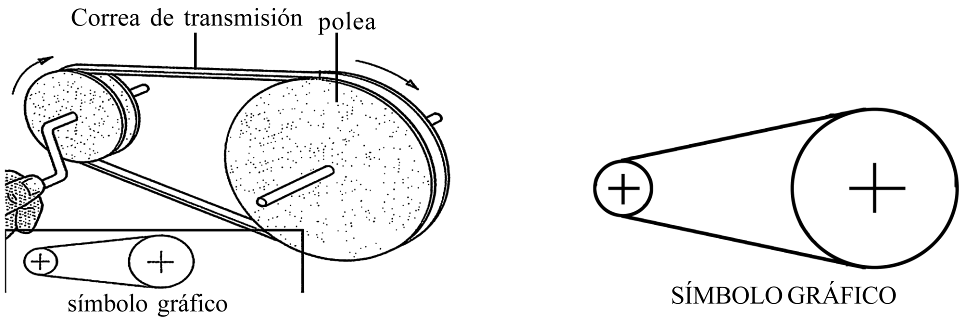


Figura 2.313

Observa las situaciones que te presentamos a continuación e imagina en ellas a dos circunferencias del plano y a las diferentes posiciones en estas circunferencias se encuentran. ¿Cuántos puntos comunes tienen estas circunferencias? ¿Bajo qué condiciones los tienen?

Hagamos en nuestro análisis una diferenciación de casos. Vamos a diferenciar primero dos casos generales: **cuando tienen puntos comunes y cuando no los tienen** y a su vez, dentro de estos, otros dos, cuando son circunferencias exteriores e interiores.

Caso 1. Circunferencias que no tienen puntos comunes

Caso 1A: Exteriores (sin puntos comunes)

El dispositivo de la figura 2.314 nos hace pensar en circunferencias exteriores que no tienen puntos comunes.

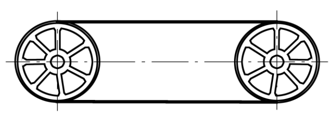


Figura 2.314

Traza dos circunferencias exteriores de radios diferentes: $C_1(A, r_1)$ y $C_2(B, r_2)$ que no tengan puntos comunes, como en la figura 2.315.

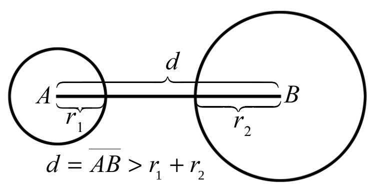


Figura 2.315

Mide la distancia $d = \overline{AB}$, entre los centros de ambas circunferencias y compárala con la suma de las longitudes de sus respectivos radios r_1 y r_2. ¿A qué conclusión llegaste? *Se cumple que:* $d = \overline{AB} > r_1 + r_2$.

Verifica esta relación en la figura 2.315.

Recuerda que:

Si dos circunferencias exteriores $C_1(A, r_1)$ y $C_2(B, r_2)$ cumplen que $d = \overline{AB} > r_1 + r_2$ entonces no tienen puntos comunes y las llamaremos exteriores sin puntos comunes.

Caso 1B: Interiores (sin puntos comunes)

En la figura 2.316 se aprecian diferentes circunferencias interiores del mismo centro, que no tienen puntos comunes entre sí. ¿Será este el único caso? ¿Y si no tienen el mismo centro?

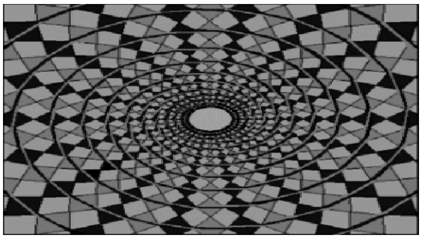


Figura 2.316

Traza dos circunferencias interiores de radios diferentes: $C_1(A, r_1)$ y $C_2(B, r_2)$ que no tengan puntos comunes. Compara la longitud de $\overline{AB}$, (distancia entre los centros de ambas circunferencias) con la diferencia de las longitudes de sus respectivos radios. ¿A qué conclusión llegaste? En un caso $d = 0$ (concéntricas), pero en ambas *se cumple que:* $d = \overline{AB} < r_1 - r_2$. Verifica esta relación en la figura 2.317.

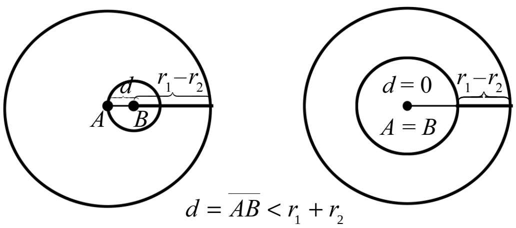


Figura 2.317

Recuerda que:

Si dos circunferencias interiores $C_1(A, r_1)$ y $C_2(B, r_2)$ cumplen que $d = \overline{AB} < r_1 - r_2$, entonces no tienen puntos comunes y las llamaremos interiores sin puntos comunes.

Caso 2. Circunferencias que tienen puntos comunes
Caso 2A: Interiores (con un punto común) o tangentes interiores

Este par de aretes se asemejan a dos circunferencias interiores que tienen un punto común (fig. 2.318).

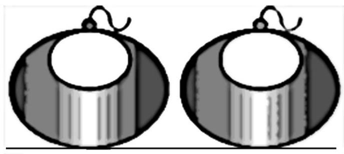


Figura 2.318

Traza ahora dos circunferencias interiores: $C_1(A, r_1)$ y $C_2(B, r_2)$, con radios diferentes que tengan un punto común. Sea T el punto de intersección de estas circunferencias al que llamaremos punto de tangencia.

¿Qué relación hay entre la distancia $d = \overline{AB}$ y la diferencia de las longitudes de los radios r_1 y r_2 de las circunferencias consideradas? ¿A qué conclusión llegaste? *Se cumple que:* $d = \overline{AB} = r_1 - r_2$. Verifica esta relación en la figura 2.319.

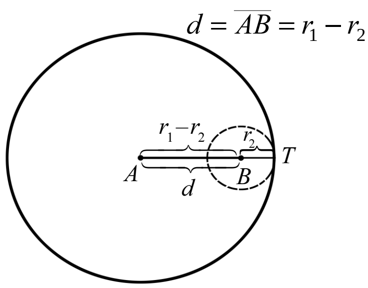


Figura 2.319

Recuerda que:

> Si dos circunferencias interiores $C_1(A, r_1)$ y $C_2(B, r_2)$ cumplen que $d = \overline{AB} = r_1 - r_2$, entonces tienen un punto común y las llamaremos tangentes interiores.

Caso 2B: Exteriores con un punto común

En la figura 2.320 se muestran cuatro lápices atados con una cinta adhesiva y un diagrama de la vista frontal de esta situación en el que puedes observar cuatro circunferencias. ¿Tienen puntos comunes las circunferencias de este diagrama? ¿Son circunferencias interiores o exteriores?

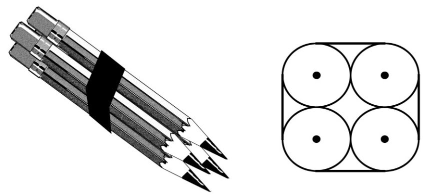


Figura 2.320

Traza dos circunferencias exteriores de radios diferentes, $C_1(A, r_1)$ y $C_2(B, r_2)$, que tengan un punto común.

De igual forma que en los casos anteriores, compara $d = \overline{AB}$ con la suma de las longitudes r_1 y r_2 de los radios de estas circunferencias. ¿A qué conclusión llegaste? *Se cumple que:* $d = \overline{AB} = r_1 + r_2$. Verifica esta relación en la figura 2.321.

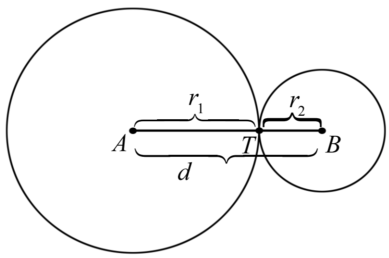


Figura 2.321

Recuerda que:

> Si dos circunferencias exteriores $C_1(A, r_1)$ y $C_2(B, r_2)$ cumplen que $d = \overline{AB} = r_1 + r_2$, entonces tienen un punto común y las llamaremos exteriores con un punto común o tangentes exteriores.

Caso 2C: Secantes

En el logotipo de los juegos olímpicos, cada circunferencia representa a uno de los cinco continentes en que está dividida la esfera terrestre. En él se concreta el último de los casos de circunferencias con puntos comunes, en particular dos y a las que vamos a llamar secantes (fig. 2.322).

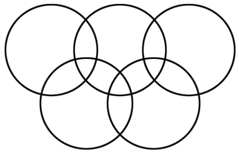


Figura 2.322

Traza dos circunferencias $C_1(A, r_1)$ y $C_2(B, r_2)$, con radios diferentes o radios iguales que tengan dos puntos comunes.

Analiza las distancias entre los radios y los centros, como en los casos anteriores. ¿A qué conclusión llegaste?

Observa el triángulo de vértices: *A, B* y P_1. Nota que las longitudes de sus lados son r_1, r_2 y $\overline{AB}$. ¿Qué propiedad geométrica hemos estudiado sobre la suma de los lados de un triángulo?

¿Por qué $d = \overline{AB} = r_1 + r_2$? Verifica esta relación en la figura 2.323.

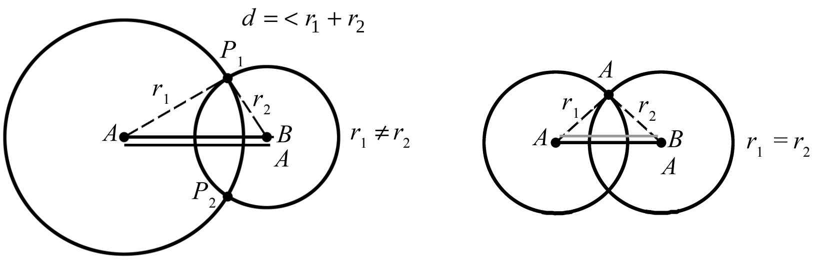


Figura 2.323

Recuerda que:

> Si dos circunferencias $C_1(A, r_1)$ y $C_2(B, r_2)$ cumplen que $d = \overline{AB} = r_1 + r_2$, entonces tienen dos puntos comunes y las llamaremos secantes.

Ejemplo 1:

Raúl observa la figura 2.324 y le dice a Elena: *Estas circunferencias son concéntricas de diferentes radios, por tanto, no tienen puntos comunes.* Pero Elena le refuta: *Te equivocas, tienen en común el centro de la circunferencia.* ¿Quién hizo la afirmación correcta? ¿Por qué?

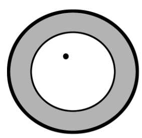


Figura 2.324

R/ Raúl hizo la afirmación correcta. El centro no es un punto común de estas circunferencias. Fíjate que el centro no es un punto de la circunferencia, sino uno de sus elementos y muy importante por cierto, porque es uno de los que la determina. Pero no cumple la condición de estar a la misma distancia del centro (aquí la distancia es cero, se trata de él mismo) que el resto de los puntos, requisito que exige la definición de circunferencia para sus puntos.

Ejercicios

1. En la figura 2.325: A, C, D y $E \in (O; \overline{OB})$; O punto de $\overline{EB}$.

   a) ¿Qué segmentos son: radios, diámetros y cuerdas?
   b) Nombra los arcos que determinan los puntos A, B, C, D y E.
   c) Di cuáles de los arcos que aparecen, miden menos de 180°, miden 180° y cuáles más de 180°.

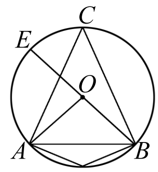


Figura 2.325

2. Construye una circunferencia de centro O y radio 2,0 cm.

   a) Traza en ella un radio, un diámetro y una cuerda, y denótalos.
   b) Ubica un punto que se encuentre a 0,28 dm del centro O. ¿Estará situado dentro de la circunferencia? Fundamenta.
   c) Ubica un punto que se encuentre a 15 mm del centro O. ¿Cómo se le llama a este punto según su posición respecto a la circunferencia? Fundamenta.
   d) Ubica un punto que se encuentre a 30 mm del centro O. ¿Cómo se le llama a este punto según su posición respecto a la circunferencia? Fundamenta.

3. Di si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones y fundaméntalas todas.

   a) Si dos circunferencias tienen el mismo centro, entonces son iguales.
   b) Si la distancia entre los centros de dos circunferencias es menor que la suma de sus radios, entonces ellas tienen puntos interiores comunes.
   c) Si dos cuerdas de una circunferencia pasan por su centro, entonces ellas son iguales.
   d) Los extremos de una cuerda cualquiera de una circunferencia son centralmente simétricos con respecto al centro de esta circunferencia.
   e) El centro de una circunferencia no siempre equidista de los extremos de sus cuerdas.

4. Dadas dos circunferencias tangentes exteriores de radios 3,0 cm y 5,0 cm respectivamente, ¿cuál es la distancia entre sus centros?

5. Dibuja dos circunferencias secantes de radios 2,0 cm y 5,0 cm respectivamente. ¿Puede ser 7,0 cm la distancia entre los centros de las circunferencias?

6. Si la longitud de los radios es 1,0 cm y 4,0 cm respectivamente. Las circunferencias son:

   a) — Concéntricas b) — Tangentes exteriores c) — Secantes.

2.6 Cálculo de longitudes, áreas y volúmenes

¡! El médico de la familia le recetó Paracetamol al hermanito de Ricardo para la fiebre, que su mamá debía suministrarle en dosis de 30 mL diarios. Cuando Ricardo fue a comprar el medicamento a la farmacia, leyó en la caja que el frasco tenía 120 mL y que cada cucharadita de 5 mL contiene 120 mg de paracetamol (fig. 2.326), 0,1 mg de tartrazina y 2 000 mg de sacarosa y se preguntó: ¿Qué significan mL y mg? ¿Por qué no se utiliza solamente una de ellas para las diferentes cantidades de medicamento que se mencionan?

Si has tenido las mismas dudas que Ricardo, podrás satisfacer tu curiosidad con el estudio de los contenidos de este epígrafe.

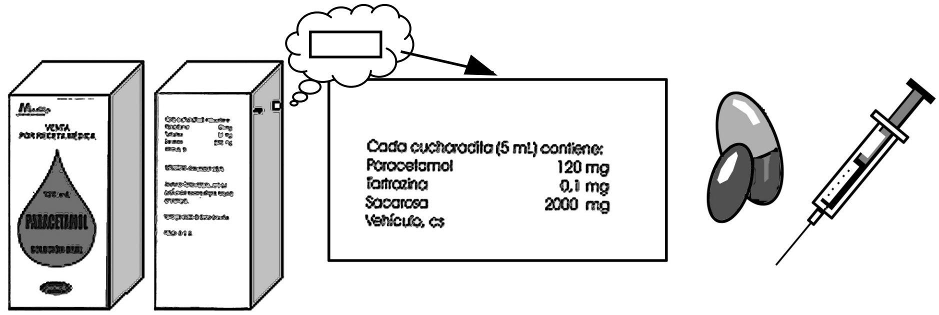


Figura 2.326

Desde la antigüedad el hombre necesitó medir para realizar diferentes actividades: construir, comerciar, sembrar, etc., para lo cual empleó o tomó como referencia algunas partes de su cuerpo, por ejemplo: las manos, los dedos, los codos, los pies y los brazos (fig. 2.327).

En un papiro egipcio fue hallado un texto que aproximadamente se traduce así:

> *"...una pirámide tiene de lado 140 codos, una inclinación de 5 palmos y un dedo, por cada codo..."*

Más tarde el hombre creó instrumentos de medición, que fue perfeccionando con el tiempo, cada vez más.

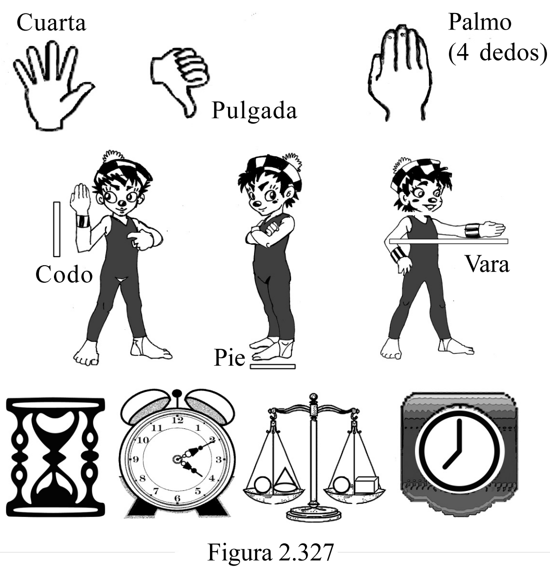


Figura 2.327

2.6.1 Unidades de magnitud en que se expresan longitudes, áreas y masas

De grados anteriores conoces las unidades de magnitud que se emplean con mayor frecuencia en la vida práctica. Ahora vamos a precisar qué unidades de medida se emplean para cada tipo de magnitud y con ello comprenderás cuándo se utilizan ml y cuándo mg. La selección de la unidad de medida depende del tipo de magnitud que se desea medir y de la cantidad de magnitud, pues cada magnitud tiene una unidad principal, a partir de la cual usamos múltiplos para medir grandes cantidades y submúltiplos para las pequeñas.

Unidades de longitud

Se utilizan para medir distancia entre dos puntos. Las más utilizadas son: el *kilómetro,* para medir grandes distancias; el *centímetro,* para medir pequeñas distancias y el *metro* (m), es la unidad principal y se utiliza para medir distancias ni tan grandes ni tan pequeñas.

Toda unidad de longitud equivale a 10 veces la unidad inmediata inferior y es la décima parte de la inmediata superior. Ello significa que los múltiplos aumentan de 10 en 10 y los submúltiplos disminuyen de 10 en 10 (fig. 2.328).

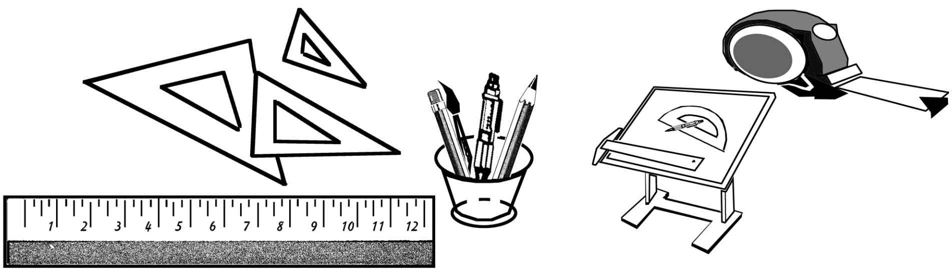


Figura 2.328

Por eso, para convertir una unidad en uno de sus submúltiplos (→) se multiplica por 10, 100, 1 000… según sean uno, dos, tres… los lugares de la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de longitud. Para convertir una unidad en uno de sus múltiplos (←), divides por 10, 100, 1 000… según sean uno, dos, tres… los lugares de la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de longitud.

Recuerda la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de longitud:

(←) **Múltiplos-Submúltiplos** (→)						
kilómetro (km)	hectómetro (hm)	decámetro (dam)	metro (m)	decímetro (dm)	centímetro (cm)	milímetro (mm)

Ejemplo 1:

Selecciona la respuesta correcta.
Un ciclista debe recorrer 185,00 km. Después de recorrer 76,200 m, ¿cuántos kilómetros le faltan por recorrer?

a) 108,8 km b) 177,38 km c) 184,92 km

Solución:

Primero debemos expresar todas las dos distancias dadas en la misma unidad de longitud: en este caso en kilómetros o en metros. Es más conveniente, expresar ambas en kilómetros, porque debemos comparar los cálculos que hagamos con las opciones de respuestas dadas en kilómetros en los incisos a), b) y c).

Pero no vamos a hacerlo así, con el fin de ilustrar ambos procedimientos: convertir km a m y m a km. Luego: 185 km a m, se trata de una **conversión a submúltiplos,** con tres lugares en la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de longitud, que se contienen de 10 en 10, por tanto, **multiplicamos** por 1 000: 185 · 1 000 = 185 000 m. Para saber cuánto falta por recorrer, calculamos: 185 000 – 76,200 = 184 923,800 m. Vamos a convertir el resultado obtenido en kilómetros, para comparar con las opciones de respuesta, dadas así.

Esta es una **conversión a múltiplos**, con tres lugares en la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de longitud, **luego dividimos** por 1 000:

184 923,800 : 1 000 = 184,92 km.

R/ Le faltan por recorrer 184,92 km y seleccionamos la tercera opción.

Unidades de área

Se utilizan para medir superficies. La unidad principal es el metro cuadrado (m^2), cuyos múltiplos y submúltiplos, varían de 100 en 100.

Para convertir una unidad en un submúltiplo o en un múltiplo, se multiplica o divide, respectivamente, por 100, 10 000, 1 000 000…, según la cantidad de lugares de la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de área (fig. 2.329).

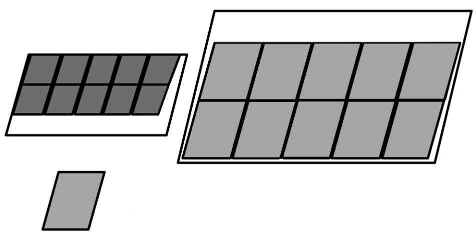


Figura 2.329

Recuerda la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de área

(←) **Múltiplos-Submúltiplos** (→)						
kilómetro cuadrado (km^2)	hectómetro cuadrado (hm^2)	decámetro cuadrado (dam^2)	metro cuadrado (m^2)	decímetro cuadrado (dm^2)	centímetro cuadrado (cm^2)	milímetro cuadrado (mm^2)

Ejemplo 2:

El terreno de una cooperativa agropecuaria tiene 86 hm^2. ¿Cuál es su extensión en m^2?

Solución:

86 hm^2 a m^2, *es una conversión a submúltiplos,* con dos lugares en la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de área, que se contienen de 100 en 100. Luego *multiplicamos* por 10 000: $86 \cdot 10\,000 = 860\,000$ m^2.

R/ La extensión del terreno en metros es 860 000 m^2.

Unidades de volumen

Se utilizan para medir el espacio que ocupa un cuerpo. La principal unidad es el metro cúbico (m^3). Sus múltiplos y submúltiplos varían de 1 000 en 1 000. Para convertir una unidad en un submúltiplo o en un múltiplo, se multiplica o divide, respectivamente, por: 1 000, 1 000 000, 1 000 000 000…, según la cantidad de lugares de la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de volumen (fig. 2.330).

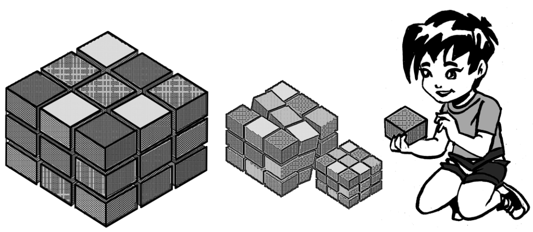


Figura 2.330

Recuerda la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de volumen:

(←) **Múltiplos-Submúltiplos** (→)						
kilómetro cúbico (km^3)	hectómetro cúbico (hm^3)	decámetro cúbico (dam^3)	metro cúbico (m^3)	decímetro cúbico (dm^3)	centímetro cúbico (cm^3)	milímetro cúbico (mm^3)

Ejemplo 3:

¿Cuántos metros cúbicos tiene un depósito con 6 026 dm^3 de volumen?

Solución:

6 026 dm^3 a m^3, *es una conversión a múltiplos,* con un lugar en la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de volumen, que se contienen de 1 000 en 1 000, *luego dividimos* por 1 000 : 6 026 : 1 000 = 6,026 m^3.

R/ El depósito tiene 6,026 m^3 de volumen.

Unidades de masa

Se utilizan para medir la cantidad de masa sólida. La más utilizada es el kilogramo (kg), pero la principal es el gramo (g), a partir de la cual sus múltiplos y submúltiplos varían de 10 en 10. Por ello puedes hacer las conversiones entre unidades, al igual que con las unidades de longitud, que varían de igual forma que las unidades de la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de masa (fig. 2.331).

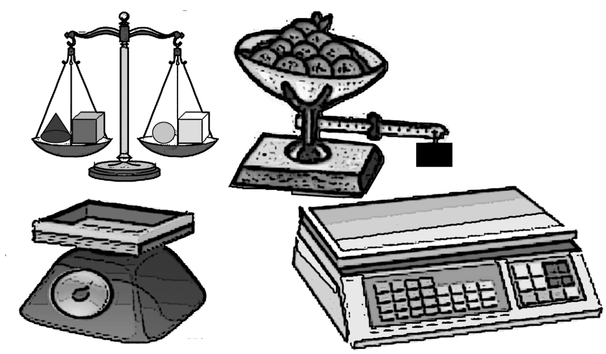


Figura 2.331

Recuerda la escala múltiplo - submúltiplo de unidades de masa

(←) **Múltiplos-Submúltiplos** (→)						
kilogramo (kg)	hectogramo (hg)	decagramo (dag)	gramo (g)	decigramo (dg)	centigramo (cg)	miligramo (mg)

Ejemplo 4:

La vitamina C es una de las vitaminas más importantes para el fortalecimiento de nuestro sistema inmunológico.

Si en 100 g de guayaba hay 800 mg de vitamina C. ¿Cuántos gramos de vitamina C consumes cada vez que comes 300 g de guayaba?

Solución:

Si en 100 g de guayaba hay 800 mg de vitamina C, en 300 g hay:

$800 \cdot 3 = 2\ 400$ mg de vitamina C.

Ahora debemos expresar estos miligramos en gramos, se trata de una *conversión a múltiplos,* con tres lugares en la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de masa, que se contienen de 10 en 10, *luego dividimos* por 1 000 a 2 400 mg: 2 400 mg : 1 000 = 2,4 g

R/ En 300 g de guayaba hay 2,4 mg de vitamina C.

Unidades de capacidad

Se utilizan para medir la cantidad de masa líquida. Su principal unidad es el litro (L) a partir de la cual se consideran los múltiplos, que aumentan de 10 en 10 y los submúltiplos, que disminuyen de 10 en 10, al igual que con las unidades de longitud y de masa. Están relacionadas con las unidades de volumen porque un litro tiene la capacidad de un decímetro cúbico: 1 L = 1 dm^3 (fig. 2.332).

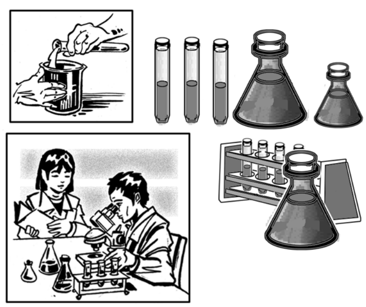


Figura 2.332

Recuerda la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de capacidad:

(←) **Múltiplos-Submúltiplos** (→)						
kilolitro (kL)	hectolitro (hL)	decalitro (daL)	Litro (L)	decilitro (dL)	centilitro (cL)	mililitro (mL)

R ¡! Ahora puedes explicarle a Ricardo que:

Se utilizó mL para cada cucharadita de paracetamol, porque es un medicamento líquido y se utilizó mg para indicar la cantidad de sacarosa o paracetamol, porque son componentes sólidos de este medicamento (fig. 2.333).

Figura 2.333

Ejemplo 5:

Si el frasco de paracetamol que compró Ricardo tiene 120 mL y cada cucharadita contiene 5 mL (fig. 2.333).

a) ¿Qué parte de un litro contiene el frasco?
b) ¿Cuántas cucharaditas contiene el frasco?

Solución:

a) 120 mL a L, es una conversión a múltiplo, con tres lugares en la escala múltiplo-submúltiplo de unidades de capacidad. Como se contienen de 10 en 10, dividimos por 1 000, luego:

$$120 : 1\,000 = 0{,}12 = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}\text{ L}$$

b) 120 mL : 5 mL = 24

R/ a) El frasco de paracetamol contiene 120 mL, lo cual representa $\frac{3}{25}$ de un litro.

b) El frasco contiene 24 cucharaditas.

Para unificar las unidades de medida utilizadas por los diferentes pueblos y culturas se creó el Sistema Internacional de Unidades (SIU) en la XI Conferencia de Pesas y Medidas, celebrada en París en 1960, basado en seis unidades fundamentales: metro, kilogramo, segundo, ampere, kelvin, calorías. En 1971 se añadió el mol, que mide la cantidad de materia.

En Cuba se estableció en 1982 con carácter obligatorio su uso, no obstante todavía son utilizadas con frecuencia en muchos lugares otras unidades de medida.

A continuación te ofrecemos diferentes tipos de unidades que todavía se utilizan en Cuba y su equivalencia aproximada con el Sistema Internacional de Unidades.

No.	Unidad	Representación	Equivalencia con el SIU
1	Quintal métrico	q	1 q = 100 kg
2	Tonelada métrica	t	1 t = 10 q = 1 000 kg
3	Onza	oz	1 lb = 16 oz = 460 g
4	Libra	lb	
5	Arroba	@	1 @ = 25 lb
6	Pulgada	in	1 in = 2,5 cm
7	Vara española *	vara	1 vara = 3 pie = 0,835 m
8	Caballería	cab	1 cab = 134 202 m^2
9	Cordel	cordel	1 cordel = 20 m^2; 1 rosa = 18 cordeles
10	Milla	mi	1 mi = 1,6 km

* (Existe también la vara portuguesa que equivale a 1,10 m y la yarda igual a 0,914 m)

Estimación de longitudes

No siempre tenemos a la mano una cinta métrica o una regla graduada para realizar en la vida práctica, mediciones de distancias más o menos largas. En esos casos es conveniente hacer una estimación de la medición deseada, que debemos hacer con la mayor exactitud posible. Pero, ¿cómo realizar la medición de una longitud mediante la estimación?

Podemos estimar las distancias que recorremos, utilizando *el paso* (fig. 2.334). Para estimar mediante el paso es necesario saber cuál es la longitud de nuestro paso y contar los pasos que damos.

Por supuesto, los pasos no siempre se dan de la misma longitud, pero por lo general, son siempre iguales y calculando su longitud promedio (paso medio) tendremos un medio eficaz para estimar distancias con bastante precisión, que fácilmente puedes utilizar.

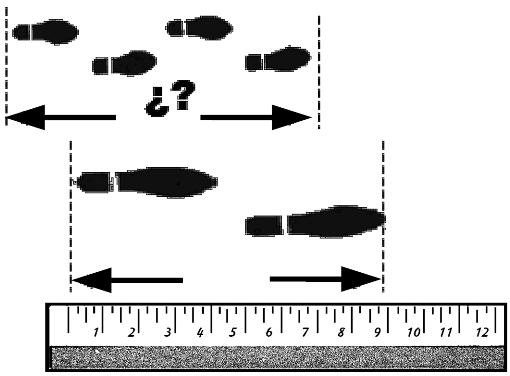


Figura 2.334

Recuerda el procedimiento para estimar longitudes que recorres mediante el paso:

1. **Calcular el paso medio:** mide una distancia de 20 m, recórrela caminando normalmente y cuenta el número de pasos que das en ella, la longitud del paso medio estará dada por el resultado de dividir 20 entre el número de pasos que diste al recorrer esa distancia.
   Puede ocurrir que tu paso no esté contenido un número exacto de veces en la longitud que se quiere medir. Si el tramo restante es menor que la mitad de la longitud de un paso, despreciamos esa distancia y si es mayor que la mitad de la longitud de un paso, lo contamos como un paso más.
2. **Contar los pasos que das al recorrer la distancia que quieres estimar:** para no equivocarte al contar los pasos en distancias largas, cuéntalos siempre hasta 10 (o hasta 20) y cada vez que des 10 pasos anota un pequeño trazo vertical “/” en una tabla que confeccionarás en una hoja de papel, de forma que hagas la tabulación

(continuación)

de todos los trazos que escribas. Así podrás obtener el número de pasos, multiplicando por 10 la cantidad de trazos que anotaste en la tabla.

Tarjado o tabulación	///// //

3. **Realizar la estimación de la distancia que quieres determinar a partir del paso medio:** Ahora ya puedes hacer la estimación, contando el número de pasos que des al recorrerla y multiplicando este número por la longitud del paso medio que siempre debes memorizar.

Recuerda el procedimiento para estimar pequeñas longitudes:

1. **Tomar de referencia una unidad de medida,** que puede ser una parte de tu cuerpo, como por ejemplo: un brazo, un dedo o de la falange de un dedo y hasta tu altura, entre otras.
2. **Determinar la longitud de la unidad de medida considerada**. Debes medir previamente la parte de tu cuerpo tomada como unidad de medida u otra que hayas elegido.
3. **Estimar la longitud que deseas conocer,** observándola atentamente para determinar cuántas veces está contenida en ella la unidad de medida seleccionada.

Ejemplo 1:

Un joven que da pasos de medio metro contó 2 758 pasos de su casa a la escuela. ¿Cuántos kilómetros recorre durante esa trayectoria? Da la respuesta con dos cifras significativas.

Solución:

$2\ 758 \cdot 0{,}5 = 1\ 379{,}0$ m
1 379 m a km: $1\ 379 : 1\ 000 = 1{,}379$ km

R/ La distancia que recorre el joven durante esa trayectoria es aproximadamente 1,4 km.

Ejercicios

1. Selecciona cuáles de los objetos de la Columna II, pueden ser utilizados como unidad, para hacer una estimación adecuada de la longitud de los objetos de la Columna I:

Columna I	
1	Libreta
2	TV del aula
3	Puerta del aula
4	Pizarra
5	Cuaderno de Matemática

Columna II	
A	El casquillo de un bolígrafo
B	La cubierta de un CD
C	Una libreta
D	Un lápiz
E	Tu estatura
F	Una caja de fósforos pequeña

2. Haz una estimación de la longitud de los objetos de la Columna I del ejercicio anterior, considerando la unidad de medida que consideraste.

3. Calcula la longitud de tu paso medio. Completa la tabla 2.3, con la estimación que realices de las distancias que aparecen en la segunda columna, a partir de tu paso medio. Compara los resultados que obtuviste con tus compañeros de séptimo grado.

Tabla 2.3

Longitud de tu paso medio:			
No.	**Distancias a estimar**	**Cantidad de pasos dados**	**Estimación**
1	Distancia de la escuela a tu casa		
2	Distancia de la biblioteca a tu aula		
3	Distancia de tu casa a la parada de ómnibus más cercana		

4. Para medir la distancia entre las estrellas se toma como unidad la distancia que recorre la luz en un año, que se denomina año-luz. Si en un segundo la luz recorre 300 000 km, en un año recorrerá $300\ 000 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ que representan aproximadamente unos nueve billones de kilómetros. Fundamenta la presencia de cada factor en esta multiplicación.

5. a) En la tabla 2.4 aparece un estimado del consumo mundial y de las reservas de combustibles fósiles (carbón, petróleo y gas natural) existentes en la actualidad. Calcula a partir de ellos, cuántos años pudieran durar tales reservas, suponiendo que se mantenga en el futuro el ritmo del consumo indicado en la tabla.

a) Valora la gravedad de la situación, a partir de tus cálculos y argumenta cómo piensas que esta situación podría atenuarse.[87]

Tabla 2.4

Combustible	**Carbón**	**Petróleo**	**Gas natural**
Reserva	$977\,576\,000 \cdot 10^3$	$1\,056\,805\,000 \cdot 10^3$	$146\,439\,000\,000 \cdot 10^3$
Consumo anual	$4\,672\,658 \cdot 10^3$	$24\,345\,016 \cdot 10^3$	$2\,268\,329\,000 \cdot 10^3$
Estimación de años de consumo			

6. Las hojas de un libro miden 15 cm de largo, expresa esa medida utilizando la estimación, tomando como patrón una presilla para papel.

7. Realiza por simple inspección la estimación en centímetros de las longitudes de los objetos siguientes:
   - Largo de la hoja del periódico *Granma*
   - Una tiza
   - Una bolsa de yogurt
   - El cuaderno de Matemática

8. Imagina que una estación espacial (EE) está a un año-luz de la Tierra. Haz un esquema y señala en él un punto que corresponda a una nave espacial que viaje hacia una EE y esté a 0,72 año-luz de la Tierra.

9. Toma como unidad de medida la falange de tu dedo meñique y haz una estimación de la longitud de los siguientes objetos (fig. 2.335), que medirás después, para valorar la eficacia de la estimación que realizaste. Confecciona una tabla para procesar los resultados: ¿Qué tan buena fue la estimación que realizaste?

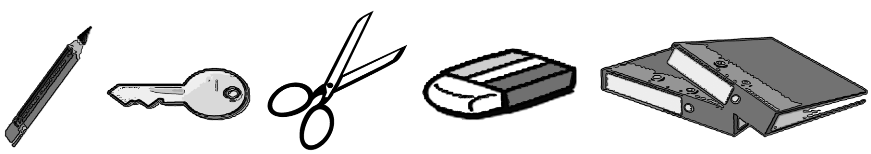


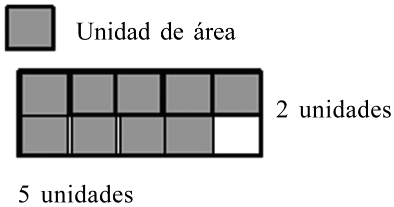
Figura 2.335

[87] MINBAS: *Ahorro de energía: la esperanza del futuro*, Editora Política, La Habana, 2001.

2.6.2 Cálculo del área, el perímetro de figuras planas y el volumen de cuerpos

En el epígrafe anterior aprendiste a realizar estimaciones para el cálculo de longitudes, a partir de una unidad de longitud determinada. ¿Qué sucede si trasladamos este procedimiento al cálculo del área?

Considerando un cuadradito de cierta área, como unidad de medida, en la figura 2.336, puedes calcular el área. En el caso de las figuras de forma irregular, como los mapas, cuentas la cantidad de cuadraditos que la cubre.



$A = 5 \cdot 2 = 10$

$A = 10$ cuadraditos

$A = 10\ u^2$

Figura 2.336

Llamamos **área por exceso**, si contamos también los cuadraditos que tienen solamente una parte de la cuadrícula. Llamamos **área por defecto**, cuando no consideramos los cuadraditos que incluyen solamente una parte de la figura.

¿Cuál es el área por defecto de las ilustraciones que aparecen en la figura 2.337 en la unidad de área considerada? Reflexiona con tus compañeros de aula acerca de la unidad de área más conveniente para calcular estas áreas.

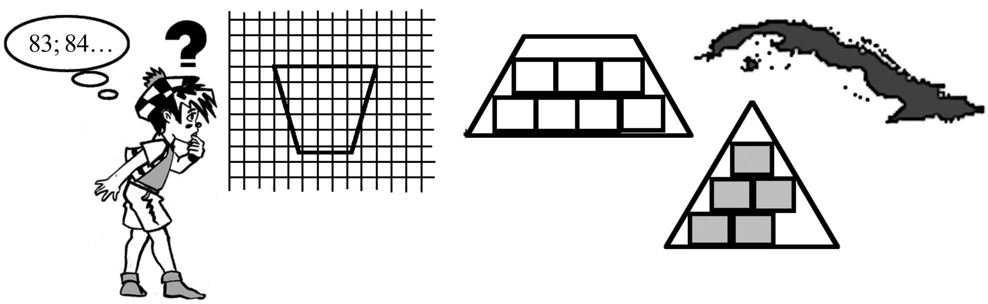


Figura 2.337

Como puedes apreciar también en la figura 2.337, este procedimiento no siempre es tan exacto ni tan cómodo. Por ello recurrimos a las fórmulas para calcular el área y el perímetro de las figuras planas, que han sido obtenidas por matemáticos de generalizaciones de este procedimiento, considerando cada vez una unidad de área más pequeña. Ya conoces de grados anteriores algunas fórmulas para calcular el área, pero hay otras que aún no conoces. A continuación se resumen todas en una tabla.

Con respecto al cálculo del perímetro de una figura plana, aunque en la tabla aparecen fórmulas, un recurso muy utilizado es aplicar la etimología de esta palabra ya que: *peri:* quiere decir alrededor y *metro:* proviene de la voz griega *metrón*, que quiere decir medida, ello se traduce como *la medida del borde* lo que matemáticamente significa la suma de la longitud de los lados de la figura. Por lo cual, si te sabes las propiedades de las figuras planas estudiadas, no tienes que memorizar fórmulas para calcular el perímetro, porque puedes aplicar esta idea.

Recuerda las siguientes fórmulas:

Polígono	**Elementos considerados**	**Perímetro**	**Elementos considerados**	**Área**
Triángulo	Longitud *a, b, c* de sus lados	$P = a + b + c$	*b:* longitud de un lado *h:* altura de ese lado	$A = \frac{b \cdot h}{2}$
Paralelogramo	Longitud *a, b* de dos lados consecutivos	$P = 2\ (a + b)$	*b:* longitud de un lado *h:* altura de ese lado	$A = b \cdot \mathrm{h}$
Rectángulo	Longitud *a, b* de dos lados consecutivos	$P = 2\ (\mathrm{a} + b)$	Longitud *a*, *b* de dos lados consecutivos	$A = a \cdot b$
Rombo	Longitud *a* del lado	$P = 4\ a$	Longitud d_1 y d_2 de sus dos diagonales	$\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$
Cuadrado	Longitud *a* del lado	$P = 4\ a$	Longitud *a* del lado	a^2
Trapecio	Longitudes *a, b, c, d* de sus lados	$P = a + b + c + d$	*b:* longitud de la base menor *B:* longitud de la base mayor *h:* altura (distancia entre las bases)	$\frac{(B + b) \cdot h}{2}$

Ten siempre presente que para calcular tanto el área como el perímetro de una figura geométrica, todos los datos deben tener la misma unidad de medida.

Ejemplo 1:

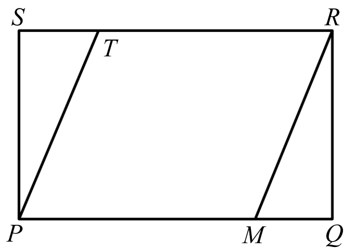


Figura 2.338

En la figura 2.338: *PQRS* rectángulo

$\overline{RQ} = 3{,}2$ dm

$\overline{MQ} = \overline{ST} = 15$ cm

$\overline{PM} = 61$ cm

Calcula el área del paralelogramo *PMRT*

Solución:

Primero expresaremos todos los datos en la misma unidad de longitud, luego:

$\overline{RQ} = 32$ cm

1.ª vía de solución:

$$A_R = A_{PMRT} = \overline{PM} \cdot \overline{RQ} = 61{,}32 = 1\,952 \text{ cm}^2$$

2.ª vía de solución:

$$A_R = A_{PQRS} - (A_{MQR} + A_{PST})$$
$$= \overline{PQ} \cdot \overline{RQ} - \left[\left(\overline{MO} \cdot \overline{RQ}\right) : 2 + \left(\overline{ST} \cdot \overline{PS}\right) : 2\right]$$
$$= (61 + 15) \cdot 32 - [(15 \cdot 32) : 2 + (15 \cdot 32) : 2]$$
$$= 1\,952 \text{ cm}^2 \approx 19 \text{ dm}^2$$

Cálculo de volúmenes de cubos y ortoedros

Un cubo es un cuerpo geométrico que tiene iguales sus tres dimensiones: largo, ancho y altura. Decimos también en este caso, que la longitud de sus *aristas* (distancia entre cualesquiera dos de sus vértices) es siempre la misma (fig. 2.339).

Unidad de volumen

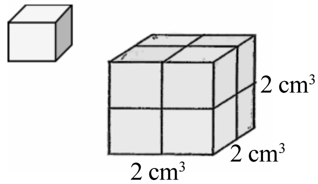


Figura 2.239

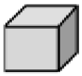
Si un cubo tiene 1 cm de arista, decimos que tiene un volumen de 1 cm^3 y tomando a este como unidad de volumen, *podemos estimar el volumen de otros cubos*. Así, el volumen del cubo que queremos calcular es igual a la cantidad de cubos de 1 cm^3 que se necesitan para llenarlo.

Pero nota que se obtiene igual resultado, si multiplicas la longitud de las aristas del largo, el ancho y la altura, que por supuesto tienen la misma longitud.

$V = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8\ cm^3$
$V = 8\ cm^3$

Recuerda la fórmula del volumen del cubo:

El volumen se calcula como:
$V = a \cdot a \cdot a = a^3$



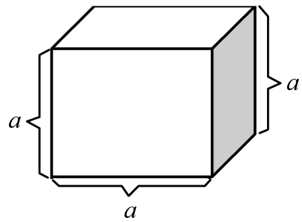


Figura 2.340

Puedes también calcular el volumen de un ortoedro, si tomas como unidad de volumen a un determinado cubo. Pero de igual forma que pasaba con el cuadrado al calcular el área de figuras planas, este procedimiento no es tan cómodo ni tan preciso (fig. 2.341).

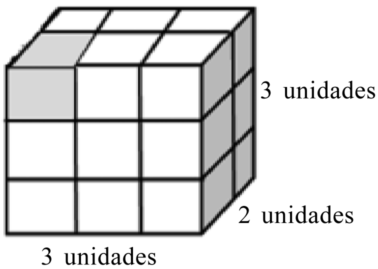


Figura 2.341

Para ello cuentas la cantidad de cubos que llenan el cuerpo, considerando el *volumen por exceso*, si cuentas los cubos que tienen solamente una parte del cuerpo y *volumen por defecto* cuando no los cuentas.

¿Cuál es el volumen de la caja de la figura 2.340?

El cuerpo se llena con 18 cubos de la unidad de volumen tomada, pero se obtiene igual resultado, si multiplicas la longitud de las aristas del largo, el ancho y la altura, tomando como unidad de longitud en ellas, a la arista del cubo-unidad.

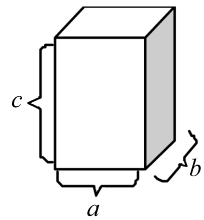
$V = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$
$V = 18$ cuadraditos
$V = 18\ u^3$

De la generalización de este procedimiento se obtiene la fórmula para calcular el volumen de un ortoedro.

Recuerda la fórmula del volumen del ortoedro:

El volumen de un ortoedro se calcula multiplicando entre sí sus dimensiones: largo, ancho y altura, es decir, si un ortoedro tiene dimensiones de longitud: *a, b* y *c,* su volumen se calcula por la fórmula:

$V = a \cdot b \cdot c$



$V = a \cdot b \cdot c$

Figura 2.342

Ejemplo 2:

Las cajas que transporta esta camioneta son todas iguales y tienen forma de cubo, cuya arista es de longitud 1,0 m.
¿Cuál es el volumen de cajas que puede transportar la camioneta de la figura 2.343?

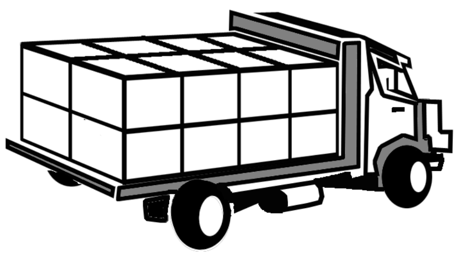


Figura 2.343

Solución:

Para calcular el volumen podemos contar el número de cajas que contiene la camioneta, por la facilidad que para ello ofrecen los datos o a partir de la fórmula del volumen del ortoedro, que es una vía siempre segura:

$V = a \cdot b \cdot c = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24\ m^3$.

R/ El volumen de cajas que puede transportar la camioneta de la figura 2.343 es 24 m^3.

Ejemplo 3:

Los estudiantes de 7.º grado montaron una pecera en el laboratorio de ciencias (fig. 2.344), cuyas dimensiones son: 1 m de largo, por 20 cm de ancho, por 50 cm de altura. ¿Cuántos cubos de agua de 10 L, como los de la figura 2.345, se necesitan para llenar la pecera con el nivel del agua a una altura de 30 cm?

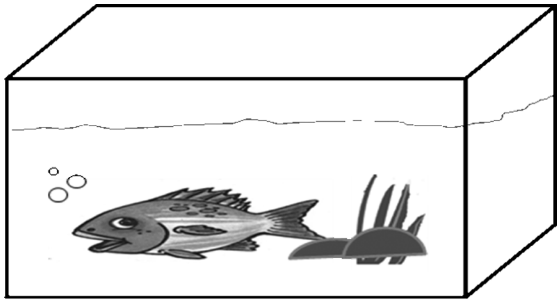


Figura 2.344

Solución:

Primero debemos expresar todos los datos en la misma unidad de longitud, en este caso seleccionamos el centímetro, porque la mayor parte de ellos está expresada en centímetros, luego debemos convertir 1 m en centímetros: 1 m = 100 cm.

¿Cuántos cubos de agua…? (fig. 2.345)

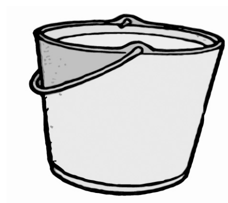


Figura 2.345

Otro aspecto importante es desechar los datos innecesarios. En este sentido debemos diferenciar: *volumen de la pecera* y *volumen del agua que contiene* y en este problema se debe calcular el volumen del agua que contiene, por lo cual *es innecesario el dato de la altura de la pecera* igual a 50 cm.

Como la pecera tiene forma de ortoedro, el volumen de agua adquiere también esta forma, por las propiedades físicas de las sustancias líquidas. Por tanto, el volumen de agua se calcula a partir de la fórmula: $V = a \cdot b \cdot c$, luego:

$V = 30 \cdot 20 \cdot 100 = 60\,000$ cm^3, pero para determinar la cantidad de cubos de 10 L que se necesitan, se requiere expresar en litros el volumen de agua calculada y para ello, debemos convertir el volumen ya calculado en cm^3, ahora en dm^3 porque sabemos que: 1 L = 1 dm^3.

Para convertir 60 000 cm^3 en dm^3 dividimos: 60 000 : 1 000 = 60 dm^3. Ahora solamente queda dividir por 10 esta cantidad, para saber cuántos cubos de 10 L se necesitan para llenar la pecera:

60 : 10 = 6, luego se necesitan 6 cubos.

R/ La cantidad de cubos de 10 L que se necesitan, para llenar la pecera hasta una altura de 30 cm, es 6 cubos de agua.

Otra forma de medir volúmenes[88]

Aquí hay dos cubos que pesan lo mismo, 1 kg, pero sus tamaños son diferentes, uno es de oro y el otro de plata (fig. 2.346).

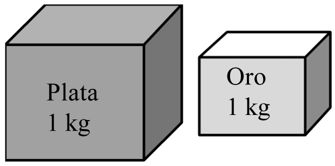


Figura 2.346

Si se sumerge un cuerpo cualquiera en un recipiente lleno de agua, se derramará parte de esta, en dependencia de su volumen.

Así, la cantidad de agua derramada por el cubo de oro es distinta de la derramada por el cubo de plata, ya que ambos cubos, aunque tienen la misma cantidad de masa, tienen volúmenes diferentes (fig. 2.347).

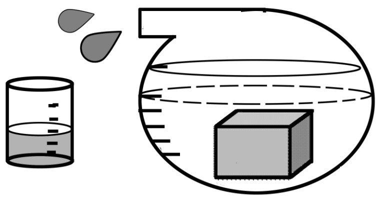


Figura 2.347

El cubo de oro desplaza 64 cm^3 de agua y el cubo de plata hará que salgan 100 cm^3. La cantidad de agua derramada coincide con el volumen del cubo.

Esta ingeniosa forma de calcular volúmenes fue utilizada por primera vez hace más de 2 000 años por el sabio griego Arquímedes de Siracusa en un episodio muy famoso:

> En el siglo III a.C. Hierón rey de Siracusa, entregó a un orfebre 1 kg de oro para que le hiciera una corona. Pasado un tiempo el rey recibió una maravillosa corona que pesaba exactamente un 1 kg. Pero no fiándose que estuviera hecha solo de oro le preguntó a su amigo Arquímedes, cómo descubrir el posible fraude sin fundir la corona y así no estropear tan bello trabajo.

[88] Argelia González Portales: Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas, UCPEJV, La Habana, 2011, Anexo 9, p. 95.

Arquímedes estaba dándole vueltas al problema, cuando entró en el baño público y observó que a medida que su cuerpo se sumergía en la bañera se derramaba más cantidad de agua.

Pensó entonces que el volumen de agua derramada depende del cuerpo introducido en el agua. Entusiasmado, salió del baño y, desnudo, corrió a su casa gritando ¡EUREKA, EUREKA!, que quiere decir: ¡lo encontré, lo encontré!

Llegado a su casa, hizo las mediciones oportunas y pudo razonar de la siguiente forma (fig. 2.348):

"Si la corona estuviera hecha con 1 kg de oro, su volumen sería 64 cm^3 y si fuera de 1 kg de plata, su volumen sería 100 cm^3. Como la corona tiene un volumen intermedio, esto quiere decir que está hecha de oro y de plata".

Arquímedes descubrió de esa forma que el orfebre cometió un fraude.

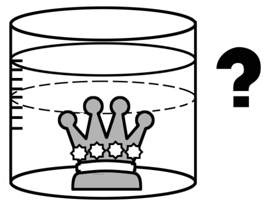


Figura 2.348

Ejercicios

1. Selecciona la unidad adecuada para medir:[89]

1.1 La cantidad de agua que hay en una cisterna.

a) __cm^3 b) __ m^3 c) __ L d) __ ninguna de estas.

1.2 La capacidad de un recipiente plástico que se usa para embazar pintura.

a) __ L b) __ cm^3 c) __ m^3 d) __ ninguna de estas.

1.3 La cantidad de medicamento que contiene una ampolleta para inyecciones.

a) __ mL b) __ cm^3 c) __ m^3 d) __ ninguna de estas.

2. En la figura 2.349, *ABCD* cuadrado, *E* es el punto medio de $\overline{DC}$, $\overline{AB}$ = 6,0 cm.

a) Halla el perímetro del cuadrado.
b) Determina el área del trapecio *ABCE*.

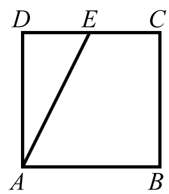


Figura 2.349

3. En la figura 2.350 *ABCF* cuadrilátero y *ABE* triángulo isósceles de base $\overline{AB}$, $\overline{FC} \parallel \overline{AB}$;

$\overline{AC}$ bisectriz del $\angle A$; $\overline{AB} \perp \overline{BC}$; $\angle ACF = 37^o$.

[89] Argelia González Portales: Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas, UCPEJV, La Habana, 2011, ejemplo 2, p. 51.

a) Calcula la amplitud de los ángulos interiores del triángulo *ABE.*

b) Clasifica el cuadrilátero *ABCF* y calcula su área sabiendo que $\overline{AB} = 10\ \text{cm}$; $\overline{BC} = 7{,}5\ \text{cm}$; $\overline{FC} = 78\ \text{mm}$

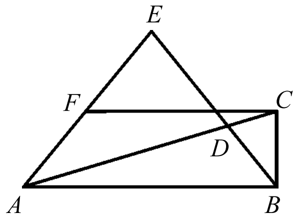


Figura 2.350

4. En el trapecio *MNLP* que se muestra en la figura 2.351, $\overline{NL} \perp \overline{MN}$ y $\overline{NL} \perp \overline{PL}$. ¿Cuál es el área del trapecio *MNLP*? Señala la respuesta correcta.

   a) 26 m^2
   b) 27 m^2
   c) 33 m^2
   d) 84 m^2

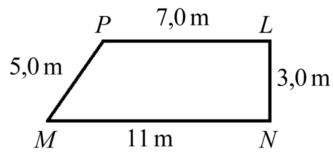


Figura 2.351

5. ¿Cuál es el área en centímetros cuadrados de la figura 2.352? Los ángulos que se señalan son rectos. Argumenta los resultados según el tipo de figura.

   a) 66 cm^2
   b) 69 cm^2
   c) 81 cm^2
   d) 96 cm^2

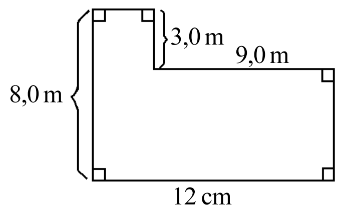


Figura 2.352

6. Encierra en un círculo cuál de las medidas dadas corresponde al volumen de agua de una piscina olímpica.[90]

1	2	3	4	5
$0{,}37 \cdot 10^3\ m^3$	$37 \cdot 10^3\ m^3$	$3{,}7 \cdot 10^3\ m^3$	$3{,}7 \cdot 10^3\ km^3$	$0{,}37 \cdot 10^3\ km^3$

7. La figura 2.353 muestra un triángulo *ABE* dentro de un cuadrado *ABCD,* de modo que:

   $E \in \overline{CD}$. Según las longitudes dadas, ¿Cuánto mide el área del triángulo?

   a) 36 cm^2
   b) 18 cm^2
   c) No se puede calcular por falta de datos.

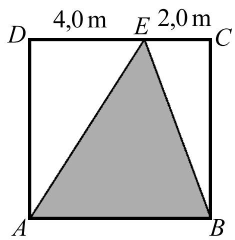


Figura 2.353

[90] Argelia González Portales: Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas, UCPEJV, La Habana, 2011, Ejemplo 1, Taller 5, p. 40.

8. En la figura 2.354 se tiene un cuadrado *ABCD,* con $\overline{AB} = 4{,}0$ cm. Si *E, F, G* y *H* son los puntos medios de sus lados. El área sombreada es:

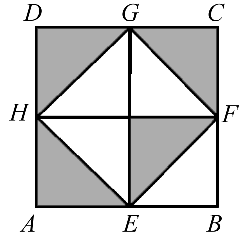


Figura 2.354

a) 2 % del área del cuadrado *ABCD.*
b) 12,5 % del área del cuadrado *ABCD.*
c) 25 % del área del cuadrado *ABCD.*
d) 50 % del área del cuadrado *ABCD.*

9. En el cuadrado *ABCD* de la figura 2.355, *E, F, G* y *H* son puntos medios de sus lados.

Si $\overline{AB} = 4{,}0$ cm, entonces el área sombreada es:

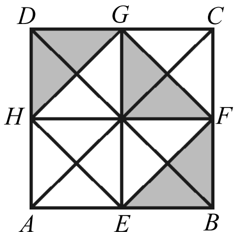


Figura 2.355

a) 10 cm^2
b) 6,0 cm^2
c) $\frac{3}{8}$ cm^2
d) 6,0 dm^2

10. La figura 2.356 muestra el rectángulo sombreado *MBED* contenido en el paralelogramo *ABCD,* de modo que: $E \in \overline{CD}$ y $M \in \overline{AB}$.
¿Cuál es el área del rectángulo sombreado?

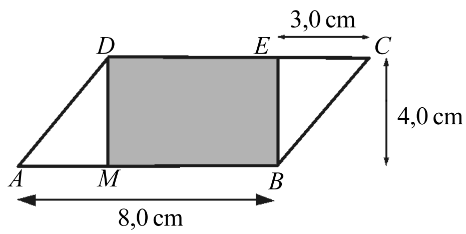


Figura 2.356

11. En la figura 2.356 se muestran dos rectángulos iguales *ABCD* y *EFGH, M* y *N* son los puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Si se sabe que el área sombreada es igual a 42 cm^2. Selecciona la afirmación correcta:

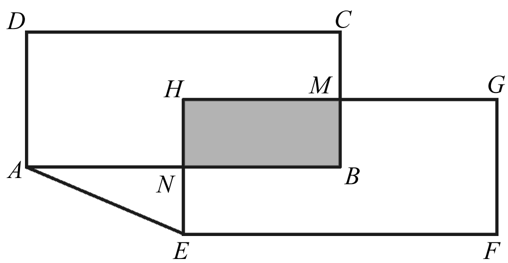


Figura 2.357

a) El área del exágono *AEHMCD* es igual a 126 cm^2.
b) El área del exágono *AEHMCD* es igual a 147 cm^2.

c) El área del exágono *AEHMCD* es igual a 168 cm^2.
d) No se puede calcular el área del exágono *AEHMCD* por falta de datos.

12. a) Si en una sala rectangular de 6,5 m de largo y 40 dm de ancho se coloca una alfombra cuadrada de 2,0 m de lado, la superficie al descubierto es:

6,5 m^2 256 m^2 22 m^2 No se puede calcular

b) Si el local de esta sala tiene 3,0 m de altura, calcula su volumen.

13.* Alberto trajo una lata de pintura de vinil para pintar las paredes de su aula, que tiene las dimensiones que se indican en la figura 2.358.[91] En la etiqueta de la lata dice: Contiene: 4 L Rendimiento: ≈ 10 m^2/L. Agregar 20 % de agua.

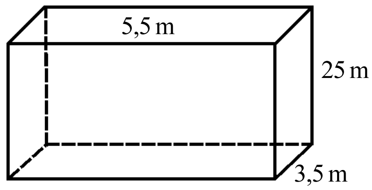


Figura 2.358

a) Calcula el volumen del aula.
b) Si el aula tiene una ventana que abarca una superficie de 4,6 m^2, ¿alcanzará esa lata de pintura para dar una mano a las paredes del aula?

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO

1. Encuentra todos los triángulos y cuadriláteros que aparecen en la figura 2.359.

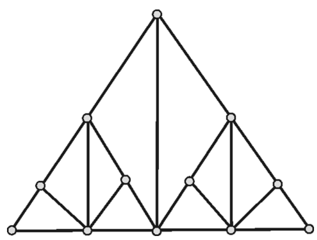


Figura 2.359

2. La figura 2.360 muestra el rectángulo *ABCD* donde $\overline{AM}$ y $\overline{BM}$ son las bisectrices de los ángulos $\angle DAB$ y $\angle CBA$ respectivamente.

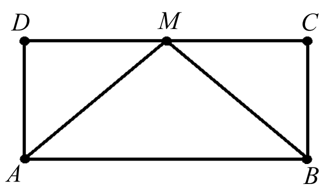


Figura 2.360

[91] Argelia González Portales: Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas, UCPEJV, La Habana, 2011, Ejercicio 1, Hoja de trabajo 6, p. 67.

a) ¿Qué información aporta el dato de que $\overline{AM}$ y $\overline{BM}$ son las bisectrices de los ángulos $\angle DAB$ y $\angle CBA$?
b) Nombra los pares de ángulos que tengan igual amplitud.
c) Prolonga el segmento $\overline{AM}$ y localiza otros pares de ángulos iguales.
d) Para los segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{BM}$ identifica los pares de ángulos cuyas amplitudes suman 180°.
d) Identifica los triángulos que se forman en la figura y determina cuáles de ellos son isósceles. Justifica tu respuesta.

3. En la figura 2.361, $\overline{BF} \parallel \overline{CE}$, $\angle ABG = 114°$, *CH* es la bisectriz del $\angle ECD$. *A, B, C* y *D* puntos alineados. Halla la amplitud de los ángulos $\angle ABF$ y $\angle HCD$.

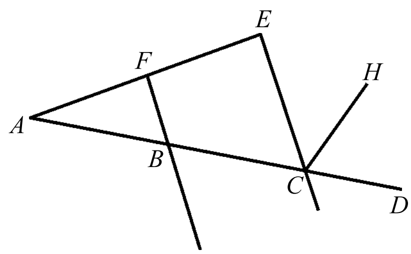


Figura 2.361

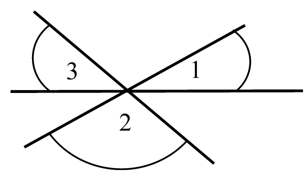


Figura 2.362

4. Explica por qué los ángulos 1, 2 y 3 representados en la figura 2.362, suman 180°.

5.* Fundamenta las siguientes afirmaciones:

a) Todo triángulo isósceles con un ángulo de 60° es equilátero.
b) La mediana de la hipotenusa en un triángulo rectángulo es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.
c) La suma de las longitudes de las alturas en un triángulo es menor que la suma de sus lados.

6. Di si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones. Fundamenta las proposiciones que sean falsas:

a) En todo triángulo isósceles los ángulos bases son desiguales.
b) Todo triángulo equilátero es obtusángulo.
c) La mediana de un triángulo es el segmento trazado desde un vértice al punto medio del lado opuesto a ese vértice.
d) En todo triángulo isósceles las alturas, medianas y mediatrices relativas a sus lados coinciden.
e) La cuerda mayor de una circunferencia es su diámetro.

f) El área de un cuadrado se puede determinar como: la cuarta parte de su perímetro elevado al cuadrado $\left(A=\left(\frac{1}{4}P\right)^2\right)$

g) La longitud del diámetro de una circunferencia es la mitad de la de su radio.

h) Si la distancia del centro de una circunferencia a una recta es igual a la longitud de su radio, la recta es tangente a la circunferencia.

i) Todo cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos es un paralelogramo.

j) Todo rombo es un cuadrado.

k) En todo triángulo rectángulo la hipotenusa es mayor que la suma de los catetos.

l) Desde un punto exterior a la circunferencia se pueden trazar infinitas tangentes a la circunferencia.

m) Las circunferencias secantes se cortan en dos puntos.

7. En la figura 2.363:

   - *ABCD* rectángulo
   - ΔGBH isósceles de base *HG*
   - $EF \parallel HG$, $\angle DEF = 20°$

   Halla la amplitud del *GBH.*

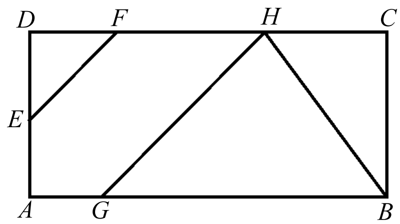


Figura 2.363

8. En la figura 2.364, *MPRS* es un cuadrado, *N* punto medio de $\overline{MP}$ y *Q* punto medio de $\overline{PR}$. Selecciona la respuesta correcta.
   El área de *NPQS* es igual a:

   a) ___ La tercera parte del área del cuadrado *MPRS.*

   b) ___ El 60 % del área del cuadrado *MPRS.*

   c) ___ La suma de las áreas de los triángulos *MNS* y *QRS.*

   d) ___ No se puede determinar por falta de datos.

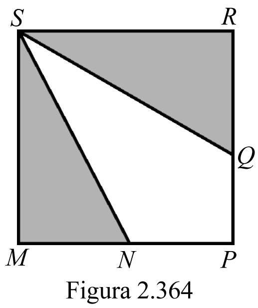
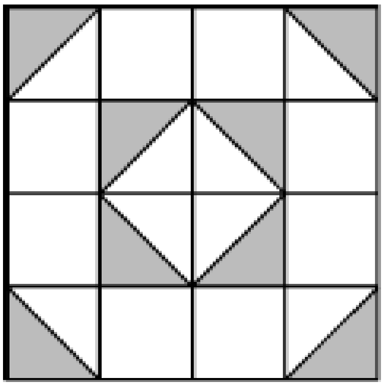


Figura 2.364

9. Elio tiene que construir una pieza rectangular de cartón de 48 cm de largo y 37 cm de ancho.

Determina el perímetro en metros de la pieza que construirá Elio.
Elio debe cortar en cuadraditos de 5 cm de lado la pieza, ¿cuántos cuadraditos podrá cortar?

10. Para un trabajo de Artes Plásticas, Isabel y Rolando deben dibujar en una cartulina un cuadrado y dividirlo en 16 cuadraditos iguales y colorear con pintura algunos de manera que se asemeje a un mosaico para el piso. Analizando las figuras obtenidas (fig. 2.365), ¿cuál de los dos empleó más pintura para realizar su trabajo?


Isabel

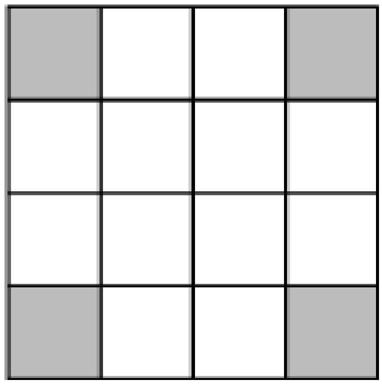

Rolando

Figura 2.365

11. En un campo se han cosechado 192 q de papa. El campo es triangular, tiene un lado de 160,0 m de longitud y su vértice opuesto está a 120,0 m de distancia de ese lado:

    a) Realiza el esbozo del campo de papas.
    b) Calcula el área de este campo.

12. Rota un ángulo de 38° con centro en su vértice y con un ángulo de rotación de 180°. ¿Qué compruebas?

13. Traza un rectángulo *ABCD* de 4,2 cm de largo y 2,3 cm de ancho:

    a) Refleja es te rectángulo en la recta *BC*.
    b) Traslada 5,0 cm el rectángulo con sentido de dirección $\overrightarrow{DA}$.
    c) Rota el rectángulo *ABCD* alrededor del punto *B* con un ángulo de 120°.
    d) Compara las longitudes de los segmentos y las amplitudes de los ángulos de la figura original con las de la figura final.

14. Dibuja un triángulo equilátero cualquiera *ABC*. Traza la perpendicular desde el vértice *C* hasta el lado *c*.

    a) ¿Qué nombre recibe la recta notable que has trazado?

b) Marca un punto *D* cualquiera en esta recta notable, únelo con *A* y *C.* Expresa todo lo que sepas sobre el triángulo *ABD.* Fundamenta tus afirmaciones.

15. Dado un triángulo isósceles cualquiera, construye las rectas notables relativas a su lado base. Analiza la posición de estas rectas y elabora tus propias conclusiones.

a) ¿Qué sucedería con las rectas notables en un triángulo equilátero? Fundamenta tu respuesta.

16. En la figura 2.366, $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ y $\overline{OA} > \overline{OB}$. Prueba que $\angle BOM < \angle MOA$.

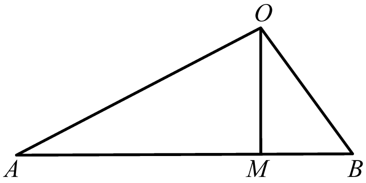


Figura 2.366

17. El triángulo *SRT* de la figura 2.367 es equilátero y $\overline{TU}$ es su eje de simetría, *S* y *R* son puntos simétricos.

a) Calcula $\overline{TU}$ si se conoce que $\overline{SR}$ = 30 cm.
b) Determina la amplitud de $\angle STU$.

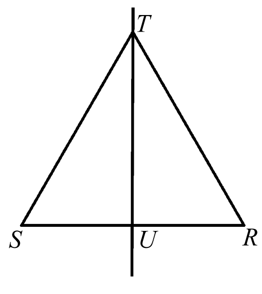


Figura 2.367

18. Demuestra que si la bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo es paralela a uno de los lados, entonces dicho triángulo es isósceles.

19. Lorena, Rafael y Milagros deben abrir un hoyo en la tierra para sembrar varios arbustos como contribución a la forestación de su localidad. Las dimensiones del hoyo deberán ser: 8,1 m de largo, 5,4 m de ancho y 1,8 m de profundidad. ¿Qué cantidad de tierra deben extraer estos estudiantes para sembrar los arbustos?

20. En la figura 2.368 se indican las amplitudes de tres ángulos. Prueba que: $\overline{BC} \,||\, \overline{AD}$ y $\overline{AB} \,||\, \overline{CD}$

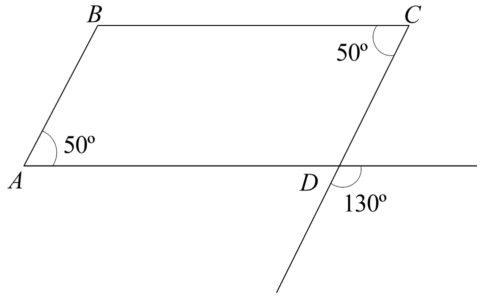


Figura 2.368

21. En la figura 2.369, $\angle BAD = \angle BCD$ y triángulo ADC es isósceles de base $\overline{AC}$. Prueba que el triángulo ABC es también isósceles.

22. Dado un triángulo ABC, en el cual $\angle C$ es recto y $CD \perp AB$. Prueba que $\angle A = \angle BCD$.

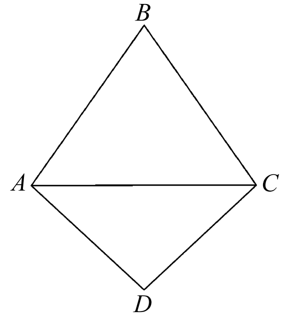


Figura 2.369

PARA LA AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona sobre lo aprendido

1. Cuáles son las figuras planas que conoces?
2. ¿Qué características tienen los diferentes tipos de ángulosestudiados?
3. ¿Sabes clasificar los triángulos según sus amplitudes de sus ángulos y longitudes de los lados?
4. ¿Sabes construir rectas paralelas, perpendiculares, la mediatriz de un segmento, la bisectriz de un ángulo?
5. ¿Qué propiedades cumplen los diferentes movimientos del plano?
6. ¿Qué nombre y propiedad cumplen los ángulos que determinan dos rectas paralelas cortadas por una secante?
7. Son dados cuatro puntos distribuidos en dos semiplanos opuestos. ¿De cuántas formas los puedo representar?
   Dos rectas r_1 y r_2 se cortan en el punto S formando un ángulo recto. Ellas a su vez son cortadas por dos rectas paralelas p y q, de modo que:
   – La intersección de p con r_1 es A y con r_2 es C.
   – La intersección de q con r_1 es B y con r_2 es D.
     a) Esboza la situación geométrica de este problema.
     b) Señala una pareja de ángulos correspondientes que sean iguales. Justifica tu selección.

c) Si se cumple que SA = 6,0 cm, SC = 8 cm y el área del triángulo ASC es el 36 % del área del triángulo SBD. Calcula a partir de estas condiciones:

– La longitud de AC.
– El área del triángulo ASC.
– El área del triángulo SBD.
– Clasifica el cuadrilátero $ABDC$. Justifica tu respuesta.
– Calcula el área del cuadrilátero $ABDC$.

8. Observa detenidamente la figura 2.370 en la cual se representa un cuadrado que se ha dividido en cuadraditos iguales, dentro del cual se han dibujado los triángulos 1 y 2. Estima el área de estos dos triángulos y selecciona cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera.

a) El área del triángulo 1 es mayor que el área del triángulo 2.
b) El área del triángulo 1 es menor que el área del triángulo 2.
c) El área del triángulo 1 es igual al área del triángulo 2.
d) No es posible determinar la relación entre estas áreas.

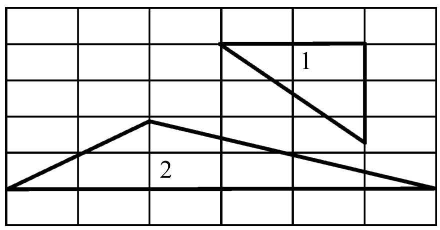


Figura 2.370

9. La amplitud de un ángulo interior de un triángulo es 16° y la diferencia entre las amplitudes de los otros dos ángulos es 28°.

a) Halla las amplitudes de los ángulos interiores de dicho triángulo.
b) Clasifica al triángulo, de acuerdo con las amplitudes de sus ángulos.
c) Calcula la amplitud del ángulo exterior que tiene un vértice común con el ángulo interior de 16°.

10. Traza en tu libreta tres puntos no alineados y construye una circunferencia que contenga a estos tres puntos. Justifica el procedimiento que utilices.

11. En la figura 2.371 aparece la representación de un piso cubierto de mosaicos iguales y se destacan en él, los mosaicos *M, A, B* y *C*. ¿Qué movimiento del plano habrá que hacer para transformar el mosaico *M* en el mosaico *A*? ¿Qué movimiento habrá que hacer para transformar el mosaico *M* en el mosaico *B*?

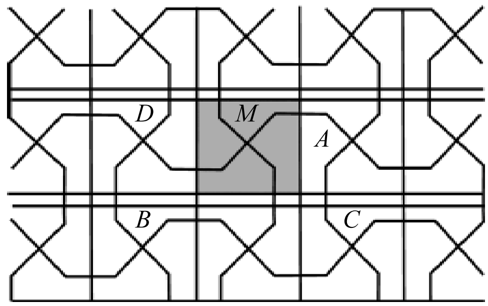


Figura 2.371

RESPUESTA DE LOS EJERCICIOS

Epígrafe 2.1.1

2. b) Figura 2.52 tres rectas; figura 2.53 seis rectas; figura 2.54 dos rectas.
   d) Figura 2.52 ocho semirrectas; figura 2.53 dieciséis semirrectas y figura 2.54 doce semirrectas.

5. b) Por un punto pasan infinitas rectas. d) La recta es ilimitada.
   f) Un punto situado entre los puntos extremos de un segmento que equidista de ellos es su punto medio.
   h) Dos segmentos consecutivos tienen solamente un extremo común.
   i) Si dos puntos diferentes están en el mismo semiplano de borde *r,* el segmento que los une no corta a la recta de borde *r.*

6. Diez rectas: *AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE*.

7. Si están los puntos en una misma recta se determinan once segmentos
   Si cada tres puntos no están alineados se determinan quince segmentos.

8. a) $\angle ABP$, $\angle PBC$, $\angle ABC$. b) $\angle ABP$, $\angle PBE$, $\angle EBC$, $\angle ABE$, $\angle PBC$, $\angle ABC$.

9. En la figura 2.57 no son consecutivos, no tienen igual vértice.
   En la figura 2.58 no son consecutivos, no tienen un lado común.

10. a) Ángulos que se pueden colocar consecutivamente a un lado de una recta:

    $\angle CAB + \angle EDF + \angle QPO$; $\angle CAB + \angle IHG + \angle LJK$; $\angle \tilde{N}MN + \angle URS + \angle ACB$; $\angle URS + \angle EDF + \angle LJK + \angle JHG$.

    b) Se pueden formar seis ángulos consecutivos alrededor de un punto realizando la combinación de dos casos anteriores.

11. c) Es falsa porque dos ángulos complementarios entre sí suman 90°, si ambos fueran rectos sumarían 180°.

12. b) 96°

13. a) Sobreobtuso b) Obtuso c) Llano d) Agudo e) Agudo

14. Para un ángulo cualquiera α, su suplemento es $180° - \alpha$ y su complemento es $90° - \alpha$, por tanto la diferencia entre el suplemento y el complemento sería:

    $180° - \alpha - (90° - \alpha) = 180° - \alpha - 90° + \alpha = 90°$ lqqd.

Epígrafe 2.1.2

2. *A:* Trapecio
   B: No hay suficientes datos para clasificarla
   C: Paralelogramo
   D: Paralelogramo

3. Es fácil construir un polígono no convexo de lados iguales, por ejemplo, tú puedes construir un polígono no convexo análogo al de la figura 2.84, con lados iguales; pero la regularidad está dada en los polígonos no solamente por los lados iguales, sino también, por los ángulos interiores iguales y no puede construirse un polígono no convexo regular.

5. Pensamos en una poligonal abierta porque el punto inicial no coincide con el punto final.

7. *ABCDEFGHIJ:* decágono no convexo, *KMNOP:* pentágono convexo, *QRST:* cuadrilátero convexo, *UVW:* triángulo convexo, *FGH IJK*: exágono convexo, *LMNOP:* pentágono no convexo *QRSTUVW:* heptágono convexo.

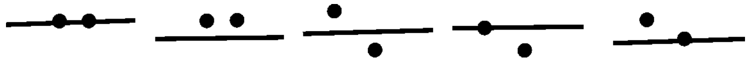
9. I: equilátero, II: escaleno, III: isósceles, IV: rectángulo.

10. ΔABC rectángulo, ΔHGI isósceles, ΔJLK acutángulo, ΔMNO obtusángulo, ΔQRP escaleno, ΔDEF equilátero.

Epígrafe 2.2.1

2. a) $P \in r$ b) $r \cap s = \{M\}$ y $M \in r, s$ c) $n \cap m = \{M\}$; $m \cap p = \{P\}$; $M \in n, m$; $P \in m, p$
   d) $A \notin a$ e) $a \cap b = \{C\}$; $c \cap b = \{A\}$; $a \cap c = \{B\}$ y $C \in a, b$; $B \in a, c$; $A \in b, c$
   f) $e = f$, todos sus puntos coinciden.

3. Cinco posibilidades:



5.1 a) Tres rectas b) Una recta 5.2 a) Ninguna b) Una recta.

6. b) Paralelas

7.* Si $a \mid\mid b$, entones $b \mid\mid a$ **(Simetría del paralelismo de rectas)**

Premisa: $a \mid\mid b$ *Tesis:* $b \mid\mid a$

Demostración:
Si $a \mid\mid b$, entonces $a = b$ o $a \cap b = \phi$ por definición de rectas paralelas.
De lo anterior, se cumple también que $b = a$ y $b \cap a = \phi$, por la relación igualdad de conjuntos y la operación intersección de conjuntos. (Capítulo 1, epígrafe 1.3.1)
De donde $b \mid\mid a$ por definición de rectas paralelas lqqd.

8.* Si dos rectas r y s tienen dos puntos comunes diferentes, entonces son iguales.

Premisa: $P, Q \in r; P, Q \in s; P \neq Q$ *Tesis:* $r = s$.

Demostración: por reducción al absurdo, supongamos que: $r \neq s$ y como $P, Q \in r; P, Q \in s$ y $P \neq Q$ por premisa, tenemos dos rectas diferentes que contienen dos puntos comunes distintos, lo cual contradice el axioma que plantea que la recta por dos puntos diferentes es única. Luego lo supuesto es falso y se cumple el teorema lqqd.

9.* Dos rectas diferentes a y b tienen a lo sumo un punto común P.

Premisa: $a \neq b$

Tesis: "tienen a lo sumo un punto común" eso significa que no tienen puntos comunes ($a \cap b = \phi$) o que tienen en común uno solamente ($a \cap b = \{P\}$)

Demostración: por reducción al absurdo, supongamos que no se cumple la tesis, es decir, que estas rectas no tienen ni uno ni ninguno de los puntos en común, por lo tanto tienen por lo menos dos puntos comunes diferentes. Luego, aplicando la propiedad que acabamos de demostrar en el ejercicio 8*, estas rectas son iguales: $a = b$ ¡Contradicción en la premisa $a \neq b$! lqqd.

10. *Conclusión:* "Si una recta corta a una de dos rectas paralelas entonces corta a la otra". Esta propiedad se demostrará en el próximo epígrafe.

Epígrafe 2.2.2

5. El punto P estará en la intersección de la mediatriz de $\overline{AB}$ y de la mediatriz de $\overline{AC}$, porque los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento.

6.* Si $a \mid\mid b$ y $c \mid\mid b$ entonces $a \mid\mid c$ **(Principio de comparación respecto a un tercero)**

Premisa: $a \mid\mid b$ y $c \mid\mid b$ *Tesis:* $a \mid\mid c$

Demostración:

Si $a \mid\mid b$ entonces $a = b$ o $a \cap b = \phi$ por definición de rectas paralelas.
Si $c \mid\mid b$ entonces $c = b$ o $c \cap b = \phi$ por definición de rectas paralelas.
Luego $a = b = c$, de donde $a = c$; solo faltaría fundamentar que $a \cap c = \phi$, lo cual probaremos por reducción al absurdo. Supongamos que las rectas a y c no son paralelas, es decir, se cortan en un punto P entonces por el punto P pasa la recta a y $a \mid\mid b$ por premisa, pero también pasa por el punto P la recta c y ahora $c \mid\mid b$. Luego tenemos dos paralelas a y b a la recta c, por un punto exterior P y debe ser única ¡Contradicción!

7.* Si $a \mid\mid b$ y $b \mid\mid c$ entonces $a \mid\mid c$ **(Transitividad del paralelismo de rectas)**

Premisa: $a \mid\mid b$ y $b \mid\mid c$ *Tesis:* $a \mid\mid c$

Demostración:

Por premisa $a \mid\mid b$ y también $b \mid\mid c$, pero si aplicamos a esta última relación la simetría del paralelismo rectas, propiedad ya demostrada en el ejercicio 7 del epígrafe anterior, tenemos que $c \mid\mid b$ y ahora podemos aplicar el principio de comparación respecto a un tercero, que se demostró en el ejercicio 6, anterior a este, de donde si $a \mid\mid b$ y $c \mid\mid b$ entonces $a \mid\mid c$. lqqd.

8. *Conclusión:* "Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente paralelos entonces son iguales".

9. Podemos utilizar la propiedad de la conclusión del ejercicio 7, es decir, trazar un ángulo cuyos lados sean paralelos al ángulo dado, tal ángulo es de igual amplitud que el ángulo dado, luego si lo medimos obtenemos la amplitud de ángulo deseado.

10.* Construcción del triángulo equilátero de lado de longitud a:

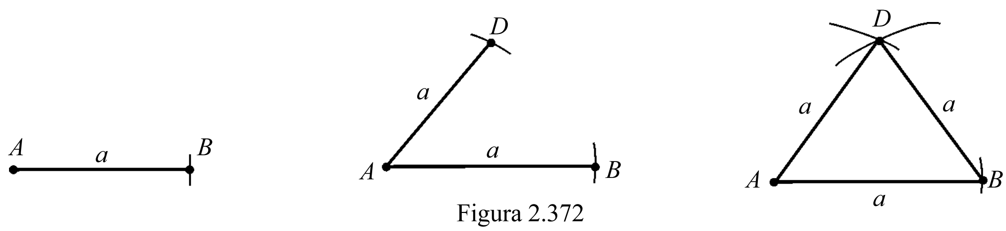


Figura 2.372

11.* Propiedad geométrica: si una recta corta a una de dos rectas paralelas entonces corta a la otra.

Premisa: sean $r \mid\mid s$ y t una recta que corta a s en un punto P.

Tesis: t corta a r también.

Demostración: por reducción al absurdo, supongamos que: $t \mid\mid r$ y como por premisa $s \mid\mid r$ luego se tiene aplicando el ejercicio 6 ya demostrado que: $t \mid\mid s$ ¡Contradicción! Pues por la premisa, la recta t corta a la recta s en un punto P. Lo supuesto es falso, se cumple el teorema lqqd.

12.* Construcción ΔABC con un ángulo agudo α y lados de longitud a y b con $a < b$.

Sea h la distancia de C al lado $\overline{AB}$ o altura del lado $\overline{AB}$. Existen tres posibilidades:

($a < h$) No hay solución ($a > h$) Hay dos soluciones
($a = h$) Hay una solución

Soluciones

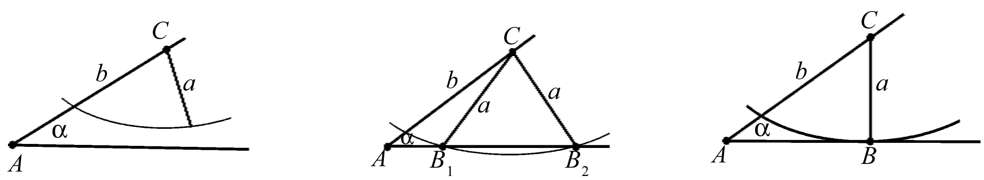


Figura 2.373

Epígrafe 2.2.3

1. a) $\beta = 152°$ b) α es agudo c) Los ángulos $\angle ABP$ y $\angle PBC$ son iguales.
d) ABP es un triángulo isósceles.

2. Toda pareja de ángulos adyacentes son suplementarios, pero no toda pareja de ángulos suplementarios cumple los requisitos de los ángulos adyacentes.

3. Obtuso; Obtuso; perpendiculares.

5. $\angle AMB = \angle EMD$; b) $\angle BME = \angle FMC$; c) $\angle AMB + \angle AMF = \angle DME + \angle CMD$

6. $\angle DOC = 43°$; $\angle BOC = 137°$; $\angle AOB = 135°$; $\angle AOC = 180°$; $\angle BOD = 180°$

7. Verdadera, porque si son consecutivos están ubicados uno a continuación de otro, con el vértice y un lado en común y si además suman 180°, cumplen todos los requisitos de los ángulos adyacentes.

8. a) β b) $\angle AOB = \angle DOC$ c) Iguales

9. *Conclusión:* Dos ángulos del mismo tipo que tienen lados perpendiculares son de igual amplitud.

10. Las semirrectas p y q *no son opuestas* porque no forman un ángulo $\angle(p, q)$ llano, pues:

a) $\angle(p, q) = \angle(p, r) + \angle(r, q) = 147° + 53° = 200°$
b) $\angle(p, q) = 93° + 65° = 158°$

11.*

a). Todo ángulo igual a su adyacente es recto. *Premisa:* α y β adyacentes, $\alpha = \beta$ *Tesis:* $\alpha = 90°$ *Demostración:* $\alpha + \beta = 180°$ por adyacentes, $\alpha + \alpha = 180°$ sustituyendo β $2\alpha = 180°$ $\alpha = 90°$ lqqd.	b). Todo ángulo recto es igual a su adyacente. *Premisa:* α y β adyacentes $\alpha = 90°$ *Tesis:* $\alpha = \beta$ *Demostración:* $\alpha + \beta = 180°$ por adyacentes $90° + \beta = 180°$ sustituyendo α $\beta = 90°$ Luego $\alpha = \beta$ lqqd.	c). Si dos ángulos son iguales entonces sus adyacentes son iguales. *Premisa:* $\alpha = \alpha^*$ y β, β^* sus respectivos adyacentes *Tesis:* $\beta = \beta^*$ *Demostración:* $\alpha + \beta = 180°$ por adyacentes $\alpha^* + \beta^* = 180°$ por adyacentes $\alpha + \beta = \alpha^* + \beta^*$ comparando igualdades Luego $\beta = \beta^*$ lqqd.

d) Dos rectas r y s perpendiculares se cortan formando cuatro ángulos rectos.

Premisa: sean r y s rectas con $r \perp s$, que determinan al cortarse $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ y $\angle 4$

Tesis: $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 90°$

Demostración:

Si $r \perp s$, por definición de perpendicularidad, uno de los ángulos $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ o $\angle 4$ es recto. Sin perder generalidad sea: $\angle 1 = 90°$.
$\angle 3 = 90°$ por opuesto por el vértice con $\angle 1$
$\angle 2 = 90°$ y $\angle 4 = 90°$ por ser adyacentes respectivos de ángulos rectos $\angle 1$ y $\angle 3$. Luego: $\angle 1 = 90°$, $\angle 2 = 90°$, $\angle 3 = 90°$, $\angle 4 = 90°$ lqqd.

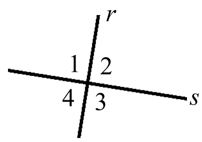


Figura 2.374

Epígrafe 2.2.4

1. a) F b) V c) F d) F e) V f) F

2. a) Correspondiente; opuesto por el vértice b) $\angle 16$; $\angle 14$ c) Conjugado; $\angle 5$ d) $\angle 14$; correspondiente e) $\angle 7$; $\angle 2$

3. a) Por ser ángulos correspondientes entre paralelas b) Por ser ángulos conjugados entre paralelas c) Por ser ángulos alternos entre paralelas d) Por ser ángulos adyacentes
e) Por ser ángulos opuestos por el vértice

4. a) F, no se especifica que las rectas sean paralelas b) F, no se especifica “cada pareja de alternos” porque todas las parejas de alternos no son iguales c) V

5. Son falsas: c) $\angle 4$ y $\angle 5$ son conjugados sus amplitudes suman 180 ; f) $\angle 4$ y $\angle 8$ son correspondientes.

6. a) Alterno; correspondiente b) $\angle 10$; $\angle 12$ c) Alterno; $\angle 15$ d) $\angle 16$; correspondiente.

7. $\beta = 28°$; $\lambda = 152°$; $\angle 1 = 76°$

8. a) $\alpha = 67°$; $\beta = 65$; b) $\theta = 25°$; $\alpha = 80°$ c) $\theta = 48°$; $\alpha = 76°$

9. $\beta = 65°$

10.* Como $b = 65°$ por los cálculos del ejercicio 8 y $\beta = 65°$ por datos y son correspondientes, tenemos una pareja de ángulos correspondientes iguales y aplicando la afirmación dada se cumple que $p \| r$ lqqd.

11.* Al realizar la construcción, la pareja de ángulos que se señala en la figura 2.375 tienen igual amplitud, pues se trata del mismo ángulo del cartabón, pero además de ser iguales son correspondientes, luego las rectas entre las cuales están estos ángulos son paralelas, según el ejercicio anterior, es decir, $p \| r$.

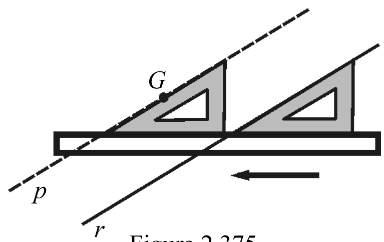


Figura 2.375

Epígrafe 2.3

2. a) ΔCOD b) ΔAOB c) Simetría axial de eje OB d) $\overline{BC}$ e) $\overline{OD}$ f) $\overline{FC}$ g) ΔAOB h) La simetría central es una rotación particular con un ángulo de 180°.

5. En las figuras: 3, 5, 6, 7, 8 de la figura 2.211 la recta trazada es un eje de simetría

6. a) Rotación de centro A y ángulo DAB b) Reflexión de eje AD c) Traslación de dirección $\overline{BB'}$ d) Simetría Central de centro C e) Rotación de centro A y ángulo BAB'.

7. Conclusión: al aplicar dos simetrías axiales consecutivas del mismo eje a una figura, esta se transforma en sí misma. La composición de dos simetrías axiales del mismo eje es igual a la transformación idéntica.

8. a) V b) V c) V d) F; esta recta es perpendicular al eje de simetría e) F; porque el centro es el centro de la rotación, pero el ángulo tiene que ser de 180° f) V g) F; toda figura y su imagen por un movimiento son iguales.

9. (1) Simetría central de centro O. (2) Rotación de centro O y ángulo de 90° (3) Rotación de centro O y ángulo de 60° (4) (2) Rotación de centro O y ángulo de 90°.

10. a) 2 b) 3 y 2 c) 4

Epígrafe 2.4.1

1. R/ 50° 2. R/ 52° 3. R/ 67° 4. Según propiedades estudiadas. 5. R/ $\angle 1 = 120°$; $\angle 2 = 145°$

6. R/ 360°

7. R/ 360°

8. R/ $\angle CAE = 65°$, $\angle ACE = 25°$, $\angle ACB = 80°$, $\angle CBE = 35°$.

9. No puede ser un ángulo recto porque sería su adyacente interior recto y su igual también recto y con ello, la suma de sus amplitudes daría mayor que 180° al sumar la amplitud del tercer ángulo del triángulo. Tampoco puede ser agudo porque su adyacente interior sería obtuso y con ello se tendrían los dos ángulos interiores iguales, obtusos y la suma de sus amplitudes daría mayor que 180° y sí pudieran ser obtusos, pues así sus interiores iguales serían agudos.

10.* **Teorema de los terceros ángulos**
Premisa: α, β, γ ángulos del ΔABC
α^*, β^*, γ^* ángulos del $\Delta A'B'C'$ con $\alpha = \alpha^*$ y $\beta = \beta^*$

Tesis: $\gamma = \gamma^*$

Demostración:

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$ y $\alpha^* + \beta^* + \gamma^* = 180°$ por suma de amplitudes de los ángulos de un triángulo
$\alpha + \beta + \gamma = \alpha^* + \beta^* + \gamma^*$ comparando ambas igualdades
$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta + \gamma^*$ sustituyendo $\alpha = \alpha^*$ y $\beta = \beta^*$
$\gamma = \gamma^*$ lqqd

Epígrafe 2.4.2

1. Es una afirmación falsa, porque no cumple con estas dimensiones la desigualdad triangular.

2. a) No; b) Sí; c) No; d) Sí

3. a) 3 cm

4. a) 3 cm

5. y 6. Deben escribirse estos números considerando la desigualdad triangular.

7. $d < a + a = 2a$.

8. $d < a + a = 2a$.

9. a) Incorrecta porque $QO + OP + PQ = QS + SU$ b) Incorrecta porque $QS + SU > OS$ c) correcta.
10. Son iguales ambos recorridos.

Epígrafe 2.4.3

1. Crucigrama

											5		
								3			M		
	1		2					B			E		6
	I		A					A			D		O
	S		L					R			I		R
	Ó		T	a)	M	E	D	I	A	N	A		T
	S		U		b)	I	N	C	E	N	T	R	O
c)	C	I	R	C	U	N	C	E	N	T	R	O	C
	E		A					N	4		I		E
	L	d)	**B**	**I**	**S**	**E**	**C**	**T**	**R**	**I**	**Z**		**N**
	E							R	E				T
	S							O	C				R
									T				O
				e)	M	E	D	I	O				

2. a) V b) F; solamente en triángulos equiláteros o si se trata de la bisectriz del ángulo principal de un triángulo isósceles. c) F; equidista de los vértices del triángulo. d) F; equidista de los lados del triángulo. e) V f) F; solo si pasa perpendicularmente.

8. Falso, cada altura corresponde a uno de los lados del triángulo y no necesariamente tienen que ser iguales las tres alturas, esto sucede en los triángulos equiláteros. Los triángulos isósceles tienen solamente dos alturas iguales. Aunque las alturas sean diferentes, para calcular el área del triángulo se puede utilizar cualquiera de ellas indistintamente, para multiplicarla por la longitud de su lado correspondiente y dividirla entre dos para obtener tal área.

9.* Si dos ángulos son adyacentes sus bisectrices forman un ángulo recto.

Premisa: α, β ángulos adyacentes cualesquiera y p, q sus respectivas bisectrices.

Tesis: $\angle(p, q)$ es recto

Demostración:

$$\angle(p,q) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$$
$$= \frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$= \frac{180}{2}$$
$$= 90°$$

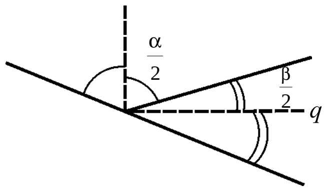


Figura 2.376

10. *Conclusión:* la mediatriz, la mediana y la altura de la base de un triángulo isósceles coinciden.

11. *Conclusión:* el baricentro, el ortocentro y el circuncentro de un triángulo están en una recta llamada recta de Euler. Traza un triángulo, determina su baricentro, ortocentro y circuncentro y comprueba que están alineados.

Epígrafe 2.4.4

1. La hipotenusa es el mayor lado de un triángulo rectángulo porque se opone al ángulo recto que es el ángulo mayor.

2. En los triángulos rectángulos la longitud de la hipotenusa es menor que la suma de las longitudes de los catetos por la desigualdad triangular.

3. Aplicando el teorema de Pitágoras (fig. 2.377) se puede calcular la altura que alcanza la escalera en esta posición:
   (altura)^2 = (longitud de la escalera)^2 – (distancia a la pared)^2
   $h^2 = (5)^2 - (3)^2 = 25 - 9 = 16$
   Si $h^2 = 16$ entonces $h = 4{,}0$ cm (altura de la escalera)
4. $x^2 = (3)^2 + (4)^2 = 9 + 16 = 25$ (fig. 2.378)
   (Por el teorema de Pitágoras)

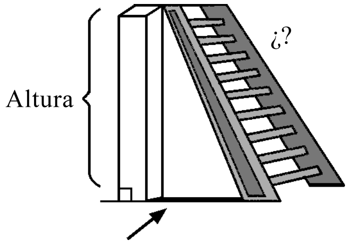


Figura 2.377

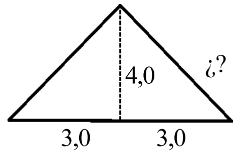


Figura 2.378

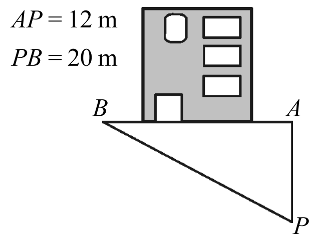
5. Sus ángulos agudos son complementarios, porque tiene un ángulo recto, por suma de las amplitudes de los ángulos interiores restan 90° para los dos ángulos agudos.

6. $\overline{PB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AB}^2$ por Teorema de Pitágoras

   $\overline{AB}^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256$

   $\overline{AB} = 16\ m$

   R/ La distancia entre A y B es 16 metros.



7. Comparamos $(22)^2$ y $(12)^2 + (15)^2$; 484 > 369 R/ El triángulo es obtusángulo.

Figura 2.379

8. $h^2 = (5)^2 - (4)^2 = 25 - 16 = 9$
   (Por el teorema de Pitágoras)
   R/ La longitud de la altura es 3,0 cm

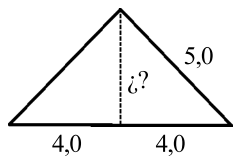


Figura 2.380

9.* Porque cada una de sus alturas forma con su lado correspondiente y otro lado consecutivo, un triángulo rectángulo, en el cual ella es cateto y el lado hipotenusa. Luego la suma de las tres alturas (catetos) es siempre menor que los lados del triángulo (hipotenusas) por desigualdad triangular.

10.* $h^2 = (20)^2 - (10)^2 = 400 - 100 = 300$ por el teorema de Pitágoras

   $300 = 3 \cdot 100$; $\sqrt{300} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{100} = \sqrt{3} \cdot 10 = 1{,}7 \cdot 10 \approx 17\,\text{cm}$

   R/ La longitud de la altura del triángulo es 17 cm

Epígrafe 2.4.5

1. No existen cuadriláteros convexos con todos sus ángulos interiores obtusos porque la suma de sus amplitudes sería mayor que 360°.

2. No existen cuadriláteros convexos con todos sus ángulos interiores agudos porque la suma de sus amplitudes sería menor que 360°.

3. 63°, 117°, 63°, 117°

4. • Un paralelogramo que tiene un ángulo recto es un rectángulo, porque como los ángulos opuestos son iguales y los consecutivos conjugados, los cuatro son rectos.

- Un cuadrilátero convexo que tiene cuatro lados iguales es un rombo, porque los lados opuestos son también iguales y con ello es un paralelogramo y si además, todos los lados son iguales cumple las propiedades del rombo.
- Un paralelogramo que tiene dos lados consecutivos iguales es un rombo, porque si es paralelogramo los lados opuestos a estos son iguales y con ello todos los lados son iguales y de esta forma es un rombo.

5. Rombo.

6. Trapecio isósceles.

7. 63°.

8. a) Opuestos b) Se bisecan c) Suman 180° d) Iguales y paralelos

R	A	E	**I**	**P**	**A**	**R**	**A**	**L**	**E**	**L**	**O**	**S**
E	W	D	**G**	L	S	O	S	U	T	B	O	A
C	R	**S**	**U**	**M**	**A**	**N**	**180°**	Q	T	T	B	I
T	D	T	**A**	G	**S**	**O**	**T**	**S**	**E**	**U**	**P**	**O**
O	F	G	**L**	P	Ñ	U		E	V	F	P	O
S	G	**S**	**E**		**B**	**I**	**S**	**E**	**C**	**A**	**N**	F
A	B	I	**S**	E	C	T	R	I	C	E	S	H

9.* Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.

Premisa: $ABCD$ paralelogramo de ángulos interiores $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$

Tesis: $\angle A = \angle C$ y $\angle B = \angle D$

Demostración:

Consideremos una diagonal de $ABCD$. Sin perder generalidad sea esta BD y sean las parejas de ángulos consecutivos determinadas por ella en los ángulos interiores: $\angle D = \angle 1 + \angle 2$ y $\angle B = \angle 3 + \angle 4$

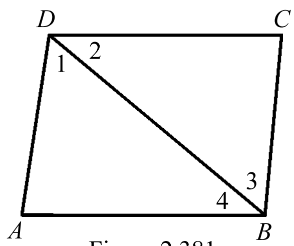


Figura 2.381

Por otro lado:

$\angle 1 = \angle 3$ alternos determinados por los lados paralelos de $ABCD$: $AD \,||\, BC$ y la secante BD.
$\angle 2 = \angle 4$ alternos determinados por los lados paralelos de $ABCD$: $AB \,||\, CD$ y la secante BD.

De donde se sigue: $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$, es decir: $\angle B = \angle D$ (I)

Los triángulos *ABD* y *DBC* tienen dos parejas de ángulos iguales, luego por terceros ángulos: $\angle A = \angle C$ (II). De I y II se cumple la tesis lqqd.

Epígrafe 2.4.6

1. 14 cm
2. 20 cm
3. $\angle U = 90°$; $\angle R = 90°$; $\angle T = 115°$; $\angle S = 65°$
4. a) $\angle P = 38°$; $\angle R = 142°$ b) $\angle Q = 64°$; $\angle R = 116°$; $\angle S = 116°$

   c) $\angle P = 46°$; $\angle S = 134°$; $\angle R = 134°$ $\angle S = 46°$
5. Trapecio isósceles.
6. Suman 180° porque también son ángulos conjugados entre los lados paralelos del trapecio que determinan estos ángulos y como tal tipo de ángulo sus amplitudes suman 180°.
7. Sí, en ese caso sería un trapecio particular: el rectángulo.
8. Sí, existe un trapecio con dos ángulos rectos, porque necesariamente al cortar perpendicularmente a una de dos paralelas (en este caso los lados paralelos del trapecio) se corta perpendicularmente también a la otra.

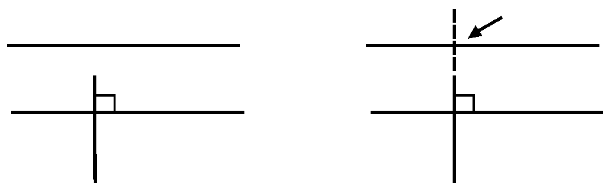


Figura 2.382

9. Un trapecio de tres ángulos rectos por suma de amplitudes de los ángulos de un cuadrilátero tiene que tener el cuarto ángulo recto y es un trapecio particular: el rectángulo.

10.* En todo trapecio isósceles los ángulos adyacentes a una misma base son de igual amplitud.

Premisa: PQRS trapecio isósceles de bases $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$, o sea: $\overline{PS} = \overline{QR}$
Tesis: $\angle P = \angle Q$ y $\angle S = \angle R$

Demostración:

Considera la construcción auxiliar: $\overline{RE} \parallel \overline{PS}$ con $E \in \overline{PQ}$, así queda determinado *PERS* paralelogramo de lados opuestos iguales, en particular: $\overline{PS} = \overline{RE}$ y como $\overline{PS} = \overline{QR}$ por premisa, se sigue por transitividad: $\overline{RE} = \overline{RQ}$ y con ello ΔERQ isósceles de base $\overline{EQ}$ y sus ángulos base iguales: $\angle E = \angle Q$ (i)

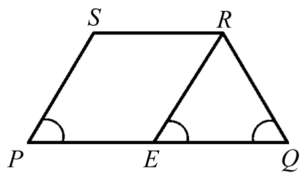


Figura 2.383

Pero $\angle E = \angle P$ (ii) por correspondientes entre las paralelas *PS* y *RE,* con la secante *PQ*, de (i) e (ii) tenemos: $\angle P = \angle Q$

Falta probar $\angle S = \angle R$, pero como la demostración es más sencilla la dejamos al estudiante.

Epígrafe 2.5.1

1. 1.1 a) 1.2 c) 1.3) b) 1.4) b)
2. Completar la tabla:

Elementos de la circunferencia	Notación
Radios	$\overline{AO}$, $\overline{EO}$, $\overline{OB}$
Cuerdas	$\overline{AD}$, $\overline{DB}$, $\overline{EB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{AB}$
Diámetro	$\overline{EB}$
Arcos	*EA, AD, DB, AB, CB, EC, CA, EB, ECB, ED.*

2.1 a) $\overset{\frown}{EC} \angle 180°$ b) $\overset{\frown}{EAB} = 180°$ c) $\overset{\frown}{EBD} > 180°$

6. a) P no pertenece a la circunferencia porque como centro su distancia al centro de la circunferencia es 0 cm, no es igual al radio 2 cm. c) F, los puntos que se encuentran a una distancia menor que la longitud del radio no pertenecen a la circunferencia, todos los puntos de la circunferencia equidistan del centro.

8. El diámetro es la mayor de las cuerdas.

9. Esta es una condición suficiente, dos circunferencias iguales se diferencian solamente en su posición respecto al plano en que están situadas, existe un movimiento que transforma una en la otra. No sucede así con las circunferencias idénticas que deben tener igual centro también.

10.* *Premisa:* $\overline{NQ}$ diámetro, $\overline{MN}$ cuerda;

Tesis: $\overline{NQ} > \overline{MN}$

Demostración:

Tracemos el radio por el punto M

$\overline{MO} + \overline{ON} > \overline{MN}$ por desigualdad triangular en ΔMNO

$r + r > \overline{MN}$ por definición de radio

$2r > \overline{MN}$

$\overline{NQ} > \overline{MN}$ por definición de diámetro

lqqd

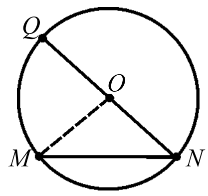


Figura 2.384

Epígrafe 2.5.2

4.1. Exterior; tangente; secante
4.2. Tangente 1 punto; secante 2 puntos; exterior ninguna

Epígrafe 2.5.3

1. a) Radios: *AO, BO, OE* diámetros: *BE* cuerdas: *AC, BE*
   b) y c) Arcos: *EC, AE, AD, AB, BC* < 180° b) $\overset{\frown}{EOB} = 180°$
   $\overset{\frown}{EBC}, \overset{\frown}{ACE}, \overset{\frown}{ABD}, \overset{\frown}{ACB}, \overset{\frown}{BAC} > 180°$

3. a) V. Son iguales, salvo su posición en el plano. Siempre existe un movimiento que transforme una en la otra, aunque no son idénticas. b) V En este caso de los puntos como tal de la circunferencia tienen dos puntos comunes y son secantes, pero no deja de ser cierto que de los puntos llamados interiores van a tener puntos comunes, que es en definitiva lo que se afirma aquí.
   c) V. Son iguales porque son diámetros todos los diámetros tienen igual longitud.
   d) F. Los extremos de toda cuerda son centralmente simétricos solo si se trata de un diámetro. e) V Siempre equidistan porque son puntos de la circunferencia y equidistan del centro a la distancia llamada radio.

4. 8,0 cm

5. No puede ser 7,0 cm la distancia entre los centros porque no se cumpliría la desigualdad triangular en los dos triángulos formados por los dos centros y respectivamente cada uno de los puntos de intersección.

6. No son precisos los datos, porque es necesario conocer también la distancia entre los centros de las circunferencias, porque es posible con estos radios construir circunferencias que cumplan los tres casos a) b) c) y la respuesta no sería única.

Epígrafe 2.6.1

1. 1- *A, F*   2 - *B, C, D*   3 - *E, C, D, B*   4 - *B, C, D*   5 - *A, F*

4. Cada segundo de un año está representado al multiplicar 300 000 km recorridos por la luz en un segundo por 365 días del año, por las 24 h de cada día, por los 60 min de cada hora y por los 60 s de cada minuto.

5. Estos recursos podrían durar aproximadamente:
Carbón: 977 576 000 : 4 672 658 = 209,211 973
Petróleo: 1 056 805 000 : 24 345 016 = 43,409 501 14
Gas Natural: 146 439 000 000 : 2 268 329 000 = 64,558 095 40

Epígrafe 2.6.2

1. 1.1) c) L 1.2) a) L 1.3) a) ml

2. a) 24 cm b) 27 cm^2 3 a) 74°, 74°, 32° b) Trapecio; 89 cm^2 4. b) 27 m^2

5. b) 69 cm^2 6. Opción 1: 370 m^3 de agua   7. b) 18 cm^2 8. d) 50 %   9. b) 6 cm^2

10. 20 cm^2 11. b) 147 cm^2 12. a) 22 m^2 b) 66 m^3

13.* a) Volumen del aula 48 m^3
b) Pintura con agua: 4,8 L; superficie a pintar: (45 m^2 – 4,6 m^2) 40,4 m^2
Cálculo del rendimiento: 40,4 : 10 = 4,4 L para los 4,8 L que se tienen alcanza la pintura.

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO

1. 19 triángulos y 3 cuadriláteros

2. a) Los triángulos *ADM, MCB* y *AMB* son isorrectángulos
b) $\angle DAM = \angle DMA = \angle MAB = \angle MBA = \angle CMB = \angle CBM = 45°$
$\angle ADM = \angle MCB = \angle AMB = \angle DAC = \angle CBA = 90°$

3. $\angle ABF = 66°$, $\angle HCD = 57$

4. Porque el ángulo opuesto por el vértice al $\angle 2$, que tiene su misma longitud por serlo, está del mismo lado que los ángulos $\angle 1$ y $\angle 3$ respecto a una misma recta, luego suman 180°.

5.* a) Si el ángulo de 60° es uno de los ángulos base, entre los dos sus amplitudes suman 120° y el tercero tiene que medir también 60° por la propiedad de la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo. Si es el ángulo principal el que mide 60°, por la propiedad de la suma mencionada los dos ángulos restantes juntos miden 120° y como se trata de los ángulos base que son iguales al dividir esta suma en dos ángulos iguales se obtiene 60°.

b) Porque ella y ambas mitades de la hipotenusa son radios de la circunferencia circunscrita al triángulo rectángulo, que existe según teorema de Tales.

c) Porque en cada uno de los tres triángulos rectángulos determinados por las alturas, respectivamente cada altura es cateto que es de menor longitud que cada lado del triángulo original que es hipotenusa en los tres pequeños triángulos. Si se suman estas tres desigualdades se obtiene la tesis planteada.

6. a) F, porque un triángulo isósceles los lados que no son base tienen la misma longitud y a lados iguales se oponen ángulos iguales, por tanto los ángulos bases son iguales.
   b) F, porque en un triángulo equilátero los ángulos tienen una amplitud de 60°.
   c) e) f) h) k) y m) son proposiciones verdaderas: V
   d) F, porque la mediana, la altura, la mediatriz que coinciden son las relativas a la base.
   g) F, porque la longitud del diámetro de una circunferencia es el doble de la su radio.
   i) F, porque el cuadrilátero que posean un par de lados opuestos paralelos se llama trapecio, para ser paralelogramo debe tener dos pares de lados opuestos paralelos o ser un par de lados opuestos paralelos e iguales.
   j) F, porque el rombo solo tiene los cuatro lados iguales y para ser cuadrados los lados tienen igual longitud y los ángulos interiores tienen una amplitud de 90°.
   l) F, porque por un punto exterior a la circunferencia se pueden trazar infinitas rectas pero estas son rectas exteriores a la circunferencia, además la recta tangente a la circunferencia pasa por un único punto que pertenece a la circunferencia y se llama punto de tangencia y esta recta tangente es perpendicular al radio.

7. $\angle GBH = 70°$

8. c)

9. $P = 1{,}7$ cm, podrá cortar 6 cuadraditos.

10. Isabel y Rolando emplean la misma cantidad de pintura.

11. b) 9 600 m^2

15. En un triángulo isósceles la mediana, la altura, la mediatriz relativa a la base y la bisectriz del ángulo que se opone a la base coinciden.
    a) En un triángulo equilátero la mediana, la altura, la mediatriz relativa a cada lado y la bisectriz del ángulo que se opone a cada lado coinciden.

16. Se justifica análogamente como la respuesta del ejercicio 5.* c)

17. $\overline{TU} = 15$ cm b) $\angle STU = 30°$

18. Si la bisectriz de dicho ángulo exterior determina dos ángulos iguales entre sí y a su vez, como este ángulo exterior, es también igual a la suma de las amplitudes de los dos ángulos interiores no adyacentes a él, por ser también dicha bisectriz paralela a un lado del triángulo, la suma de las amplitudes de los dos ángulos interiores mencionados, que son respectivamente alterno uno y correspondiente el otro son iguales y con ello el triángulo isósceles.

19. 79 m^3

20. Al calcular los dos ángulos interiores que faltan se verifica que las parejas de conjugados son suplementarios y con ello, las rectas que los determinan son paralelas y se cumple la tesis.

21. Por diferencia de parejas de ángulos iguales se llega a la igualdad de dos ángulos del triángulo *ABC* y de aquí se sigue que es isósceles.

22. Ambos ángulos $\angle A$ y $\angle BCD$ son complementarios del mismo ángulo $\angle B$ respectivamente en los dos triángulos rectángulos diferentes formados: *ABC* y *CDB*.

CAPÍTULO 3

Trabajo con variables

Casi al final del curso

¡! Hasta ahora hemos estudiado un nuevo conjunto numérico y ampliado nuestros conocimientos sobre la Geometría. Mis compañeros de grupo y yo estamos contentos; hemos aprendido; las orientaciones de mi profesora, incluidas sus explicaciones, siempre han sido muy valiosas. Ella nos llena de optimismo cuando hace falta, y eso siempre nos hace muy felices.

Casi al terminar el estudio de la Geometría, ella dividió el grupo en tres equipos y a cada uno le asignó una tarea, todas relacionadas con el Álgebra.

Equipo	Tarea
1	Busca en tus libretas de Matemática de sexto grado ejemplos del uso de las variables para representar diversas situaciones.
2	Investiga en tus libretas de Matemática de séptimo grado ejemplos de situaciones que puedas representar utilizando variables.
3	Indaga en libros de Matemática y otras publicaciones el uso de las variables.

Yo integré el equipo 3 y estos fueron algunos de mis resultados:

1) El opuesto de un número racional a es $-a$ ($a \neq 0$).
2) El valor absoluto o módulo de un número racional negativo b es $-b$.
3) La media aritmética de cinco números x, w, z, t, v es: $\frac{x+w+z+t+v}{5}$.
4) $\alpha + \beta = 180°$ (fig. 3.1)

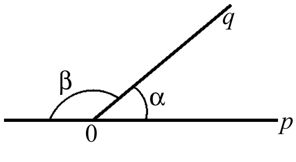


Figura 3.1

5) En la figura 3.2 $ABCD$ es un trapecio de bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, $\overline{CE}$ altura. La fórmula para hallar el área de ese trapecio es $A_{ABCD} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{CE}$.

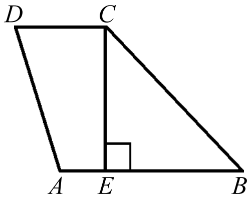


Figura 3.2

El uso de símbolos para simplificar el lenguaje es de gran importancia en las matemáticas. El álgebra es la parte de las matemáticas, en que las operaciones aritméticas son generalizadas empleando números, letras y signos.

La historia del álgebra comenzó en el antiguo Egipto y Babilonia, aproximadamente dos mil años antes de nuestra era, donde fueron capaces de resolver distintos tipos de ecuaciones, como las de la forma $ax = b$, con $a \neq 0$, ya estudiada por ti.

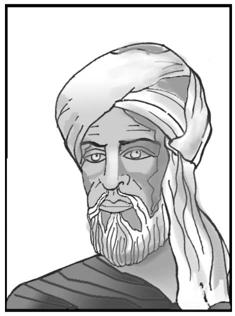


Figura 3.3

Los árabes introdujeron en Occidente la numeración y el álgebra. Entre los matemáticos árabes sobresale Al Khuwarizmi (fig. 3.3) (siglo IX) autor de la obra que trata sobre las operaciones para simplificar las ecuaciones. Una de ellas "al – jabar" que significa "reducir", es el origen de la palabra álgebra y fue empleada por primera vez por Al Khuwarizmi, su nombre dio origen a la palabra algoritmo. En sus trabajos no utilizó el simbolismo convencional que conocemos hoy, pero hizo referencia a las operaciones con expresiones, elementos de un cálculo algebraico y trató la resolución de ecuaciones.

La obra más antigua que se conserva sobre álgebra es la de Diofanto de Alejandría, matemático griego del que se conoce parte de su obra y de quien se tiene escasa información sobre su vida: solo se sabe que nació a finales del siglo II n.e. en Alejandría.

3.1 Traducción de situaciones de la vida al lenguaje algebraico y viceversa

Los ejemplos anteriores nos confirman, además, que, como bien lo indica su nombre, una *variable* es aquello que varía o puede variar. Se trata de algo *inestable***,** *inconstante* y *mudable***.** En otras palabras, una variable es un *símbolo* que representa un elemento no especificado de un conjunto dado. Este conjunto es denominado *conjunto universal de la variable* o *dominio de la variable*, y cada elemento del conjunto es un *valor* posible de la variable. Para representar las variables se acostumbra a utilizar letras minúsculas.

En la imagen (fig. 3.4) tenemos un manuscrito griego del siglo XII, *que muestra una de las páginas de* Los Elementos *de Euclides, fíjate que hemos señalado en él un cuadrado en el que se observa que se utilizaba la misma expresión para indicar la longitud de cada lado. ¡Interesante verdad!*

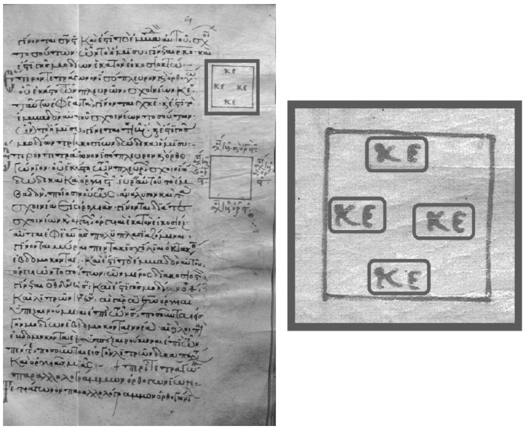


Figura 3.4

Muchas situaciones de la vida diaria puedes escribirlas utilizando variables. En este caso decimos que realizamos una traducción del **lenguaje común al lenguaje algebraico**. También las expresiones donde aparecen variables pueden leerse o escribirse con el uso de la lengua materna, en este caso traducimos del **lenguaje algebraico al lenguaje común**.

Para realizar la traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico debes conocer que existen palabras de uso frecuente que tienen un significado matemático y pueden ser expresadas en el código del lenguaje de las variables, es decir, haciendo uso de las variables, signos y números. A estas palabras acostumbramos a llamarlas palabras *claves.*

Ya tú conoces muchas de estas palabras claves, como son: *aumentado* en, *disminuido* en, la *misma* cantidad que, en *total, excede* en, *más* que, *menos* que, número de *veces,* la *enésima parte, números consecutivos, par, impar, antecesor, sucesor,* entre otras.

Es importante que tengas en cuenta que para realizar correctamente la traducción del lenguaje común al algebraico debes comprender e interpretar el texto y buscar en el diccionario aquellas palabras cuyo significado desconozcas.

Por ejemplo, la palabra clave *excede* significa que aventaja, sobra, supera, rebasa, sobrepasa, que se pasa; luego, esta palabra se utiliza para establecer una relación entre dos números, un número mayor y otro menor. En situaciones en las que aparezca esta palabra clave, debes determinar ante todo cuál es el mayor y cuál es el menor de los números. Entonces cuando leas en un texto "a excede en 8 a b", significa que "a supera en 8 a b", que "a sobrepasa en 8 a b", lo que quiere decir que a es el mayor y b el menor.

Ejemplo 1:

Representa utilizando variables:

a) El duplo de un número.

En esta situación la palabra clave es *duplo,* que es un pronombre numeral multiplicativo, o sea, dicho número se multiplica por dos.
Luego, si designamos por x al número, entonces su representación será $2x$.

b) Un número disminuido en tres.

Aquí la palabra clave es *disminuido,* que tiene un sentido matemático, pues significa reducir o sustraer en una cantidad determinada.
En nuestro caso, designando por m al número, escribimos $m - 3$.

c) La diferencia de dos números cualesquiera.

Diferencia significa el resultado de la operación matemática sustracción.
Designando por a y b los números, la situación se expresa por $a - b$.

d) La mitad de un número aumentada en su triplo.

En este caso tenemos dos palabras claves, *mitad,* que significa dividir por dos y *triplo,* que significa multiplicar por tres. Designando por m al número, la representación sería: $\frac{m}{2} + 3m$ o $\frac{1}{2}m + 3m$

e) El 50 % del área de un terreno.

En esta situación tenemos que utilizar el significado del tanto por ciento. Como conoces el 50 % de un número equivale a calcular $\frac{50}{100}$ del número, lo que nos conduce, al simplificar la fracción, a calcular la mitad del número. Si el área del terreno la designamos por a, esta situación se traduce en el lenguaje de las variables por $\frac{a}{2}$ o $\frac{1}{2}a$.

f) La suma de dos números enteros consecutivos.

Para realizar la traducción del lenguaje común al algebraico debes tener en cuenta cuándo dos **números enteros** son **consecutivos**. Ya tú sabes que el conjunto de los números enteros no es denso, porque entre dos números enteros consecutivos no existe ningún otro número entero. Los números 8 y 9 son consecutivos, al igual que – 4 y – 3. Fíjate que los números consecutivos se diferencian en una unidad.

Si designamos por x un número entero, su sucesor es $x + 1$ entonces x y $x + 1$ son consecutivos y su suma la representamos por $x + (x + 1)$ o por $(x - 1) + x$.

g) La edad de Layzel excede en tres años a la edad de Sulma.

Observa que como la edad de Layzel excede en tres años a la edad de Sulma, Layzel es mayor que Sulma y se llevan tres años; luego, la diferencia de sus edades es 3, por lo que si designas por x la edad de Layzel y por y la edad de Sulma, esta situación de la vida la puedes expresar con variables como $x - y = 3$.

También la puedes escribir como $x - 3 = y$, ya que Layzel es mayor que Sulma y tiene tres años más que ella; luego, la edad de Sulma (y) es igual a la edad de Layzel (x) menos tres años.

O puedes traducirla como $y + 3 = x$, porque la edad de Layzel es igual a la de Sulma más tres años.

Fíjate que la diferencia entre el número mayor y el menor es igual al número que excede, que si al número mayor se le sustrae el número que excede, se obtiene el menor número y que si al menor número se le adiciona el número que excede, se obtiene el mayor.

Muchas de estas palabras claves son muy utilizadas en la vida diaria, por ejemplo la prensa en cualquiera de sus formatos muestra información en las que ellas aparecen. A continuación algunos ejemplos en los que te será fácil realizar la traducción correspondiente del lenguaje común al algebraico:

Reparación de ferrocarril duplica traslado de cargas. Fuente: *Granma* 9 de mayo de 2012	La compañía japonesa Toyota, principal fabricante de vehículos en el país, experimentó en el año 2011 una caída del 30,5 por ciento en sus beneficios. Fuente: *Orbe* 12 al 18 de mayo de 2012	La tasa de desempleo en Grecia durante el mes de marzo alcanzó el 21,9 % de la población activa. El cómputo oficial muestra que en un año esta tasa aumentó en un 6,2 %. Fuente: *Granma* 8 de junio de 2012

Recuerda que:

Al realizar traducciones del lenguaje común al de las variables debes leer detenidamente el texto que se va a traducir, identificar las palabras claves, buscar en el diccionario su significado de ser necesario, así como sinónimos que te ayuden a interpretar la situación que aparece en el texto y señalar el significado de las variables que emplearás en la traducción.

Igualmente debes aprender a realizar traducciones del lenguaje de las variables al lenguaje común.

Ejemplo 2:

Traduce al lenguaje común:

a) $4x$.

Como la variable no tiene asignado ningún significado específico, puedes hacer la traducción en dependencia del significado que le asignes.
Por ejemplo, en este caso, pudiera ser así:

- El cuádruplo de un número, la variable x significa el número.
- El perímetro de un cuadrado de lado x, la variable x representa la longitud del lado.
- Cuatro veces la cantidad de libretas entregadas a los estudiantes de séptimo grado, a la variable x se le asigna la cantidad de libretas entregadas.

b) $\frac{2}{5}m$

En este caso se puede traducir al lenguaje común como:

- Las dos quintas partes de un número, donde la variable m significa un número.
- El 40 % de la matrícula de una secundaria básica participa en las Olimpiadas Populares de Matemática, m significa la matrícula de la secundaria básica. Nota que la fracción $\frac{2}{5}$ se ha expresado como tanto por ciento.

c) $2a + 2b$

Algunas variantes de traducción al lenguaje común pueden ser:

- El perímetro de un paralelogramo, donde a las variables a y b se les ha asignado la longitud de los lados del paralelogramo.
- La suma de los duplos de los números a y b.

d) $\frac{m+n}{2}$

La traducción puede quedar así:

- El promedio de las notas en las asignaturas de Matemática y Español de Pedro, donde las variables m y n representan las notas obtenidas por él, en estas asignaturas.
- La longitud de la paralela media de un trapecio, donde m y n son las longitudes de las bases del trapecio.
- El 50 % de la cantidad de sacos de papa recogidos por dos brigadas, designando por m y n la cantidad de sacos de papa recogidos por cada brigada.

Al traducir del lenguaje común al algebraico utilizas números y variables relacionadas con las operaciones que ya conoces.

Una variable o combinaciones de variables y números por una o varias operaciones suelen llamarse **expresiones algebraicas**. Luego, p; $-7t$; $2x + 3$; $a^2b - 2b$; $\frac{2}{3}m^5 + 0{,}9m^3 - 0{,}25m^2$; $r - 3n^2m$; $\frac{2xy}{3z}$; $\frac{1}{3}\sqrt{x+5}$ son ejemplos de expresiones algebraicas.

Ahora seguirás adentrándote en el Álgebra en la que continuarás utilizando las expresiones algebraicas.

3.1.1 Monomio. Valor numérico. Aplicaciones

¡! En la secundaria básica de Amanda todos los estudiantes y profesores se han empeñado en perfeccionar el uso de la Lengua Materna, realizando diferentes actividades para eliminar las faltas de ortografía. Su profesora le explicó que guiándose por la expresión algebraica $0{,}25x$ puede conocer la cantidad de puntos que pierde en una evaluación escrita por errores ortográficos. Amanda reconoció que en esta expresión aparece un número multiplicado por una variable y se percató una vez más del uso de las variables.

Definición:

> Se denomina monomio a un número, una variable o cualquier combinación de números y variables relacionados por las operaciones de multiplicación y potenciación, en la que las variables solo están elevadas a un exponente natural.

Son ejemplos de monomios: -2; $0{,}7$; m^5; p; $-7t$; $4n$; $\frac{2}{3}y^3$; $1{,}2a^2b$; $0{,}25x$.

Fíjate que $2x + 3$; $\frac{a+b}{2}$; $3(x-4)$; $\frac{1}{3}\sqrt{x+5}$; $3x^{-2}y$; $\frac{2xy}{3z}$; no son monomios, pues los números y variables en estos casos están relacionados con otras operaciones que no son las que aparecen en la definición. Observa que en los dos últimos casos aparece una variable en el denominador, fíjate que en $3x^{-2}y$ la variable x está elevada a un exponente que no es un número natural; luego, $3x^{-2}y = 3\left(\frac{1}{x}\right)^2 y = \frac{3y}{x^2}$. A las expresiones algebraicas en las que las variables aparecen en el denominador se les denomina **fracciones algebraicas**.

En un monomio podemos distinguir dos partes:

- **la numérica,** que recibe el nombre de **coeficiente**, y es el factor numérico que interviene en el monomio, que por lo general se coloca al principio.

Fíjate que en los monomios mostrados como ejemplos el coeficiente se ha destacado en negrita para que lo puedas identificar mejor:

$-\mathbf{2}$; $\mathbf{0{,}7}$; m^5; $4n$; $\mathbf{\frac{2}{3}}y^3$; $\mathbf{1{,}2}a^2b$; $\mathbf{0{,}25}x$

Observa que el monomio m^5 tiene coeficiente 1 y no se acostumbra a escribir.

- **la parte literal,** que es la parte formada por las variables.

Luego, en los monomios mostrados como ejemplo la parte literal la destacamos en negrita para que fácilmente la puedas identificar:

$4\boldsymbol{x}$; $\frac{2}{3}\boldsymbol{y}^3$; $1{,}2\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}$; $0{,}25\boldsymbol{x}$

Observa que los monomios -2 y $0{,}7$ **no tienen parte literal.**
A los monomios y fracciones algebraicas también se acostumbra a denominarlos **términos.**

Ejemplo 1:

En cada uno de los siguientes monomios escribe su coeficiente y su parte literal.

a) $\frac{4}{7}$ este monomio no tiene parte literal y su coeficiente es $\frac{4}{7}$.

b) $0{,}25x$ en este caso el coeficiente es $0{,}25$ y la parte literal es x.

c) $2pq$ aquí el coeficiente es 2 y la parte literal es pq.

d) $-5x^2y^3$ tiene coeficiente -5 y la parte literal es x^2y^3.

e) $-m^2n$ coeficiente: -1 y la parte literal: m^2n.

f) $\frac{n}{9}$ coeficiente: $\frac{1}{9}$ y la parte literal: n.

Nota que el cociente $\frac{n}{9}$ también puede expresarse como $\frac{1}{9}n$.

g) $2^{-3}abc$ coeficiente: $2^{-3} = \frac{1}{8}$ y parte literal: abc.

R¡! Ya Amanda sabe que la expresión para calcular la cantidad de puntos que se pierde en una evaluación escrita por ortografía es un monomio.

¡! Para conocer la cantidad de puntos perdidos por este concepto tiene que sustituir la variable x por números (la cantidad de errores cometidos) en el término $0{,}25x$, efectuar la multiplicación y obtener un número, que es la cantidad de puntos de menos que tiene en la evaluación. En el trabajo práctico de Geografía la profesora de Amanda le señaló 4 errores ortográficos; luego, al sustituir la variable x por 4 en el término $0{,}25x$ obtuvo $0{,}25 \cdot 4 = 1$, lo que significa que Amanda en este trabajo práctico perdió un punto por ortografía.

Definición:

> Se denomina **valor numérico de un término** al número que se obtiene cuando se sustituyen las variables del término por números y se efectúan las operaciones indicadas.

R ¡! Fíjate que la cantidad de puntos que perdió Amanda por ortografía es el valor numérico del término $0{,}25x$ para el valor que se le asignó a la variable x.

Ejemplo 2:

Calcula, si es posible, el valor numérico de los términos siguientes para los valores que se indican a las variables:

a) $-4x$ para $x = -\frac{1}{4}$

Sustituyes x por $-\frac{1}{4}$ y efectúas la operación indicada para determinar el valor numérico del término:

$-4(-\frac{1}{4}) = 1$ (en este caso la sustitución debe realizarse utilizando el paréntesis, ya que el valor de x es negativo)

b) $2y^2z^3$ para $y = 0{,}5$; $z = -1$

Sustituyendo los valores de cada variable se obtiene:

$2 \cdot (0{,}5)^2 \cdot (-1)^3 = 2 \cdot 0{,}25 \cdot (-1) = -0{,}5$

Observa que el valor asignado a la variable y es un número positivo, aquí no es obligatorio el uso de paréntesis como en el caso del valor de z, que es un número negativo.

c) $-mn^2$ para $m = \dfrac{1}{3}$; $n = -3$

En este inciso el coeficiente del término es – 1 y solamente se escribe el signo.

$$-\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (-3)^2 = -\frac{1}{3} \cdot 9 = -3$$

d) $\dfrac{x}{3z}$ para $x = 0{,}7$; $z = 0$

Sustituyendo se obtiene $\dfrac{0{,}7}{3 \cdot 0}$, el denominador se hace cero y tú conoces que **no se puede dividir por cero**, pues la división por cero es indeterminada, ya que cualquier número multiplicado por cero es cero; luego, no se puede determinar el valor numérico de este término.

Recuerda que:

No se puede calcular el valor numérico de un término si el denominador se anula, o sea, si se hace cero cuando se sustituyen las variables que aparecen en él por sus valores respectivos.

¡! Ya conoces del capítulo anterior cómo determinar el área de figuras compuestas. Por ejemplo, la figura 3.5 está conformada por dos rectángulos iguales *ABCD* y *EFGH*, donde *M* y *N* son los puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente.

Se conoce que el área sombreada es igual a 42 cm² y se quiere determinar el área de la figura *ANEFGMCD*.

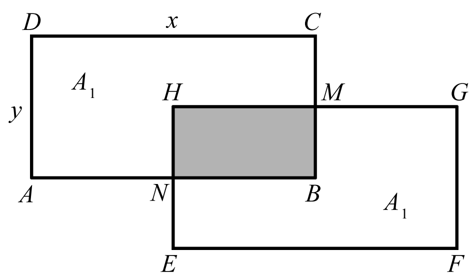


Figura 3.5

Si $A_1 = A_{ABCD} = A_{EFGH}$ y $A_2 = A_{NBMH}$ entonces:

$$A_{ANEFGMCD} = A_1 + A_1 - A_2$$
$$= 2A_1 - A_2$$

Asignando a la variable x la longitud del lado $\overline{DC}$ y a la variable y la longitud del lado $\overline{DA}$, entonces escribimos:

$A_{ANEFGMCD} = 2xy - 42$

Fíjate que hemos expresado el área de la figura 3.4 como la suma algebraica de dos monomios.

Definición:

> Se denomina **polinomio** a la suma algebraica de dos o más monomios.

R ¡! Luego, $2xy - 42$ es un polinomio. Otros ejemplos de polinomios son: $x^2 + 4x - 3$; $2ab + 2ah + 2bh$; $5x^5 - 4{,}5x^3 + 0{,}03x^2 - 1$; $2m^3 - m^2n + mn^2 - 5n^3$.

¡! Anabel sueña con tener un *peso ideal.* Ella conoce que la expresión algebraica $0{,}75t - 62{,}5$ permite hallarlo, para una estatura mayor que 150 cm, siendo t la talla en centímetros. Ya sabe que esta expresión es un polinomio y que para poder comparar su peso real con el ideal, tiene que sustituir la variable t por su talla (en centímetro), efectuar la multiplicación y después la sustracción, el número que obtiene es su *peso ideal.*

> Para calcular el **valor numérico de un polinomio** se sustituyen las variables por los valores asignados y se efectúan las operaciones indicadas, teniendo en cuenta el orden operacional.

R ¡! Fíjate que para saber su *peso ideal,* Anabel lo que tiene que calcular es el valor numérico del polinomio $0{,}75t - 62{,}5$ para el valor de la variable t igual a su talla en centímetro.

Ejemplo 3:

Calcula el valor numérico de los polinomios siguientes para los valores que se asignan a las variables:

a) $0{,}75t - 62{,}5$ para $t = 167$

Sustituyes la variable t por el valor indicado y calculas:

$0{,}75 \cdot 167 - 62{,}5 = 125{,}25 - 62{,}5 = 62{,}75$

b) $-5x + 2y$ para $x = -2$; $y = 0{,}5$

Sustituyes las variables por su valor y calculas:

$-5(-2) + 2 \cdot 0{,}5 = 10 + 1 = 11$ (Recuerda que primero se realiza la multiplicación)

c) $m^2n - \frac{1}{4}$ para $m = 1\frac{1}{2}$; $n = -1$

Al sustituir los valores de m y n utilizamos los paréntesis para evitar confusión:

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 (-1) - \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \cdot (-1) - \frac{1}{4} = -\frac{9}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$$

d) $2a^3 - 2b + 5$ para $a = -2$; $b = -\frac{3}{4}$

Aquí se introducen los paréntesis porque los valores son negativos, calculamos la potencia; luego, los productos y finalmente la suma algebraica.

$$2(-2)^3 - 2(-\frac{3}{4}) + 5 = 2(-8) - 2(-\frac{3}{4}) + 5 = -16 + \frac{3}{2} + 5 = -9{,}5$$

Como $\frac{3}{2} = 1{,}5$, el cálculo se puede realizar utilizando la fracción o la expresión decimal.

Ejercicios

1. Indica en cada caso el coeficiente y la parte literal de los siguientes términos:

a) $2x$ b) $\frac{1}{3}ab$ c) $-0{,}7m^2$ d) $\frac{2}{5}p^3q^2$ e) $\frac{3x}{7}$

f) y^2z g) $-\frac{n}{2}$ h) $\frac{a^3b^2c}{5}$ i) -7 j) $\frac{1}{6}$

2. Escribe en cada inciso tres monomios que su coeficiente es:

a) Un número natural y tiene una variable en su parte literal.
b) Un número entero negativo y tiene dos variables en su parte literal.
c) Uno y tiene una variable elevada al cubo en su parte literal.
d) Una fracción y no tiene parte literal.
e) Igual a cinco décimas y tiene dos variables en su parte literal, relacionadas por la operación de multiplicación.
f) Un número primo y su parte literal consta de tres variables elevadas a diferentes exponentes.

3. Representa mediante expresiones algebraicas las situaciones matemáticas siguientes:

a) El triplo de un número.
b) La tercera parte de un número.

c) Cinco veces un número.
d) El 35 % de un número.
e) Las dos terceras partes de un número.
f) La mitad de un número aumentada en 4.
g) El cuádruplo de un número disminuido en 8.
h) Un número que excede en 6 a otro.
i) Un número disminuido en su octava parte.
j) Dos números naturales consecutivos.
k) Dos números enteros pares consecutivos.
l) Dos números naturales impares consecutivos.
m) La suma de un número natural y su antecesor.
n) El producto de un número natural y su sucesor.
ñ) El duplo de un número disminuido en su mitad y aumentado en el triplo de otro número.
o) El 75 % de la mitad de un número.

4. En cada uno de los siguientes incisos selecciona, marcando con una X, la expresión algebraica correcta que refleja la situación planteada:

a) La expresión que representa dos unidades menos que x es:

___ $2x$ ___ $x - 2$ ___ $x + 2$ ___ $2 - x$ ___ x^2

b) El 25 % del doble de un número p se puede expresar como:

___ $50p$ ___ $25p$ ___ $\frac{1}{4}p$ ___ $\frac{1}{2}p$ ___otra

c) Emilio tiene n cm de estatura y su papá tiene el doble de la estatura de su hijo aumentada en 6 cm. El padre de Emilio mide:

___ $2n$ cm ___ $(2n + 6)$ cm ___ n cm ___ $(n + 6)$ cm

d) Alex y su primo Kevin coleccionan monedas. Alex tiene t monedas y su primo tres veces la cantidad de monedas de Alex disminuida en dos. La cantidad de monedas del primo de Alex es:

___ $t + 3$ ___ $3t$ ___ $\frac{t}{3} - 2$ ___ $3t - 2$

e) Los trabajadores de un centro turístico donaron este año a la sala pediátrica de un hospital 25 juguetes más que el año anterior. Si denotamos por la variable p la cantidad de juguetes donados por estos trabajadores del Turismo el año anterior, entonces la cantidad de juguetes aportados este año se expresa como:

___ $p + 25$ ___ $25 - p$ ___ $p - 25$ ___ $\frac{p}{25}$ ___ $25p$

5. Si denotamos por *a* la edad de Sergio, expresa algebraicamente las siguientes situaciones:

   a) La edad que tendrá Sergio dentro de 15 años.
   b) La edad que tenía Sergio el año pasado.
   c) Los años que le faltan a Sergio para que se jubile a los 65 años.
   d) La edad que tendrá Sergio cuando haya vivido otro tanto de lo vivido hasta ahora.
   e) La edad que tendrá Sergio en el año 2020.

6. La tabla 3.1 muestra el valor unitario en CUC de las piezas que componen el uniforme escolar de la Educación Secundaria Básica,[92] esta te hará pensar en la necesidad de cuidarlo, cuidado que, aunque no lo creas comienza con su uso correcto.

Tabla 3.1

Tipo de centro	**Camisa**		**Blusa**		**Pantalón**	
	nov. 2005	2011	nov. 2005	2011	nov. 2005	2011
ESBU	0,95	4,83	0,85	4,26	2,09	8,19
ESBEC	1,10	3,55	0,92	3,96	2,17	7,97

Clasifica las proposiciones siguientes en verdaderas (V) o falsas (F). Escribe V o F en la línea dada. De las que consideres falsas, justifica por qué lo son.

___ El precio de cada pieza aumentó de noviembre de 2005 al 2011.

___ La pieza que más variación de precio tuvo fue el pantalón de ESBU.

___ Del precio del pantalón de ESBEC se puede afirmar que: El cuádruplo de su precio en noviembre de 2005 excede en 0,81 CUC al precio de 2011.

___ El precio de la camisa de ESBU en el 2011 sobrepasa en 0,08 CUC al cuádruplo del precio en noviembre de 2005.

___ Con el 25 % del precio en el 2011 de una blusa de ESBEC se podía comprar dos blusas en noviembre de 2005.

7. Escribe en el lenguaje de las variables las siguientes situaciones prácticas señalando en cada caso el significado de la variable utilizada:

   a) La décima parte de los jóvenes de la enseñanza secundaria fuman activamente.[93]

[92] Orientaciones para fortalecer el control de los recursos materiales y financieros en el sistema educacional, noviembre de 2005.
Rolando Luis Peraza y otros: *Fortalecimiento de la cultura económica general de los educandos,* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2011.

[93] Órgano de prensa *Granma,* 20 de junio de 2012.

b) El 65 % de los integrantes de la delegación cubana que asistió a los Juegos Panamericanos de Guadalajara 2011, participó por vez primera en este tipo de evento.
c) En los países pobres la mortalidad infantil en menores de un año es dos veces superior que en los países ricos.
d) El 85 % de la población mundial lo constituyen los países pobres.
e) La cosecha de papa en una empresa este año fue superior en 200 t a la del año anterior.
f) Félix Andrés aumentó su peso en un 5 % con respecto al mes anterior.
g) El precio de un artículo en el mercado disminuyó en un 10 %.
h) El precio de varias libras de tomate que se venden a $ 2,50 la libra.
i) El perímetro de un cuadrado.
j) El área de un rectángulo cuyo largo es el doble de su ancho.
k) La amplitud de un ángulo adyacente a otro ángulo.

8. Determina el conjunto numérico más restringido al que pertenece el valor numérico de $4x^2y$ para los siguientes valores de las variables:

a) $x = -1;\ y = \frac{1}{2}$ b) $x = \frac{1}{2};\ y = -1$

c) $x = \frac{1}{2};\ y = 1$ d) $x = -1;\ y = -1$

9. Halla, si existe, el valor numérico de las siguientes expresiones para los valores de las variables que se indican. De no existir, argumenta el porqué.

a) $-0{,}4mn^3$ para $m = -5;\ n = -1$ b) $\frac{5}{4}ab^{-1}$ para $a = 0{,}2\ ;\ b = \frac{1}{4}$

c) $2x + y$ para $x = -2{,}5;\ y = 4{,}3$ d) $\frac{c}{4} - 3d$ para $c = 2;\ d = -\frac{2}{3}$

e) $2p - r^2$ para $p = -\frac{1}{4};\ r = -1$ f) $3ab + c - 1$ para $a = \frac{2}{3};\ b = -2\ ;\ c = 0{,}1$

g) $\frac{3x - y}{4 - 2z}$ para $x = \frac{1}{3};\ y = 5;\ z = 2$ h) $\frac{a^2 - 2bc}{4}$ para $a = 4;\ b = -1;\ c = -8$

i) $x^2y^{-2} - 3$ para $x = 1;\ y = 0$ j) $\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 9$ para $m = -\frac{2}{3};\ n = \frac{2}{9}$

k) $\frac{a}{3b} - \frac{c}{d}$ para $a = 4;\ b = -1;\ c = \frac{2}{3};\ d = -2$

10. a) Haz una tabla y calcula el valor numérico del término $4x$ para $x = -1$, $x = 0$, $x = \frac{1}{3}$, $x = 0{,}4$ y $x = 1$.

b) Haz una tabla y calcula el valor numérico del término $6x - 2$ para $x = -1$, $x = 0$, $x = \frac{1}{3}$, $x = 0{,}4$ y $x = 1$.

c) Extrae conclusiones.

11. Calcula el valor numérico de $a - b \cdot c$ y $(a - b) \cdot c$ para $a = 2$, $b = -\frac{1}{2}$ y $c = 4$.

Compara los valores numéricos de dichos términos y extrae conclusiones del resultado obtenido.

12. Marca con una X la respuesta correcta.

a) El valor numérico del polinomio $a^2 - ab - b^2$ para a = 2 y $b = -1$ es:

___ 7 ___ 6 ___ 5 ___ 3 ___ 1

b) Si $n = -2^0$, entonces el valor numérico del polinomio $n^3 - 2n^2 - n$ es:

___ – 4 ___ – 2 ___ 0 ___ 2 ___ 4

c) Si $a = 8$ y $b = \frac{5a}{2}$, entonces el valor numérico de $8a - 3b + 1$ es igual a:

___ 5 ___ 14,5 ___ 21 ___ – 3,5 ___ – 5

d) El valor numérico de $n + n^n + n^{n+1}$ para $n = \frac{4^0}{2^{-1}}$ es:

___ 10 ___ 12 ___ 14 ___ 36 ___ 64

e) Si $a = -\frac{2}{3}$, la fracción algebraica $\dfrac{1-\frac{a}{3}}{\frac{a}{3}-1}$ tiene como valor:

___ $-\frac{7}{3}$ ___ 1 ___ $-\frac{7}{3}$ ___ – 1 ___ Ninguno de ellos

f) La fracción algebraica $\dfrac{2n}{3n+7}$, cuando $n = \sqrt[3]{-125}$, toma valor numérico igual a:

___ $\dfrac{5}{4}$ ___ $-\dfrac{5}{4}$ ___ $\dfrac{5}{11}$ ___ $-\dfrac{3}{5}$ ___ $\dfrac{1}{5}$

13. Completa la tabla 3.2:

Tabla 3.2

Situación matemática	**Expresión algebraica en función de la variable *x***	**Valor numérico de la expresión para $x = -2$**
El triplo de un número aumentado en 7	$3x+7$	
	$\dfrac{2x}{5}$	
El 20 % de un número disminuido en 5		
	$\dfrac{x}{6}+2x$	
La suma de un número natural y su sucesor		

14. Expresa algebraicamente, colocando el resultado en cada cuadradito, las sucesivas transformaciones y modificaciones de un número x al pasar por la siguiente máquina de cálculo:

$$\boxed{x} \xrightarrow{\cdot\, 4} \boxed{} \xrightarrow{+6} \boxed{} \xrightarrow{:\, 2} \boxed{} \xrightarrow{-\,1} \boxed{}$$

15. Comprueba que estas dos máquinas son equivalentes. Es decir, si en ambas entra un mismo número, ambas entregan el mismo resultado.

$$\boxed{x} \xrightarrow{\cdot\, 2} \boxed{} \xrightarrow{:\, 3} \boxed{} \xrightarrow{+1} \boxed{}$$

$$\boxed{x} \xrightarrow{\cdot\, 2} \boxed{} \xrightarrow{+3} \boxed{} \xrightarrow{:\, 3} \boxed{}$$

16. El peso ideal de una persona depende de la talla, esta es una de las fórmulas que nos permite calcularlo:

    $p = 0{,}75t - 62{,}5$ p: peso ideal, en kilogramo

    t: talla, en centímetro

    Calcula tu peso ideal y determina en qué porcentaje es superior o inferior al que tienes ahora.

17. Hay países como los Estados Unidos y Canadá en los que la temperatura se mide en grados Fahrenheit (°F) y no en grados Celsius (°C) como en nuestro país. La expresión $\frac{5}{9}\mathrm{F} - \frac{160}{9}$, nos permite convertir cualquier temperatura expresada en grados Fahrenheit (°F) a grados Celsius (°C), donde F es el valor de la temperatura en grados Fahrenheit. Estando compitiendo en Canadá a un deportista cubano se le realizó un chequeo médico antes de competir, y se le informó que tenía 97,7 °F de temperatura. ¿Tendrá fiebre nuestro atleta?

18. Se suele utilizar el índice de masa corporal (IMC) para determinar si existe o no un exceso de peso. Este índice es el cociente entre el peso (p), expresado en kilogramo y el cuadrado de la altura (h) de la persona, expresada en metro.

    a) Escribe la expresión que determina el IMC utilizando las variables.
    b) Sabiendo que se considera sobrepeso una cifra del IMC por encima de los 25 kg/m^2 y se hablaría de obesidad cuando el IMC estuviera por encima de los 30 kg/m^2, calcula tu IMC y valora el resultado obtenido.

3.2 Operaciones con monomios y polinomios

3.2.1 Términos semejantes. Reducción de términos semejantes

¡! Lee detenidamente el siguiente problema:

Como parte de las medidas de ahorro de la energía eléctrica <u>Ernesto y Ana visitaron las 21 casas</u> de su cuadra para recordarles a sus vecinos apagar las luces innecesarias. <u>Ernesto visitó el duplo de la cantidad de casas que Ana</u>. ¿Cuántas casas visitó cada uno?

Observa que en el texto del problema aparecen en el lenguaje común relaciones entre la cantidad de casas visitadas por cada uno de ellos, por lo que utilizando las variables podemos expresar estas relaciones.

Si a la variable x le asignamos el significado de la cantidad de casas visitadas por Ana, entonces la cantidad de casas visitadas por Ernesto la podemos representar por $2x$; luego, como entre ambos visitaron 21 casas, obtenemos la ecuación $x + 2x = 21$.

Ya has resuelto en sexto grado ecuaciones como esta y para ello operaste con los términos con variables como si fueran números, fíjate que estos términos de la ecuación en los que aparece la variable x tienen **la misma parte literal**.

En el epígrafe anterior aprendiste lo que es un monomio y cuál es su composición. Observa los siguientes monomios:

$5a$; $2a^2$; $-3{,}5a^3$; $\frac{2}{3}a$; a^2b; $-a$; $0{,}7a^2$; $3ab^2$

¿Qué característica tienen en común el primero, el cuarto y el sexto monomios?

Seguramente notarás que tienen **la misma parte literal**, lo mismo pasa con el segundo y el séptimo monomio. A estos monomios se les llama **términos semejantes**.

Dos o más monomios son semejantes si tienen la misma parte literal.

R ¡! Luego, los monomios x y $2x$ de la ecuación planteada son **términos semejantes.**

Son además ejemplos de términos semejantes:

$3mn$; $-2mn$; $\frac{3}{8}mn$

$\frac{1}{5}p^3$; p^3; $0{,}7p^3$; $-3p^3$

a^4b^2c; $\frac{a^4b^2c}{3}$

$0{,}6xy^2z$; $7y^2xz$; $-3zy^2x$

Nota que en ninguno de los casos importa el coeficiente y en el último ejemplo, aunque las variables no aparecen en el mismo orden, tienen la misma parte literal y, por tanto, los términos son semejantes.

Ejemplo 1:

Señala cuáles de los siguientes términos son semejantes:

a) $2{,}7$; $0{,}3x$; 5; $2{,}1x$; $7{,}2x$; $8{,}9$

Los números $2{,}7$; 5; y $8{,}9$ son términos semejantes.
Los términos $0{,}3x$; $2{,}1x$; $7{,}2x$, como tienen la misma parte literal, son semejantes.

b) $7{,}2abc$; $9xy$; $-2{,}85abc$; $-11abc$; $0{,}63xy$; $\frac{1}{5}ab$

Son términos semejantes $7{,}2abc$; $-2{,}85abc$; $-11abc$ y los otros términos semejantes son $9xy$; $0{,}63xy$ porque tienen la misma parte literal.

c) $4{,}3\ m^3n$; $-8mn^2$; $\frac{3}{5}m^2n^2$; $-0{,}25mn$; $-m^3n^3$; $12mn^3$; $-\frac{8}{3}m^2n$

Aunque todos estos términos tienen las mismas variables *m* y *n,* nota que están elevadas a diferentes exponentes; luego, no tienen la misma parte literal, por lo tanto, en este caso no hay términos semejantes.

Reducción de términos semejantes

¡! Ya conoces que los números son términos y los podemos adicionar y sustraer. De manera general los términos semejantes se pueden expresar como un solo término, cuando están relacionados con operaciones de adición y sustracción.

Al resolver la ecuación $x + 2x = 21$ en grados anteriores obtenías la ecuación $3x = 21$, en este caso calculabas la suma de los términos semejantes x y $2x$ para determinar el valor de la variable x, que en este caso es $x = 7$.

Para **reducir términos semejantes** se halla la suma algebraica de sus coeficientes y se escribe la misma parte literal.

R ¡! Observa que para resolver la ecuación $x + 2x = 21$ reduces términos semejantes y resulta la ecuación $3x = 21$.

Ejemplo 2:

Reduce términos semejantes en los polinomios siguientes:

a) $-4x + 5y + 2{,}8x$

En este caso son semejantes el primer y el tercer término; para facilitar la reducción puedes, si lo deseas, señalarlos con rayitas, círculos, etcétera, y efectuar la suma algebraica de sus coeficientes.

$$\underline{-4x} + 5y + \underline{2{,}8x} = -1{,}2x + 5y$$

b) $\frac{1}{3}ab + 2ab - 3b + 2a - 2ab$

En este caso son semejantes el primero, segundo y quinto términos. Pero observa que el segundo y el quinto tienen coeficientes opuestos; luego, su suma es igual a cero; en estos casos se acostumbra a cancelar estos términos, quedando de esta manera:

$$\underline{\frac{1}{3}ab} + \underline{2\cancel{ab}} - 3b + 2a - \underline{\cancel{2}ab}$$

$$= \frac{1}{3}ab - 3b + 2a$$

c) $x^2y + 3xy^2 - 5x^2y + 2xy^2$

Aquí son semejantes el primer y el tercer términos, el segundo y cuarto, ya que aunque todos los términos tienen las mismas variables; debes fijarte en sus exponentes. Análogamente a los casos anteriores, después de identificar los términos semejantes, los reduces y escribes la respuesta.

$\underline{x^2y} + \underline{\underline{3xy^2}} - \underline{5x^2y} + \underline{\underline{2xy^2}}$

$= -4x^2y + 5xy^2$

d) $-1{,}5p^3q + p^3q + 7pq - 7qp$

Los dos primeros términos tienen igual parte literal, y los dos siguientes también, pues aunque las variables no están en el mismo orden, se consideran términos semejantes; puedes ordenarlas o simplemente calcular de esa manera.

$\boxed{-1{,}5p^3q} + \boxed{p^3q} + 7pq - 7qp$

$= -0{,}5p^3q$

Fíjate que en los dos últimos términos los coeficientes son números opuestos y conoces que la suma de dos números opuestos es igual a cero, por eso en la respuesta no quedan términos con parte literal *pq*.

Los polinomios se denominan según la cantidad de términos que tengan:

Binomio: Es la suma algebraica de dos monomios que no son semejantes.

Trinomio: Es la suma algebraica de tres monomios que no son semejantes.

Observa que los prefijos *bi* y *tri* indican la cantidad de términos en cada expresión. En el caso de que tengan más de tres monomios se denominan simplemente **polinomios**.

Luego $a + 3$; $2xy - 42$; $3x - x^2$; $25 - 4mn$ son binomios y $b^2 + 2b - 2$; $3x^3y^2 + 2x^2y - x$; $16m^2 + 24mn + 4n^2$ son trinomios.

Ejemplo 3:

Identifica cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son: monomios, binomios, trinomios y polinomios.

a) $\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}x - \frac{1}{7}x$

Observa que todos los términos que aparecen en la expresión son semejantes porque tienen la misma parte literal; luego, antes de clasificar la expresión debes reducir términos semejantes.

$\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}x - \frac{1}{7}x$

$= \frac{4}{7}x$ La expresión algebraica es un monomio

b) $-8{,}6m + 1{,}25mn + 4{,}36m$

$-\underline{8{,}6m} + 1{,}25mn + \underline{4{,}36m}$ Identificas los términos semejantes

$= 1{,}25mn - 4{,}24m$ Reduces términos semejantes

La expresión es un binomio.

c) $5x^3y^2z - 6 + 2x^3y^2z + xy^2z^3 - 11x^3y^2z + 9 + xy^2z^3$

$\underline{5x^3y^2z} - 6 + \underline{2x^3y^2z} + \underline{\underline{xy^2z^3}} - \underline{11x^3y^2z} + 9 + \underline{\underline{xy^2z^3}}$ Identificas los términos semejantes

$= -4x^3y^2z + 2xy^2z^3 + 3$ Reduces términos semejantes

La expresión es un trinomio.

d) $-ab + 5{,}3a - 2 + a^2b^2 + 8ab^2 + 2{,}7a - a^2b^2 - 3ab^2 + 3{,}42ab + 5{,}8a^2b^2 - 1{,}1a$

Identificas los términos semejantes

$= 6{,}9a + 2{,}42ab + 5ab^2 + 5{,}8\,a^2b^2 - 2$ Reduces términos semejantes

La expresión es un polinomio.

Diviértete con el Álgebra: con ayuda de las operaciones con variables puedes asombrar a tus amigos. Pide a uno de ellos que piense un número y después le haces las siguientes indicaciones:

a) multiplica el número pensado por 3,
b) súmale 10 al resultado,
c) réstale al resultado el doble del número pensado,
d) réstale al resultado 6
e) di el último número obtenido.

Ahora solo tienes que restar 4 al número que te diga y obtendrás el número pensado por tu amigo. ¿Sabes por qué?

Si expresamos algebraicamente el proceso quedaría: $3x + 10 - 2x - 6$. Al efectuar las operaciones indicadas se obtiene: $x + 4$, o sea, el número que tu amigo pensó aumentado en 4. Haciendo otras indicaciones podrás obtener otras expresiones más complejas que asombren más a tus amigos, inténtalo.

Ejercicios

1. Indica cuáles de los siguientes términos son semejantes:

a) x; $3xy$; $2x$; $-0{,}2x$

b) $1{,}2a$; $3a^2$; $9a$; $-5a^2$

c) $\frac{b}{3}$; $-2b^3$; $0{,}8b^3$; $3bc$

d) ab; $-ab$; $2a$; $3b$; $-\frac{4}{3}a$

e) $-\frac{2}{3}mn$; m^2n; $6nm$; mn^2

f) $3xyz$; $-3{,}4yz$; $2{,}5yzx$; xzy; $8xy$

g) $-\frac{a^2b}{4}$; ab^2; $5a^2b^2$; $8{,}82b^2a$; $8a^2b$

h) $4{,}5m^2n^3p^4$; $-\frac{1}{2}m^3n^2p^4$; $709n^3p^4m^2$; $\frac{7}{5}n^3m^2p^4$; $0{,}9m^2n^3$

2. Reduce los términos semejantes en:

a) $a + 3a$

b) $4b - 2b$

c) $2{,}4c + 1{,}2c$

d) $7{,}5d - \frac{d}{2}$

e) $\frac{2}{5}e + 0{,}2e - e$

f) $14f^2 + 26f^2 - 40f^2$

g) $2mn - 2{,}9mn + 7nm$

h) $5y - 4z + 0{,}7z - 8y + y$

i) $-3x^2y + \frac{4}{5}xy^2 - \frac{2}{3}x^2y + \frac{xy^2}{5}$

j) $5 - 2s + 0{,}5s - 2{,}4 + s^2$

k) $1{,}2p + 3{,}4q - 5pq + 0{,}8p - 3{,}5q$

l) $\frac{m}{5} + \frac{6}{5}n + \frac{3m}{4} - 3m - n$

m) $-5{,}3a + 3b - 7c + 2{,}5a + 1{,}7c - 8b + abc$

n) $4m^2n^3 + m^3n^3 - 4m^2n^3 + 3\frac{1}{2}n^3m^3$

ñ) $\frac{x^2y^3z}{4} + \frac{7}{4}x^2y^3z - 2xyz - 2x^2zy^3 + 1$

3. Completa la tabla 3.2:

A	B	C	$A + B$	$A - C$	$A + B - C$
$4a$	$7a$	$2a$			
$2a + 3b$	a	$3b$			
$\frac{1}{2}m + 2n - 3$	$-\frac{1}{4}m - n + 1$	$2n$			
$7x^2y + 2xy + 2$	$x^2y + 2xy$	$4yx$			

4. Dadas las siguientes expresiones algebraicas, clasifícalas en monomios, binomios o trinomios:

a) $3x + 3$　　b) $-6xy$　　c) $a^2 - 6a + 2$　　d) $\dfrac{5y}{7}$　　e) $5m - np$

f) $d^3 - \dfrac{d}{2}$　　g) 0,34　　h) $2x - 3y + 5z$　　i) $-0{,}5n$　　j) $\dfrac{3p-q}{3}$

k) $3xy^2 + 2x^2y$　　l) $ab - 2b + a$　　m) $2xy^2z^3$　　n) $\dfrac{p^5}{4}$

5. Enlaza la expresión literal de la columna *A* con la expresión algebraica que le corresponde en la columna *B*.

A

- Monomio con coeficiente entero y parte literal con dos variables.
- Trinomio donde los coeficientes de sus términos son números primos.
- Monomio de coeficiente uno.
- Monomio que no tiene parte literal.
- Binomio con un término elevado al cuadrado.
- Monomio cuyo coeficiente es un número fraccionario y su parte literal tiene dos variables.

B

$5x^2 - 3x + 7$

$-\dfrac{3}{5}x^2$

$-6ab^2$

$0{,}2mn$

$2y^2 - 3y + 39$

10

$z^2 + 15$

p^2q^3r

$2x - y$

3.2.2 Multiplicación de monomios y polinomios por un monomio

¡! En un organopónico, como se muestra en la figura 3.6, uno de los canteros dedicados al cultivo de la lechuga tiene el doble de largo que de ancho. Si queremos expresar el área de dicho terreno y designamos por x la longitud del lado menor tendríamos la expresión $A = 2x \cdot x$, es decir, la multiplicación de dos monomios.

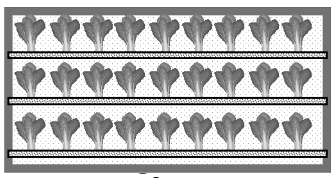


Figura 3.6

Para calcular el producto de monomios se multiplican: – sus coeficientes, – y sus partes literales.

Ejemplo 1:

Efectúa:

R ¡! a) $2x \cdot x$

Multiplicamos los coeficientes: $2 \cdot 1 = 2$

Multiplicamos la parte literal: $x \cdot x = x^2$

Aquí calculamos el producto de potencias de igual base, entonces: $2x \cdot x = 2x^2$.

Nota que el área del terreno rectangular se expresaría, entonces: $A = 2x^2$

b) $-3y^2 \cdot \frac{1}{3}y$

Multiplicamos los coeficientes: $-3 \cdot \frac{1}{3} = -1$

Multiplicamos la parte literal: $y^2 \cdot y = y^3$

En este caso calculamos el producto de potencias de igual base.

Entonces: $-3y^2 \cdot \frac{1}{3}y = -y^3$

c) $0{,}4m^2n^3 \cdot 5mn^5$

Multiplicamos los coeficientes: $0{,}4 \cdot 5 = 2$

Multiplicamos la parte literal: $m^2n^3 \cdot mn^5 = m^3n^8$

Aplicamos el producto de potencias de igual base para cada variable

Entonces: $0{,}4m^2n^3 \cdot 5mn^5 = 2\ m^3n^8$

d) $\frac{3}{5}pq \cdot \frac{50}{9}p^3$

Multiplicamos los coeficientes: $\frac{3}{5} \cdot \frac{50}{9} = \frac{10}{3}$

Multiplicamos la parte literal: $pq \cdot p^3 = p^4q$

Entonces: $\frac{3}{5}pq \cdot \frac{50}{9}p^3 = \frac{10}{3}p^4q$

Recuerda que:

- Para efectuar la multiplicación de monomios, se multiplican los coeficientes y también la parte literal, aplicando la propiedad *producto de potencias de igual base.*
- En la respuesta la parte literal debe quedar ordenada alfabéticamente.

Multiplicación de un polinomio por un monomio

¡! Ana tiene un jardín con forma cuadrada, pero quiere ampliarlo agregando un metro a cada uno de sus lados, como aparece en la figura 3.7. Para cercarlo necesita saber el perímetro del nuevo jardín. Si designamos por x la longitud del lado del jardín anterior, entonces la longitud del lado del jardín ampliado quedaría expresada por $(x + 1)$ y el perímetro por $P = 4(x + 1)$.

Nota que el perímetro está expresado como el producto del monomio 4 por el binomio $x + 1$.

Para multiplicar un monomio por un polinomio se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición:

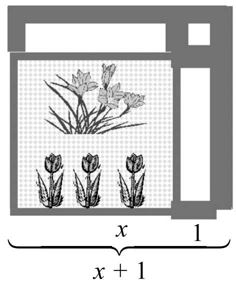


Figura 3.7

$a(b + c) = ab + ac$

Ejemplo 2:

Efectúa:

R ¡! a) $4(x + 1)$

$= 4 \cdot x + 4 \cdot 1$ (Observa que se multiplica el monomio que precede al paréntesis por cada término que se encuentra en su interior)

$= 4x + 4$ (En la práctica puedes escribir el resultado directo)

b) $-8y(y - 3) = -8y^2 + 24y$

Nota que después de aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, tienes que efectuar el producto de dos monomios y tener en cuenta, al multiplicar los coeficientes, la regla de los signos.

c) $\frac{1}{5}m^3n^2\,(5mn + 20m^2n^2)$

$= \frac{1}{5}m^3n^2 \cdot 5mn + \frac{1}{5}m^3n^2 \cdot 20m^2n^2$

$= m^4n^3 + 4m^5n^4$

Observa que para simplificar los coeficientes debes aplicar primeramente la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.

d) $-0{,}2a(-5a + 3a^2 + 7) = a^2 - 0{,}6a^3 - 1{,}4a$

$= -0{,}6a^3 + a^2 - 1{,}4a$

Nota que en la respuesta debes ordenar los términos por el exponente de la variable, de manera ascendente o descendente.

Recuerda que:

> Para calcular el producto de un monomio por un polinomio, se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

Ejercicios

1. Efectúa:

a) $2a \cdot a$ b) $4{,}5b \cdot 6b^3$ c) $\frac{2}{5}c^5 \cdot 10c^5$

d) $-3d^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}d\right)$ e) $2mn \cdot 5m^2n^3$ f) $(-4x^4y^6) \cdot (-\frac{1}{4}x^4y^6)$

g) $a^2b^3 \cdot (3a^3x)$ h) $\left(-\frac{4}{5}m^2\right)\left(-\frac{15}{16}m^3n^2\right)$ i) $x^4y^6z^2 \cdot (-y^3z^6x)$

2. Calcula:

a) $2(a-4)$ b) $b(b+3)$ c) $-5(c+10)$

d) $3d(d-6)$ e) $12e(\frac{e}{4} + \frac{2}{3})$ f) $-4d^2(0{,}5d^3 + 3d^5)$

g) $0{,}4p^2(1{,}5p^2 + 0{,}4p^5)$ h) $(2x^2y + 0{,}7xy^3)(-3xy)$ i) $\frac{4}{3}m^3n^5p(\frac{2}{3}m^2n^2p^2 - 6mpn^4)$

j) $4(x^2 + 2x + 1)$ k) $y(2y^3 - 3y^2 + 2)$ l) $-5(3m^2 - 0{,}4m + \frac{1}{5})$

m) $4p^3(p^2 + 0{,}5p - 2{,}5)$ n) $-\frac{2}{3}t\,(\frac{3}{8}t^5 - 6t^2 + 4{,}5t)$ ñ) $8{,}5e^2(e^2 + 2e + 1)$

o) $3x^5y(2xy - 4xy^3 + 5)$ p) $-4m^3x(m^4 - 3m^2 + 7n^4)$

q) $(x^3 - 4x^2y + 6xy^2)ax^3y$ r) $\left(\frac{3}{5}a - \frac{1}{6}t\right)\left(\frac{5}{3}at^2\right)$ s) $0{,}3pq(20pq^2 + 15q^3p^2)$

t) $-0{,}5a^3x^4y^3(0{,}4x^2 - \frac{1}{3}x^4y^2 + 0{,}1y^6)$ u) $\frac{2}{5}p^2q^3(\frac{5}{3}pq^2 + 15q - 12p)$

3.2.3 División de monomios y polinomios por un monomio

¡! Ya conoces la fórmula del área de un triángulo; luego, para calcular el área de un triángulo, cuya altura relativa a la base de longitud *a,* es 12 cm, escribimos $A = \frac{12a}{2}$ cm^2.

Nota que el área se ha expresado como el cociente del monomio $12a$ por el monomio 2.

> Para calcular el cociente de monomios dividimos:
>
> – los coeficientes,
> – y la parte literal.

Ejemplo 1:

Efectúa:

R ¡! a) $\frac{12a}{2} = 6a$

Dividimos 12 : 2 = 6 y se mantiene la variable *a*, ya que en el denominador no hay parte literal.

b) $\frac{7m^2n^3}{14mn}$

Dividimos los coeficientes: $7 : 14 = \frac{1}{2}$

Dividimos la parte literal: $\frac{m^2n^3}{mn} = m^{2-1}n^{3-1} = mn^2$

Nota que para realizar la división de la parte literal aplicamos la propiedad del cociente de potencias de igual base.

Entonces $\frac{7m^2n^3}{14mn} = \frac{1}{2}mn^2$

c) $\frac{300x^5y^8}{10x^5y^7}$

Dividimos los coeficientes: $300 : 10 = 30$

Dividimos la parte literal: $\dfrac{x^5y^8}{x^5y^7} = x^{5-5}y^{8\text{-}7} = y$

Observa que aplicamos, para realizar la división de la parte literal, la propiedad del cociente de potencias de igual base y que no aparece en el resultado la variable x en la parte literal, pues $x^0 = 1$; si $x \neq 0$.

Entonces $\dfrac{300x^5y^8}{10x^5y^7} = 30y$

d) $-\dfrac{25b}{10b} = -2{,}5$ (En este caso como las partes literales son iguales, se simplifican)

e) $\dfrac{36p^3}{9p^4}$

Dividimos los coeficientes: 36 : 9 = 4

Dividimos la parte literal: $\dfrac{p^3}{p^4} = p^{3\text{ -}4} = p^{\text{-}1} = \dfrac{1}{p}$

Observa que el exponente del numerador es menor que el exponente del denominador, por lo que en el cociente el exponente de la parte literal queda negativo. Es por eso que la parte literal queda en el denominador, aplicando la definición de potencia de exponente negativo.

Entonces $\dfrac{36p^3}{9p^4} = \dfrac{4}{p}$

Fíjate que en este caso el resultado de dividir dos monomios es una fracción algebraica.

f) $\dfrac{7r^2s^3t^2}{21r^2s^5t^8}$

Dividimos los coeficientes: 7 : 21= $\dfrac{1}{3}$

Dividimos la parte literal: $\dfrac{r^2s^3t^2}{r^2s^5t^8} = r^{2-2}s^{3-5}t^{2-8} = s^{-2}t^{-6} = \dfrac{1}{s^2t^6}$

Entonces $\dfrac{7r^2s^3t^2}{21r^2s^5t^8} = \dfrac{1}{3s^2t^6}$

Observa que al igual que en el inciso anterior el resultado de la división es una fracción algebraica.

División de un polinomio por un monomio

¡! En el capítulo anterior estudiaste las figuras planas y entre ellas el trapecio. Conoces que para determinar la longitud de la paralela media de un trapecio utilizas la expresión $\dfrac{a+b}{2}$, donde a y b son las longitudes de sus bases. Observa que se ha expresado la longitud de la paralela media como el cociente del binomio $a + b$ por el monomio 2. Ya sabes dividir dos monomios, ahora tendrás que dividir polinomios por un monomio.

Para calcular el cociente de un polinomio por un monomio, se divide cada término del polinomio por dicho monomio.

Ejemplo 2:

Efectúa:

a) $\dfrac{15a+30}{5}$

$= \dfrac{15a}{5} + \dfrac{30}{5}$ (Dividiendo cada término del polinomio por 5)

$= 3a + 6$ (Efectuando la división de dos monomios)

b) $\dfrac{2b^4-7b^3}{b^3}$

$= \dfrac{2b^4}{b^3} - \dfrac{7b^3}{b^3}$ (Dividiendo cada término del polinomio por b^3)

$= 2b - 7$ (Efectuando la división de dos monomios)

c) $\dfrac{64m^6n^4 + 16mn^3 + 4mn}{8mn}$

$= \dfrac{64m^6n^4}{8mn} + \dfrac{16mn^3}{8mn} + \dfrac{4mn}{8mn}$ (Dividiendo cada término del polinomio por $8mn$)

$= 8m^5n^3 + 2n^2 + \dfrac{1}{2}$ (Efectuando la división de dos monomios)

Observa en este último caso que el segundo término queda con una sola variable en la parte literal, y en el último término al dividir los coeficientes y la parte literal, queda solo el coeficiente.

d) $\dfrac{x^2y^5 + 5x^3y^2 + 10x^4y^7}{10x^3y^7}$

$= \dfrac{x^2y^5}{10x^3y^7} + \dfrac{5x^3y^2}{10x^3y^7} + \dfrac{10x^4y^7}{10x^3y^7}$ (Dividiendo cada término del polinomio por $10x^3y^7$)

$= \dfrac{1}{10xy^2} + \dfrac{1}{2y^5} + x$ (Efectuando la división de dos monomios)

Observa que el resultado de esta división no es un polinomio.

Ejercicios

1. Calcula:

a) $\dfrac{15a}{3a}$ b) $\dfrac{-4b}{2b}$ c) $\dfrac{-64c}{-8c}$ d) $\dfrac{3{,}3ab}{3ba}$ e) $\dfrac{-24m^4n^5}{12m^3n^2}$

f) $14a^3b^4 : (-7a^2b^3)$ g) $5x^3y^6z^9 : 15x^3y^5z$ h) $\dfrac{2}{3}m^{12}n^{20} : \dfrac{4}{21}m^{10}n^{19}$

i) $(-\dfrac{7}{5}r^2t^3q^5) : \dfrac{1}{25}t^3rq^2$ j) $\dfrac{\frac{2}{9}m^{30}n^{15}p^9}{-\frac{8}{27}m^{28}n^{14}p^7}$ *k) $\dfrac{35a^7b^6}{7a^7b^7}$

*l) $1000m^{100}n^{20} : (-25m^{99}n^{22})$

2. Calcula:

a) $\dfrac{6a+2b}{3}$ b) $\dfrac{12m^3+24m^5}{6m}$ c) $\dfrac{2{,}5pq^7-2p^2q}{0{,}5pq}$ d) $\dfrac{3a^5b^{10}+9a^{12}b^6}{27a^5b^5}$

e) $\dfrac{15x^7-25x^8+35x^{10}}{5x^7}$ f) $\dfrac{4m^5+8m^6-m^9}{2m^3}$ g) $\dfrac{\frac{2}{3}p^{12}+\frac{5}{3}p^{10}-\frac{1}{9}p^{14}}{\frac{1}{6}p^{14}}$

h) $\dfrac{a^2b^2+ab^2-a^2b}{ab}$ i) $\dfrac{-36s^5t^{14}-12t^{20}s^{32}}{-6s^4t^{14}}$

j) $\dfrac{32mn^2p+16m^2np-mnp^2+4mp}{8mnp}$ k) $\dfrac{4a^8b+3b^9}{12ab^2}$ l) $\dfrac{8xy^3z^3+3x^6y^{16}z^5}{x^4y^2z^3}$

m) $(55x^2y-121x^3y^2+132xy^2):11xy$ n) $(mn^2p+m^2np-mnp^2+4mnp):8mpn$

ñ) $\dfrac{\frac{4}{7}a^8+\frac{3}{7}b^8}{\frac{7}{12}ab}$ o) $\dfrac{2{,}4x^5y^5z^6+0{,}9x^{10}y^{18}z^8}{0{,}3x^8z^6y^4}$

3. Coloca en cada inciso el monomio correspondiente para que se obtenga una igualdad.

a) $\dfrac{12a^5}{\square}=2a^3$ b) $\dfrac{\square}{8m^{10}}=0{,}5m$ c) $\dfrac{81x^{10}y^{20}}{\square}=8{,}1y^{10}$ d) $\dfrac{\square}{\frac{2}{3}m^2n^2}=0{,}5\dfrac{m}{n}$

e) $\dfrac{3b^6+b^{10}}{\square}=3b^2+b^6$ f) $\dfrac{12m^7-\square}{4m^5}=3m^2-1$

g) $\dfrac{12a^8+45a\ \square}{\square}=4a^5+15a^2-8$

h) $\dfrac{\square+30m^4m^4\ \square}{5m^2n}=3mn-6m^2n^2+\dfrac{1}{m}$

4. Divide el polinomio $105x^3y^4z^5 + 225x^4y^5z^6 - 75x^5y^6z^7$ por cada uno de los siguientes monomios:

   a) $5x^2y^2z^2$ b) $3x^3y^2z$ c) $25x^3y^3$ d) $2{,}5y^4z^5$ *e) $15x^4y^6z^7$ *f) $10x^5y^4z^3$

3.3 Ecuaciones lineales

De grados anteriores conoces que las ecuaciones son igualdades que contienen variables y solo se transforman en proposiciones verdaderas para ciertos valores de la variable. El objetivo es descubrir esos valores.

¡! En la siguiente balanza en equilibrio, halla la masa de un cubo (fig. 3.8).

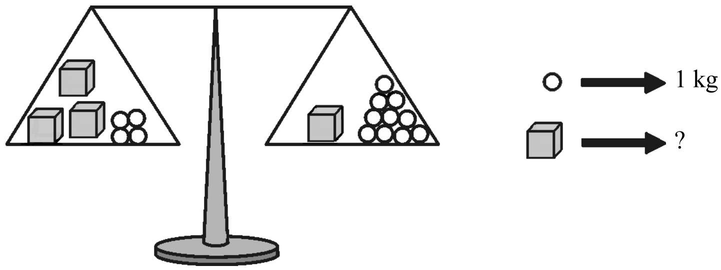


Figura 3.8

Si x representa la masa en kilogramo de un cubo, entonces el problema puede expresarse matemáticamente así:

$$3x + 4 = x + 10$$

Esta expresión representa una ecuación en la variable x. Esta ecuación se satisface solo cuando x toma el valor 3. Más adelante en este capítulo profundizarás en el procedimiento para su solución.

En las ecuaciones, a las expresiones que se encuentran a la izquierda y a la derecha del signo *igual a,* se les denominan **miembros de la ecuación**, los cuales pueden tener varios **términos**.

$$\overbrace{3x + 4}^{\text{Miembro izquierdo}} = \overbrace{x + 10}^{\text{Miembro derecho}}$$

Términos

Las **incógnitas** de una ecuación son las variables cuyos valores queremos obtener. En nuestro ejemplo la variable *x,* que se le ha asignado como significado la masa del cubo, es la incógnita. También podemos utilizar letras como *y, z, a, b, c,* etcétera.

El uso de las letras x, y, z *para representar incógnitas y las primeras del abecedario para valores conocidos, aparece en el libro* La Geometría *(fig. 3.9) de Descartes (1596-1650). Se cuenta que cuando el libro se estaba imprimiendo el editor le preguntó a Descartes si podía emplear otras letras para las ecuaciones. Descartes le respondió que le era indiferente las letras que utilizase en las ecuaciones. El editor eligió la* x *porque en francés esa letra se utiliza poco.*

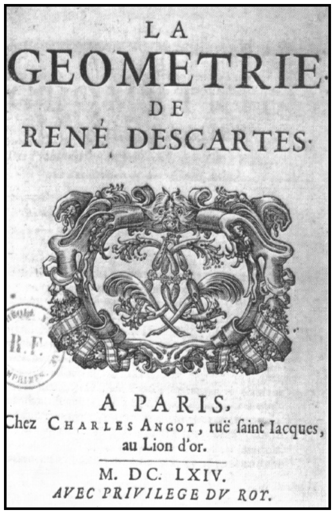


Figura 3.9

Mucho antes Diofanto de Alejandría utilizaba la palabra aritmos *para designar la incógnita de una ecuación. Mientras que Al Khuwarizmi utilizaba para ello el término* sahy. *Los egipcios le llamaban* aha, *literalmente* montón. *Durante los siglos* XV *y* XVI *los algebristas franceses la llamaron* Chose, *los alemanes* coss *y los italianos utilizaban la palabra cosa, más aún, el álgebra misma llegó a llamarse en Europa el arte de la cosa.*

La independencia del Álgebra como rama de la Matemática comienza con François Viète (1540-1603) al crear el cálculo literal, que posibilitó un tratamiento similar para los números y las magnitudes geométricas.

Ya has resuelto ecuaciones de la forma $ax = b$ ($a \neq 0$), $ax + b = c$ ($a \neq 0$) y $ax + bx = c$ $(a \neq 0 \text{ y } b \neq 0)$ con *a, b, c* números fraccionarios. En este grado aprenderás a resolver estas ecuaciones con *a, b, c* números racionales y otras de la forma $ax + b = cx + d$ ($a \neq 0$, $c \neq 0$) con *a, b, c, d* números racionales. Las ecuaciones en las que la variable aparece elevada al exponente uno reciben el nombre de **ecuaciones lineales**.

Son ecuaciones lineales las siguientes: $6x = 3$; $a + 3a = 2$; $\frac{y}{4} + 3 = y - 2$, $7(x+1) - 2x = 3x + 4$, $\sqrt{2z} + 1$. Sin embargo: $x^2 + 4x - 8 = 0$, $x^3 - 8 = 0$, $\frac{x - 3(x-3)}{x+2} = 7 - x$, $\sqrt{2a+5} = 3a$ no son ecuaciones lineales.

En las ecuaciones, las variables se sustituyen por valores de los conjuntos numéricos. A estos conjuntos numéricos se les denomina **dominio de la variable**. Ya sabes que las afirmaciones que se le puede asignar un valor de verdad, es decir, que solo pueden ser verdaderas o falsas, son proposiciones. Si al sustituir la variable por un valor de su dominio, la ecuación se transforma en una proposición verdadera, entonces se dice que ese número por el que se sustituyó la variable es una **solución de la ecuación.**

Las ecuaciones lineales pueden tener solución (ser solubles) o no tener solución (insolubles). Las ecuaciones lineales solubles pueden tener una solución única o infinitas soluciones. El conjunto formado por todas las soluciones de la ecuación lineal se denomina **conjunto solución**.

En el ejemplo de la balanza, ya sabes que 3 es la solución de la ecuación lineal

$3x + 4 = x + 10$, pues al sustituir la variable x por 3 se obtiene
$3 \cdot 3 + 4 = 3 + 10$
$13 = 13$

La proposición, por tanto, es verdadera para $x = 3$, y el conjunto solución está formado por el único valor que la satisface; luego, el conjunto solución de la ecuación es $S = \{3\}$.

Como para resolver una ecuación hay que encontrar el valor del dominio de la variable que transforma la ecuación en una proposición verdadera, la solución de la ecuación depende del dominio de la variable, por eso hay ecuaciones que pueden tener solución en un conjunto numérico y no tener solución en otro.

Por ejemplo, la ecuación $4x = 3$ no tiene solución en el conjunto de los números naturales, pues no existe ningún número natural que multiplicado por 4 sea igual a 3 (nota que 3 no es un múltiplo de 4). En cambio, en el conjunto de los números fraccionarios la ecuación es soluble, pues $4 \cdot \frac{3}{4} = 3$; luego, $\frac{3}{4}$ es solución de la ecuación.

La ecuación $x + 5 = 3$, no tiene solución ni en el conjunto de los números naturales ni en el conjunto de los números fraccionarios, porque no existe ningún número natural ni fraccionario que sumado con 5 sea igual a 3, sin embargo, tiene solución en el conjunto de los números enteros, pues para $x = -2$ se cumple que $-2 + 5 = 3$.

Ejemplo 1:

Clasifica las siguientes ecuaciones lineales en solubles y no solubles para los dominios de la variable que se indican. Fundamenta tu respuesta.

Ecuación	**Dominio de la variable**			
	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}_+$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$
a) $x + 1 = 5$	Soluble	Soluble	Soluble	Soluble
b) $3x = 7$	No soluble	Soluble	No soluble	Soluble
c) $2x = -6$	No soluble	No soluble	Soluble	Soluble
d) $-5x = 3$	No soluble	No soluble	No soluble	Soluble

a) La ecuación $x+1=5$ es soluble en todos estos dominios de la variable porque se transforma en una proposición verdadera para el valor 4 de la variable, y como 4 es un número natural, también es un número fraccionario, entero y racional.
b) La ecuación $3x=7$ es soluble cuando el dominio de la variable es $\mathbb{Q}_+$ y $\mathbb{Q}$ pues se transforma en una proposición verdadera para $x=\frac{7}{3}$, pero $\frac{7}{3}\notin\mathbb{N}$ y $\frac{7}{3}\notin\mathbb{Z}$; luego, en estos dominios de la variable la ecuación no tiene solución.
c) La ecuación $2x=-6$ es soluble en $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ porque se transforma en una proposición verdadera para $x=-3$ y -3 es un número entero y racional, sin embargo, $-3\notin\mathbb{N}$ y $-3\notin\mathbb{Q}_+$, entonces la ecuación no es soluble en estos dominios de la variable.
d) La ecuación $-5x=3$ no es soluble en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_+$ y $\mathbb{Z}$, pues se transforma en una proposición verdadera para $x=-\frac{3}{5}$ y este número no es natural ni fraccionario ni entero; pero como $-\frac{3}{5}\in\mathbb{Q}_+$ la ecuación es soluble cuando el dominio de la variable es el conjunto de los números racionales.

Existen ecuaciones que tienen infinitas soluciones. Por ejemplo, la ecuación $0{,}3x+7-\frac{3}{10}x=7$ tiene infinitas soluciones, pues al sustituir la variable x por cualquier número racional la ecuación se transforma en una proposición verdadera.

Analicemos para diferentes valores de la variable x:

Para $x=0$ se obtiene $0{,}3\cdot 0+7-\frac{3}{10}\cdot 0=0+7-0=7$; $7=7$, luego, 0 es una solución.

Para $x=5$ resulta que $0{,}3\cdot 5+7-\frac{3}{10}\cdot 5=1{,}5+7-1{,}5=7$; $7=7$, y, por tanto, 5 también es solución de la ecuación.

Para $x=\frac{2}{5}$ ocurre que:

$$0{,}3\cdot\frac{2}{5}+7-\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{5}=0{,}3\cdot 0{,}4+7-\frac{3}{25}=0{,}12+7-0{,}12=7;\ 7=7,$$

lo que quiere decir que $\frac{2}{5}$ satisface esta ecuación.

Para $x = -1$ $\quad 0{,}3 \cdot (-1) + 7 - \frac{3}{10} \cdot (-1) = -0{,}3 + 7 - 0{,}3 = 7$; $7 = 7$, entonces -1 es también solución de la ecuación.

En este caso el conjunto solución de la ecuación es el dominio básico de la variable. Siempre que no se indique cuál es el dominio de la variable se tomará el conjunto de los números racionales.

Como ya conoces, Diofanto de Alejandría (fig. 3.10) fue uno de los grandes matemáticos de la antigua Grecia. De su vida se sabe muy poco, se cuenta que en su tumba hay escrito un acertijo sobre su vida que dice así:

"transcurrió en la niñez de Diofanto, un sexto de su vida, un doceavo en la adolescencia y, después de otra séptima de su existencia contrajo matrimonio y le nació un hijo a los cinco años de casado. Mas el hijo solamente vivió la mitad de la vida del padre y este, afligido, buscó consuelo en la ciencia de los números y a cuatro años de muerto el hijo, Diofanto falleció".

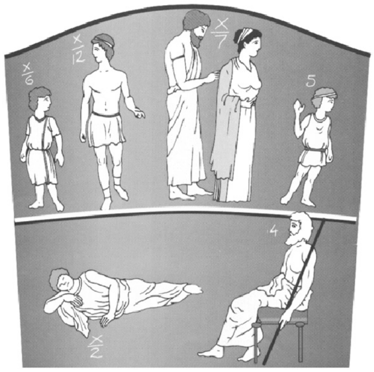


Figura 3.10

La resolución de una ecuación lineal, nos conduce a concluir que Diofanto vivió 84 años, ¡compruébalo!

Te has percatado que existen ecuaciones lineales que tienen una única solución, otras tienen infinitas soluciones, pero, ¿será un mismo valor solución de varias ecuaciones?, compruébalo tú mismo. Para ello realiza el siguiente ejercicio.

Comprueba que $x = 1$ es solución de las siguientes ecuaciones:

a) $6x = 6$ b) $x + 3 = 4$ c) $\frac{x}{2} = 0{,}5$

Sustituimos el valor de x por 1 en cada ecuación y verifiquemos que obtenemos una igualdad.

$6x = 6$ se cumple para $x = 1$, pues $6 \cdot 1 = 6$
$x + 3 = 4$ se cumple para $x = 1$, ya que $1 + 3 = 4$

$\frac{x}{2} = 0{,}5$ se cumple para $x = 1$, porque $\frac{1}{2} = 0{,}5$

Podemos concluir que existen ecuaciones que son solubles para un mismo valor de la variable. Las ecuaciones con igual dominio de la variable que tienen el mismo conjunto solución se denominan **ecuaciones equivalentes.** Por tanto, las ecuaciones $6x = 6$, $x + 3 = 4$ y $\frac{x}{2} = 0{,}5$ del ejercicio resuelto que tienen como dominio de la variable al conjunto de los números racionales y el mismo conjunto solución son **equivalentes**.

Las transformaciones realizadas a una ecuación, que como resultado conducen a la obtención de ecuaciones equivalentes a la dada, se llaman **transformaciones equivalentes.**

Transformaciones equivalentes:

- Intercambiar los miembros de la ecuación.
  Por ejemplo, las ecuaciones $-7 + 4x = 6x + 2$ y $6x + 2 = -7 + 4x$ son equivalentes, pues se obtienen una de otra por el intercambio de sus miembros.
- Adicionar (sustraer) el mismo término a ambos miembros de una ecuación.
  Por ejemplo, en la ecuación $6x + 2 = -7 + 4x$ si sumamos -2 a ambos miembros de la ecuación obtenemos $6x + 2 - 2 = -7 + 4x - 2$, es decir, la ecuación $6x = -9 + 4x$, que tiene el mismo conjunto solución que la ecuación inicial.

Nota que es posible adicionar (sustraer) a ambos miembros de una ecuación el mismo número porque ya conoces que los números también son términos y esta transformación la realizaste en grados anteriores al resolver ecuaciones lineales, pues adicionar -2 a ambos miembros de la ecuación, no es más que pasar de un miembro a otro un término con la operación inversa, en este caso se pasa en $6x + 2 = -7 + 4x$ el 2 para el otro miembro con la operación inversa, por lo que decimos que se traspone el término de un miembro a otro y se obtiene:

$$6x = -7 + 4x - 2$$
$$6x = -9 + 4x.$$

Por ejemplo, en la ecuación $6x = -9 + 4x$ si restamos $4x$ a ambos miembros de la ecuación obtenemos $6x - 4x = -9 + 4x - 4x$, o sea, la ecuación $2x = -9$. Observa que en este caso se traspone el término $4x$ del miembro derecho al izquierdo para que en un mismo miembro estén agrupados todos los términos que tiene la variable x.

- Multiplicar (dividir) ambos miembros de la ecuación por un número distinto de cero.

  Por ejemplo, en la ecuación $2x = -9$ si dividimos ambos miembros por 2 obtenemos la ecuación $x = -\frac{9}{2}$, que es equivalente a la anterior. Fíjate que al dividir por 2 ambos miembros de la ecuación se ha despejado la variable x.

Nota que como esta última ecuación se ha obtenido por la aplicación sucesiva de transformaciones equivalentes las ecuaciones $-7 + 4x = 6x + 2$ y $x = -\frac{9}{2}$, son equivalentes y, por lo tanto, tienen el mismo conjunto solución, lo que significa que $x = -\frac{9}{2}$ es la solución de la ecuación $-7 + 4x = 6x + 2$.

Ejemplo 2:

Indica mediante cuáles transformaciones equivalentes se puede obtener la segunda ecuación de la primera.

a) $9x = 36$; $x = 4$

$9x = 36 \mid : 9$ Dividir ambos miembros de la ecuación por un número distinto de cero. Colocamos a la derecha de la ecuación l : 9, para que observes la operación que se va a realizar.

$x = 4$

b) $x - 3 = -5$; $x = -2$

$x - 3 = -5 \mid +3$ Adicionar el mismo número a ambos miembros de la ecuación.

$x - 3 + 3 = -5 + 3$

$x = -2$

c) $2x + 4 = 3 - 6x$; $8x = -1$

$2x + 4 = 3 - 6x \mid -4$ Sustraer el mismo número a ambos miembros de la ecuación.

$2x + 4 - 4 = 3 - 6x - 4$

$2x = -1 - 6x \mid + 6x$ Adicionar el mismo término a ambos miembros de la ecuación.

$2x + 6x = -1 - 6x + 6x$

$8x = -1$

Las transformaciones equivalentes se utilizan para resolver las ecuaciones, ya que su aplicación nos permite transformar las diferentes ecuaciones lineales a una equivalente de la forma $x = c$ ($c \in \mathbb{Q}$), con lo que se determina la solución de la ecuación.

Ejemplo 3:

Halla el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $3x = 9$

$3x = 9$ Nota que estamos buscando el número racional que multiplicado por 3 da como resultado 9.

$x = 3$ Fácilmente puedes observar que este resultado se obtiene también aplicando la transformación equivalente que permite dividir por un número distinto de cero ambos miembros de una ecuación; en este caso, dividimos por 3.

Comprobando: Miembro izquierdo: $3 \cdot 3 = 9$
Miembro derecho: 9

Comparación: $9 = 9$

Luego, la solución de la ecuación es $x = 3$ y el conjunto solución de la ecuación es $S = \{3\}$.

Habrás observado que la comprobación de la solución se realiza en la ecuación original y que estás calculando el valor numérico de las expresiones algebraicas que conforman los miembros de la ecuación para el valor hallado de la variable.

b) $5x - 3 = 7$

$5x - 3 = 7$	
$5x = 7 + 3$	Adicionando 3 a ambos miembros de la ecuación.
$5x = 10$	Reducción de términos semejantes.
$x = 2$	Dividiendo por 5 ambos miembros de la ecuación.

Comprobando: Miembro izquierdo: $5 \cdot 2 - 3 = 10 - 3 = 7$
Miembro derecho: 7

Comparación: $7 = 7$

La solución de la ecuación es $x = 2$, por tanto, su conjunto solución es $S = \{2\}$.

c) $-4x + x = 2$

$-4x + x = 2$	
$-3x = 2$	Reducción de términos semejantes.
$x = -\frac{2}{3}$	Dividiendo por -3 ambos miembros de la ecuación.

Comprobando: Miembro izquierdo: $-4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$

Miembro derecho: 2

Comparación: $2 = 2$

Como la solución de la ecuación es $x = -\frac{2}{3}$, su conjunto solución es $S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

R ¡! d) $3x + 4 = x + 10$

$3x + 4 = x + 10$	Adicionando a ambos miembros de la ecuación el término $-x$.
$3x - x = 10 - 4$	Adicionando a ambos miembros de la ecuación -4.
$2x = 6$	Reducción de términos semejantes.
$x = \frac{6}{2}$	Dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2.
$x = 3$	

Comprobando: Miembro izquierdo: $3 \cdot 3 + 4 = 9 + 4 = 13$
Miembro derecho: $3 + 10 = 13$

Comparación: $13 = 13$

Luego, la solución de la ecuación es $x = 3$ entonces el conjunto solución de la ecuación es $S = \{3\}$.

e) $2{,}5x - 1{,}4 = x + 0{,}1$

$2{,}5x - x - 1{,}4 = 0{,}1$	Adicionando a ambos miembros de la ecuación el término $-x$. Nota que para cualquier valor que tome la variable x del dominio de la variable, siempre se está adicionando el mismo número a ambos miembros de la ecuación.
$2{,}5x - x = 0{,}1 + 1{,}4$	Adicionando a ambos miembros de la ecuación 1,4.
$1{,}5x = 1{,}5$	Reducción de términos semejantes.
$x = 1$	Dividiendo ambos miembros de la ecuación por 1,5.

Comprobando: Miembro izquierdo: $2{,}5 \cdot 1 - 1{,}4 = 2{,}5 - 1{,}4 = 1{,}1$
Miembro derecho: $1 + 0{,}1 = 1{,}1$

Comparación: $1{,}1 = 1{,}1$

Entonces la solución de la ecuación es $x = 1$ y el conjunto solución de la ecuación es $S = \{1\}$.

f) $\frac{2x}{3} + 1 = x - 3$

$$\frac{2x}{3} + 1 = x - 3$$

$2x + 3 = 3x - 9$	Multiplicando por 3 ambos miembros de la ecuación.
$9 + 3 = 3x - 2x$	Transponiendo términos al otro miembro.
$12 = x$	Reducción de términos semejantes.

Comprobando: Miembro izquierdo: $= \frac{2 \cdot 12}{3} + 1 = 8 + 1 = 9$

Miembro derecho: $12 - 3 = 9$

Comparación: $9 = 9$

Como la solución de la ecuación es $x = 12$, entonces el conjunto solución es $S = \{12\}$.

En las ecuaciones lineales no es obligatorio realizar la comprobación, pues para resolverlas se utilizan las transformaciones equivalentes, que siempre que se apliquen correctamente, conducen a ecuaciones equivalentes que ya sabes tienen el mismo conjunto solución. No obstante, es una vía muy importante para que estés seguro de que no cometiste errores en la búsqueda de la solución de la ecuación; te sugerimos que siempre compruebes tus resultados, pudiendo utilizar el cálculo oral.

g) $3 + 5x - 6 = 3x + 2 + 2x - 3{,}5$

$3 + 5x - 6 = 3x + 2 + 2x - 3{,}5$

$5x - 3 = 5x - 1{,}5$ Reducción de términos semejantes.

$5x - 5x - 3 = 5x - 5x - 1{,}5$ Sustrayendo $5x$ a ambos miembros de la ecuación.

$-3 = -1{,}5$ Reducción de términos semejantes.

Observa que has obtenido una proposición falsa; luego, la ecuación no tiene solución y el conjunto solución es $S = \phi$.

Recuerda que:

Toda ecuación que se transforma en una proposición falsa para todo valor que se le asigne a la variable no tiene solución.

a) $2x + \frac{x}{3} - 3 = \frac{7x}{3} + 5 - 8$

$2x + \frac{x}{3} - 3 = \frac{7x}{3} + 5 - 8$

$\frac{7x}{3} - 3 = \frac{7x}{3} - 3$ Reducción de términos semejantes.

$\frac{7x}{3} - \frac{7x}{3} - 3 = \frac{7x}{3} - \frac{7x}{3} - 3$ Sustrayendo $\frac{7x}{3}$ a ambos miembros de la ecuación.

$-3 = -3$ Reducción de términos semejantes.

$0 = 0$ Adicionando 3 a ambos miembros de la ecuación.

Fíjate que en este caso al aplicar las transformaciones equivalentes para resolver la ecuación, se obtiene una proposición verdadera, entonces la ecuación tiene infinitas soluciones y el conjunto solución es el conjunto de los números racionales, que es el dominio de la variable, es decir, $S = \{x: x \in \mathbb{Q}\}$.

Al resolver una ecuación lineal y obtener una proposición verdadera, ya puedes concluir que tiene infinitas soluciones, sin necesidad de llegar a la igualdad 0 = 0.

Recuerda que:

Toda ecuación que se transforma en una proposición verdadera para todo valor que se le asigne a la variable, tiene infinitas soluciones.

De manera general se cumple que: Si al reducir una ecuación lineal mediante las transformaciones equivalentes a la forma $ax + b = 0$ con a, b números racionales se tiene que:

- $a \neq 0$ entonces la solución es única, siempre que el dominio de la variable sea $\mathbb{Q}$.
- $a = 0$ y $b = 0$ entonces tiene infinitas soluciones y su conjunto solución es el dominio de la variable.
- $a = 0$ y $b \neq 0$ entonces no tiene solución y su conjunto solución es el conjunto nulo o vacío.

Existen numerosos problemas de la vida práctica que para resolverlos hay que encontrar la solución de ecuaciones lineales en las que tienes que aplicar las operaciones estudiadas en este capítulo y donde aparecen signos de agrupación, por ejemplo, la ecuación $5(x + 3) – 7 = 18$ para resolverla hay que efectuar la multiplicación del término 5 con el binomio $x + 3$ y fíjate que aparece un signo de agrupación, el paréntesis; en este caso se dice que estamos eliminando paréntesis.

Ejemplo 4:

Halla el conjunto solución de las ecuaciones siguientes:

a) $5(x + 3) – 7 = 18$

Recuerda que es necesario transformarla a la forma $ax = b$, por lo que debes eliminar el paréntesis y transponer términos.

$5x + 15 – 7 = 18$ (Eliminando el paréntesis)
$5x + 8 = 18$ (Reduciendo términos semejantes en el miembro izquierdo)
$5x = 18 – 8$ (Transponiendo el 8 al miembro derecho)
$5x = 10$ (Reduciendo términos semejantes en el miembro derecho)
$x = 2$ (Despejando la x)

El conjunto solución de la ecuación es $S = \{ 2 \}$.

b) $6 + 2(x + 1) = 3$

$6 + 2x + 2 = 3$ (Eliminando paréntesis)
$2x = 3 – 8$ (Reduciendo términos en el miembro izquierdo y transponiendo al miembro derecho)
$2x = – 5$ (Reduciendo términos en el miembro derecho)
$x = – 2,5$ (Despejando la x)

El conjunto solución de la ecuación es $S = \{– 2,5\}$ o también puedes escribir $S = \left\{ -\frac{5}{2} \right\}$.

c) $3x + 4 = 2(x - 3)$

$3x + 4 = 2x - 6$ (Eliminando paréntesis)
$3x - 2x = -6 - 4$ (Transponiendo términos)
$x = -10$ (Reduciendo términos semejantes)

El conjunto solución de la ecuación es $S = \{-10\}$.

d) $x - 4(x - 1) = -2$

$x - 4x + 4 = -2$ (Eliminando paréntesis)
$-3x = -2 - 4$ (Reduciendo términos semejantes y transponiendo)
$-3x = -6$

$$x = \frac{-6}{-3} \quad \text{(Despejando la } x\text{)}$$

$x = 2$

El conjunto solución de la ecuación es $S = \{2\}$.

Diofanto de Alejandría (325-409) (fig. 3.11) realizó un perfeccionamiento esencial de la notación matemática, añadió amplias perspectivas al objetivo del Álgebra. Él ideó un sistema de símbolos para escribir ecuaciones. De ahí que las ecuaciones lineales que hoy resolvemos se escribían de singulares maneras, cuenta la historia que no empleó ningún signo para la adición. Por ejemplo, la ecuación 3x + 2 = x – 1 Diofanto la escribía como:

$$\xi \;\; \gamma \;\; \beta \;\; \iota \;\; \xi \;\; \psi \;\; \alpha$$

Figura 3.11

A continuación te mostramos las acciones que debes acometer para resolver ecuaciones lineales donde se integran varios de los procedimientos algebraicos estudiados en este capítulo. Recuerda que aunque no es obligatorio realizar la comprobación, es importante que siempre verifiques tus resultados, como parte del autocontrol que debes realizar de tu trabajo.

Ejemplo 5:

Halla el conjunto solución de la ecuación: $2\left(\frac{3x}{2} - 1\right) + 6 = \frac{5x + 10}{5}$

Procedimiento	$\mathbf{2\left(\frac{3x}{2}-1\right)+6=\frac{5x+10}{5}}$	**Explicación**
Eliminar paréntesis en el miembro izquierdo y dividir el binomio por el término en el miembro derecho de la ecuación.	$2\cdot\frac{3x}{2}-2\cdot 1+6=\frac{5x}{5}+\frac{10}{5}$ $3x-2+6=x+2$	Para eliminar el paréntesis, multiplicas 2 por cada término que está dentro de este, y en el miembro derecho divides cada término del binomio por 5.
Agrupar los términos semejantes en cada miembro de la ecuación.	$3x-x=2-6+2$	Fíjate que el propósito es obtener una ecuación equivalente a la dada en la que la variable aparezca solo en un miembro de la ecuación. Para transponer de un miembro a otro, ten en cuenta la operación inversa.
Reducir los términos semejantes.	$2x=-2$	Se reducen los términos semejantes que aparecen en cada miembro de la ecuación.
Despejar la variable.	$x=\frac{-2}{2}$	Para despejar transponemos el 2 que está multiplicando a la variable hacia el miembro derecho dividiendo.
Calcular el valor de la variable.	$x=-1$	Efectuamos la división indicada.
Comprobar que el valor hallado satisface la ecuación.	$\text{M.I.}: 2\left(\frac{3\cdot(-1)}{2}-1\right)+6$ $=2\left(\frac{-3}{2}-1\right)+6$ $=-3-2+6=1$ $\text{M.D.}: \frac{5(-1)+10}{5}=\frac{-5+10}{5}=1$ $1=1$	Se calcula el valor numérico de la expresión algebraica, para el valor hallado, en cada miembro y se comparan los resultados.
Escribir el conjunto solución.	$S=\{-1\}$	Escribimos en notación tabular el conjunto cuyo elemento es la solución de la ecuación.

Nuestros periodistas también utilizan en sus escritos frases propias del trabajo con las variables, que te parece si buscas en revistas y periódicos algunas de ellas, observa las que ya hemos encontrado.

Juventud Rebelde 4 de octubre de 2008.

rebelde SÁBADO 04 DE OCTUBRE DE 2008 DEPORTES 07

Mundial de Fútsal

Se despejan las equis

ARGENTINA mantuvo este viernes su invicto en el grupo C de la Copa del Mundo de Fútsal Brasil 2008, con sede en Brasilia. Los sudamericanos superaron 4-2 a Egipto, que archivó su segundo fracaso.

Los goles de la selección albiceleste fueron anotados por Giménez, Lucuix y un doblete de Giustozzi. En tanto, por los «faraones» marcaron El Agouz y Samasry.

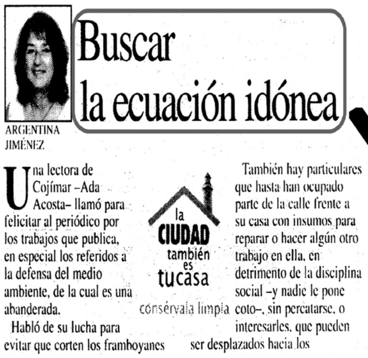
En esa propia llave C, Ucrania debutó con fácil éxito de 6-2 sobre Guatemala. Rogachov encabezó la ofensiva europea con par de dianas, secundado por Zamyatin, Chepomiuk, Romanov y Legchanov. De León y Acevedo firmaron las perforaciones de los centroamericanos.

En el segmento D, con sede en Río de Janeiro, España venció 3-0 a Libia y consiguió su primer triunfo. Los ibéricos, monarcas de las dos últimas ediciones, empataron 3-3 con Irán en su debut. Anoche anotaron el veterano de mil campañas, Javi Rodríguez, así como Álvaro y Daniel.

Finalmente, República Checa debutó con goleada de 4-1 ante Uruguay. Mares, Sluka, Slama y Filinger auparon a los checos. Mientras, Seba descontó para el conjunto charrúa.

Hoy habrá acciones en los grupos A (Brasilia) y B (Río). En el primero chocarán Islas Salomón-Japón y Rusia y Brasil. Por cierto, este último será un duelo de invictos que debe definir el primer lugar. El descanso le corresponde a la selección cubana, que volverá a jugar el lunes contra el cuadro nipón.

Y en la zona B rivalizarán los también invictos Italia y Portugal, así como Tailandia-Estados Unidos. Habrá asueto para Paraguay. (J.L.L.S.)



Buscar la ecuación idónea

ARGENTINA JIMÉNEZ

Una lectora de Cojímar –Ada Acosta– llamó para felicitar al periódico por los trabajos que publica, en especial los referidos a la defensa del medio ambiente, de la cual es una abanderada.

Habló de su lucha para evitar que corten los framboyanes

la CIUDAD también es tucasa conséRvala limpia

También hay particulares que hasta han ocupado parte de la calle frente a su casa con insumos para reparar o hacer algún otro trabajo en ella, en detrimento de la disciplina social –y nadie le pone coto–, sin percatarse, o interesarles, que pueden ser desplazados hacia los

Tribuna de La Habana 3 de agosto de 2006.

Ejercicios

1. Resuelve las ecuaciones lineales siguientes:

a) $5x = 10$ b) $16y = 64$ c) $2z = -5$ d) $-6x = -3$

e) $0{,}3p = 9$ f) $2x - 5 = 7$ g) $4y + 1 = 3$ h) $12z - 2 = 13$

i) $-0{,}7p + 0{,}5 = -0{,}2$ j) $3{,}5 - 2x = 0{,}5$ k) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 2{,}5$

l) $\frac{2}{5}y - 1{,}2 = 0{,}8$ m) $-1 - 3p = 5$ n) $2(x + 1) = 4$

ñ) $-3(x - 2) = 9$ o) $12(y + 2) - 24 = 8$ p) $3 = 4 - 2(z + 1)$

2. Halla el conjunto solución de las ecuaciones lineales siguientes:

a) $x + 3x = 24$ b) $2{,}5y - 1{,}5y = 3$ c) $6z - 8z = 8$

d) $-5n - 7n = -48$ e) $\frac{1}{3}m + \frac{4}{3}m = 10$ f) $\frac{2}{7}p - \frac{3}{7}p = -1$

g) $-\frac{3}{4}x - \frac{7}{4}x = -2{,}5$ h) $\frac{1}{3}n + \frac{1}{6}n = 1$ i) $\frac{3}{5}p - 0{,}3p = -1$

j) $\frac{1}{4}y + \frac{2}{3}y = 22$ k) $\frac{2}{9}z - \frac{3}{5}z = -85$ l) $\frac{11}{2}d + \frac{7}{3}d = 94$

m) $0{,}5y - 0{,}7y = 0{,}4$ n) $-3{,}8p + 2{,}7p = -11$ ñ) $33x + 12x + 5 = 95$

o) $13y - 8y + 1 = 16$ p) $-10z - 30z - 71 = 29$ q) $2{,}5t + 8{,}2t - 20{,}5 = 33$

r) $\frac{5}{7}x + \frac{1}{7}x + \frac{3}{7} = -\frac{3}{7}$ s) $\frac{1}{4}y - \frac{3}{4}y - 1 = -2$ t) $\frac{11}{5}z + \frac{7}{15}z + 16 = 80$

u) $\frac{8}{9}p - \frac{1}{6}p - \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$ v) $2{,}5x + \frac{5}{2}x + \frac{2}{11} = \frac{2}{11}$ w) $3t + 4 - 3t = 4$

3. Halla los valores de la variable que satisfacen las ecuaciones siguientes:

a) $2x + 4 = x + 2$ b) $3x - 5 = x + 7$ c) $0{,}5x + 1 = -0{,}5x - 3$

d) $\frac{a}{3} + \frac{2}{3} = a$ e) $\frac{y}{4} + 2 = \frac{3}{4}y - 5$ f) $z - 2{,}5 = \frac{2z}{5} + 6{,}5$

g) $5(b + 1) = 3b + 9$ h) $-2(y + 3) = 5y - 4$ i) $\frac{4}{5}(10z - 5) = 5z - 4$

j) $0{,}4(2n + 0{,}5) = n + 0{,}2$ k) $-\frac{1}{7}(14 + 2a) = \frac{5}{7}a - 2{,}4$ l) $\frac{2x+4}{6} = 3 + \frac{x}{3}$

4. Determina el conjunto solución de las siguientes ecuaciones lineales para el conjunto numérico de la variable que se indica:

a) $2x + 1 = 5$ ($x \in \mathbb{N}$) b) $5a = 3a - 1$ ($a \in \mathbb{Q}_+$)

c) $2x - 4x = -6$ ($x \in \mathbb{Z}$) d) $-4(x + 1) = 4$ ($x \in \mathbb{N}$)

e) $\frac{1}{3}m + \frac{2}{5}m = \frac{22}{3}$ ($m \in \mathbb{Z}$) f) $\frac{4x+8}{2} = 1$ ($x \in \mathbb{Q}_+$)

5. ¿Cuál de las ecuaciones siguientes no tiene como solución el número -7?

a) ____ $2x + 19 = 5$ b) ____ $\frac{x}{2} = -\frac{21}{6}$

c) ____ $\frac{x+14}{7} = 1$ d) ____ $3(2x + 6) = 5x + 2$

6. Enlaza la ecuación de la columna *A* con su solución correspondiente en la columna *B*.

A	*B*
$3x + 2 = 2$	$S = \phi$
	$S = \{-4\}$
	$S = \{-4\}$
$\frac{1}{2}x - 2x = -6$	$S = \{0; 1\}$
	$S = \{-10\}$
$-0{,}2x = -2$	$S = \{4\}$
	$S = \{0\}$
$4 - x = 8$	
	$S = \{10\}$
$2x + x - 1 = 3x + 1$	$S = \{9\}$
	$S = \{12\}$
$5(x - 2) + 3{,}5 = -6$	$S = \{-0{,}1\}$

7. Marca con una *X* en la columna que corresponda.

La ecuación con $n, p, q, s, k \in \mathbb{Q}$	**Se transforma en una proposición verdadera**		
	Siempre	*A veces*	*Nunca*
$n + 2 = 3$			
$2n - 3 = 3 - 2n$			
$q + 12 = s + 12$			
$p + q = p + s$			
$3(n + 3) = 3n + 3$			
$2(p - 5) = 2p - 10$			
$\frac{p + 4}{2} = p + 2$			

8. Escribe una ecuación de la forma $ax = b$, $(a \neq 0)$ cuyo conjunto solución sea:

a) $S = \{2\}$ b) $S = \{-1\}$ c) $S = \{\frac{1}{2}\}$ d) $S = \{0\}$ e) $S = \{2{,}4\}$

9. Escribe una ecuación de la forma $ax + b = c$ ($a \neq 0$) cuyo conjunto solución sea:

a) $S = \{2\}$ b) $S = \{-1\}$ c) $S = \{\frac{1}{2}\}$ d) $S = \{0\}$ e) $S = \{2{,}4\}$

10. Escribe una ecuación de la forma $ax + bx = c$ ($a \neq 0$) cuyo conjunto solución sea:

a) $S = \{2\}$ b) $S = \{-1\}$ c) $S = \{\frac{1}{2}\}$ d) $S = \{0\}$ e) $S = \phi$

11. Escribe una ecuación de la forma $ax + b = cx + d$, ($a \neq 0$ y $c \neq 0$) cuyo conjunto solución sea:

a) $S = \{2\}$ b) $S = \{-1\}$ c) $S = \{\frac{1}{2}\}$ d) $S = \{0\}$ e) $S = \{x\text{: } x \in \mathbb{Q}\}$

12. En cada una de las siguientes ecuaciones halla el valor del parámetro indicado.

a) $ax + 6 = 8$ para que la solución de la ecuación sea $x = \frac{2}{3}$.

b) $ax - \frac{1}{5} = \frac{2}{3}$ para que la solución de la ecuación sea $x = -\frac{1}{3}$.

c) $3x + bx = -3$ para que la solución de la ecuación sea $x = -1$.

d) $px - \frac{x}{2} = 6$ para que la solución de la ecuación sea $x = 4$.

13. Cuadrado mágico, en matemática, es la agrupación de diversos números colocados formando un cuadrado en el que la suma de ellos en cada columna, en cada fila y en las diagonales siempre es la misma, denominada **suma mágica**.
En el cuadrado mágico que aparece en la figura 3.12, la suma mágica es 4,8. Determina el valor de la variable x y completa los números que faltan en el cuadrado.

4		2,
	$2x$	
x		

Figura 3.12

3.3.1 Resolución de problemas que conducen a ecuaciones lineales

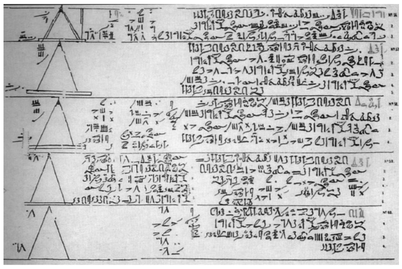


Figura 3.13

El papiro de Ahmés (fig. 3.13), más conocido y famoso que los demás papiros matemáticos, fue redactado por un escriba llamado Ahmés; se le conoce también como papiro de Rhind, pues fue adquirido en el año 1858 por el investigador inglés Henry Rhind (1833–1863). Contiene 85 problemas de variada índole y se conserva en el Museo Británico. Uno de sus problemas dice: Una cantidad y su séptima parte suman 24. ¿Cuál es la cantidad? Ahmés resuelve este sencillo problema aplicando los procedimientos de esa época como el método de la falsa posición: con la simbología de hoy planteamos la ecuación $x + \frac{x}{7} = 24$*, la cual ya sabes resolver.*

El procedimiento estudiado para la resolución de ecuaciones lineales es una herramienta muy útil para resolver numerosos problemas. Observa a continuación, cómo utilizar las ecuaciones para resolver problemas.

Analiza el siguiente problema:

¡! En un colegio electoral la cantidad de electores hombres y la cantidad de electores mujeres son números naturales consecutivos. En dicho colegio votan 329 electores, si se sabe que hay más electores mujeres, ¿cuántos electores hay de cada sexo en ese colegio?

Para encontrar la solución de este problema responde las siguientes preguntas:

¿De qué trata el problema?	De la cantidad de electores de un colegio electoral.
¿Qué hay que determinar?	La cantidad de electores de cada sexo.
¿Qué información brinda el texto del problema?	El total de electores que tiene el colegio electoral y la relación entre las cantidades de electores hombres y mujeres.
¿Qué relaciones se establecen en el texto del problema?	Que la cantidad de electores hombres y la cantidad de electores mujeres son números naturales consecutivos.

¿Qué palabras claves aparecen en esta relación?	Números naturales consecutivos.
¿Cómo se representan los números naturales consecutivos utilizando variables?	x, $x + 1$
¿Qué significado se le asigna en este caso a la variable x?	x: cantidad de electores hombres
¿Cómo representamos entonces la cantidad de electores mujeres?	$x + 1$
¿Qué cantidad de electores tiene este colegio electoral?	329

Luego, si x es la cantidad de electores hombres y $x + 1$ la cantidad de electores mujeres y en total hay 329 electores, entonces la suma de la cantidad de electores hombres y la cantidad de electores mujeres es igual al total de electores, por tanto, se obtiene la ecuación $x + x + 1 = 329$, cuya solución dará respuesta a este problema.

Por lo que escribes:

R ¡! *Datos* — *Ecuación*

x: Cantidad de electores hombres — $x + x + 1 = 329$

$x + 1$: Cantidad de electores mujeres — $2x + 1 = 329$ (Reduciendo términos semejantes)

$2x = 329 - 1$ (Transponiendo)

$2x = 328$ (Reduciendo términos semejantes)

$x = \frac{328}{2}$ (Despejando la x)

$x = 164$ (Efectuando la división)

Al sustituir en los datos, obtienes que el otro número es 165.

Antes de proceder a dar la respuesta literal al problema, debes verificar en el texto si se cumplen las condiciones planteadas. Observa que como el problema se refiere a cantidad de personas el valor de la variable x tiene que ser un número natural; luego, el valor obtenido es lógico y como 165 es el sucesor de 164, es su consecutivo y además suman 329 ($164 + 165 = 329$); se cumplen las condiciones del texto. Esto último lo puedes hacer mentalmente.

Respuesta: En el colegio electoral hay 164 electores hombres y 165 electores mujeres.

Este problema se ha resuelto algebraicamente, te invitamos a que busques cómo resolverlo aritméticamente, es decir, sin utilizar las variables.

Ejemplo 1:

En una granja de vacas, entre cuernos y patas suman 90. ¿Cuál es el número de vacas?

Respondiendo a las preguntas que te hicimos anteriormente para encontrar la ecuación, tienes en este caso que el problema trata sobre una granja, en el que hay que determinar la cantidad de vacas y el texto informa la cantidad de patas y cuernos que hay. Entre las patas y cuernos de la vaca, como conoces, se establece la relación de que cada vaca tiene dos cuernos y cuatro patas y la palabra clave **suman**, significa que en total hay 90 cuernos y patas. Como se desconoce la cantidad de vacas que tiene la granja, a la variable x se le asigna este significado, entonces la cantidad de cuernos se representa por $2x$, la cantidad de patas por $4x$ y como la suma de cuernos y patas es 90, entonces la ecuación es $2x + 4x = 90$.

Datos	*Ecuación*
x: Cantidad de vacas	$2x + 4x = 90$
$2x$: Cantidad de cuernos	$6x = 90$ (Reduciendo términos semejantes)
$4x$: Cantidad de patas	$x = \dfrac{90}{6}$ (Despejando la x)
	$x = 15$

La cantidad de vacas es 15, resultado que es lógico porque es un número natural y el texto se refiere a cantidad de vacas. Verificamos en el texto si la cantidad de cuernos y patas es correcta: cuernos: $2 \cdot 15 = 30$

patas: $4 \cdot 15 = 60$

total: 90

Respuesta: En la granja hay 15 vacas.

Ejemplo 2:

La edad de Luis excede en 6 años a la de su hermano Andy. La quinta parte de la edad de Luis es menor en 2 años que la edad de Andy. ¿Qué edad tiene cada uno?

Este problema trata de la edad de dos hermanos, las cuales debes determinar. En el texto te informan sobre relaciones existentes entre estas edades, que están subrayadas y en las que aparecen las palabras claves **excede, quinta parte** y **menor**. No sabes la edad que tiene cada uno, por lo que si a la variable x le asignas la edad de Andy, entonces realizando la traducción del lenguaje común al algebraico de la relación “la edad de Luis excede en 6 años a la de su hermano Andy” tienes que la edad de Luis es $x + 6$. Al traducir al lenguaje algebraico la segunda relación que aparece en el texto del problema se obtiene que: $\frac{x+6}{5} = x - 2$ o $\frac{x+6}{5} + 2 = x$

Datos:	*Ecuación*
x: Edad de Andy	$\frac{x+6}{5} + 2 = x \mid \cdot 5$
$x + 6$: Edad de Luis	$x + 6 + 10 = 5x$ (Multiplicando ambos miembros por 5)

$$6 + 10 = 5x - x \text{ (Transponiendo)}$$
$$16 = 4x \text{ (Reduciendo términos semejantes)}$$
$$x = \frac{16}{4} \text{ (Despejando la } x\text{)}$$
$$x = 4$$

La edad de Andy es 4 años y sustituyendo en los datos, obtienes que la edad de su hermano Luis es 10 años.

Verificamos en el texto si se cumplen las condiciones dadas:

La edad de Luis excede a la de su hermano en 6 años, ya que $10 - 4 = 6$.
La quinta parte de la edad de Luis ($10 : 5 = 2$), es menor en 2 años que la de Andy ($4 - 2 = 2$).

Se cumplen las condiciones del texto; luego, la respuesta final es la siguiente:

Respuesta: La edad de Luis es 10 años y la de Andy 4 años.

Otra vía de solución:

Existen problemas como este, en el que puedes utilizar la segunda relación para poner los datos en función de la variable *x,* y la primera para el planteo de la ecuación. Te quedaría de esta manera:

Datos	*Ecuación*
x: Edad de Luis	$x - 6 = \frac{x}{5} + 2$
$\frac{x}{5} + 2$: Edad de Andy	$x - \frac{x}{5} = 8 \mid \cdot 5$

$$5x - x = 40$$
$$4x = 40$$
$$x = 10$$

Cuando exista esta posibilidad, ten en cuenta cuál de las dos variantes te permite resolver el problema con menor trabajo para ti.

Ejemplo 3:

La longitud del largo de un terreno rectangular es <u>el duplo de su ancho aumentado en un metro</u>. El terreno tiene un <u>perímetro igual a 32 m</u>. Calcula el área que ocupa la superficie del terreno (fig. 3.14).

Este problema trata sobre un terreno de forma rectangular y hay que calcular su área.

En el texto te informan el perímetro del terreno y la relación existente entre sus lados, en las que aparecen palabras claves como **perímetro**, **duplo** y **aumentado en.** Para calcular el área del terreno de forma rectangular necesitas las longitudes de los lados del terreno y como se desconocen, primeramente auxiliándote de la relación que establece el perímetro con las dimensiones del rectángulo debes calcular dichas longitudes, para finalmente, calcular el área. Si designas por a la longitud del ancho del rectángulo, entonces al traducir del lenguaje común al algebraico la relación "longitud del largo es el duplo de su ancho aumentado en un metro", se obtiene que la longitud del largo es $2a + 1$. Ya conoces que el perímetro de un rectángulo se determina por la fórmula $P = 2(a + b)$, donde las variables a y b tienen como significado las longitudes del ancho y el largo del rectángulo, luego, como el perímetro de este terreno es 32 y designamos al ancho por a y al largo por $2a + 1$, entonces se obtiene la ecuación $32 = 2(a + 2a + 1)$.

Datos

Longitud del ancho: a

Longitud del largo: $2a + 1$

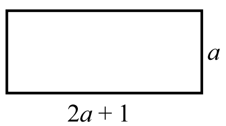


Figura 3.14

Ecuación

$P = 2(a + b)$ (Fórmula del perímetro del rectángulo)

$32 = 2(a + 2a + 1)$ (Sustituyendo)

$32 = 2(3a + 1)$ (Reduciendo términos semejantes)

$32 = 6a + 2$ (Eliminando el paréntesis)

$32 - 2 = 6a$ (Transponiendo)

$30 = 6a$

$$a = \frac{30}{6} \quad \text{(Despejando)}$$

$a = 5$

Hemos hallado la longitud del ancho, para obtener la del largo sustituimos en los datos,

Largo: $2 \cdot 5 + 1 = 11$, entonces el ancho mide 5 m y el largo 11 m.

Verificamos si las longitudes halladas satisfacen el texto del problema:

El largo, 11 m representa el duplo de 5 aumentado en 1, y el perímetro será

$2(11 + 5) = 2 \cdot 16 = 32$; por lo que se cumple lo planteado.

A diferencia de otros problemas, la respuesta del problema no son las dimensiones del rectángulo, sino su área.

El área de un rectángulo es el producto de las longitudes de su largo y ancho:

$A = 11\text{ m} \cdot 5\text{ m} = 55\text{ m}^2$.

Respuesta: El terreno ocupa una superficie de 55 m^2.

Fíjate que en este caso para encontrar la ecuación que posibilita resolver el problema utilizamos una fórmula, luego, en el proceso de encontrar cómo, utilizando variables, resolver un problema debes pensar en la posibilidad de buscar una fórmula que relacione lo dado en el texto del problema con lo buscado, que te permita el planteamiento de una ecuación.

Ejemplo 4:

En un almacén <u>hay cierta cantidad de kilogramos de arroz</u> destinado a la alimentación de los trabajadores de un municipio. Un día entra al almacén una asignación de alimentos y se descargan 800 kg de arroz. Al <u>día siguiente se sacan del almacén 32 000 kg</u> de arroz para repartir por diferentes centros de trabajo, de modo que <u>al final queda</u> en el almacén <u>la mitad de lo que había el primer día</u>. ¿Cuántos kilogramos de arroz quedaron en el almacén?

El problema trata sobre una cantidad de arroz almacenado y hay que determinar la cantidad que queda después de operaciones de entrada y salida. En el texto no se conoce la cantidad de arroz que había inicialmente, se informa la cantidad que se descarga el primer día y la que sale el segundo, por lo que la cantidad de arroz que queda en el almacén no es la misma que había inicialmente. Para saber la cantidad de arroz que queda en el almacén es necesario conocer la cantidad que había inicialmente, la cual se desconoce, y tener en cuenta la palabra clave **mitad** que relaciona ambas cantidades.

Si designas por x la cantidad inicial de kilogramos de arroz en el almacén, al descargar el primer día 800 kg de arroz entonces en el almacén hay $(x + 800)$ kg y el segundo día cuando se saca del almacén 32 000 kg, lo que queda representa la mitad de lo que había el primer día, es decir, $\frac{x}{2}$. Esto significa que antes de la entrada de la nueva cantidad de arroz había en el almacén $\frac{x}{2} + 32\,000$, entonces se obtiene la ecuación

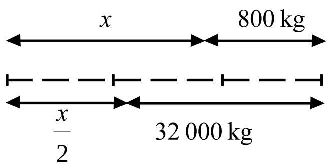
$$x + 800 = \frac{x}{2} + 32\,000$$

Datos

x: cantidad inicial de kilogramos de arroz en el almacén

1.^{er}día

2.^{o} día



Ecuación

$$x + 800 = \frac{x}{2} + 32\ 000$$

$$x - \frac{x}{2} = 32\ 000 - 800$$

$$\frac{x}{2} = 31\ 200$$

$$x = 62\ 400$$

En el almacén había inicialmente 62 400 kg, pero esa no es la respuesta al problema. El texto plantea que quedó la mitad de lo que había el primer día, por lo que calculamos

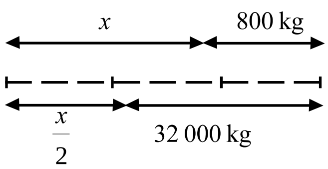
$$\frac{62\ 400}{2} = 31\ 200.$$

Respuesta: En el almacén quedaron 31 200 kg de arroz.

Otra vía de solución:

Datos

x: cantidad inicial de kilogramos de arroz en el almacén



Ecuación

32 000 – 800 = 31 200

Cantidad que representa la mitad de lo que había en el almacén al inicio.

Luego, $\frac{x}{2} = 31\ 200$ y $x = 62\ 400$

Observa que en este problema utilizamos un modelo lineal, donde en la parte superior se indica la situación inicial y en la inferior, la final, que facilita la búsqueda de la ecuación que da solución al problema planteado. Te invitamos a resolverlo aritméticamente, es decir, sin utilizar las variables.

Generalmente en los problemas para declarar las variables utilizamos letras como *x, y, a, b,* etc; también puedes trabajar con las letras iniciales de palabras como el nombre de personas u objetos.

Siempre que resuelvas un problema debes meditar en cómo procediste para encontrar su solución, pues la vía utilizada te puede ser útil para resolver otros problemas. Fíjate que en los ejemplos se reformuló el texto para su mejor comprensión, se subrayaron las partes en las que aparecen las relaciones entre lo que dan y lo que piden, se elaboraron modelos gráficos para representar la situación dada en el problema, se comprobó que el resultado obtenido fuera lógico, se buscaron otras vías de solución, entre otras. A medida que resuelvas más problemas tú mismo irás encontrando otras acciones que te faciliten la búsqueda de la solución al problema planteado.

Después de haber analizado la solución de estos problemas, habrás apreciado que se realizan casi siempre los mismos pasos. Es por ello que te los resumimos a continuación para que los tengas siempre en cuenta.

Recuerda que:

1. Leer el texto detenidamente para lograr su comprensión.
2. Señalar el significado de la variable que se utilizará.
3. Traducir al lenguaje algebraico las relaciones que se plantean en el texto.
4. Plantear una ecuación.
5. Resolver la ecuación planteada.
6. Comprobar que la solución de la ecuación satisface las condiciones que aparecen en el texto del problema.
7. Redactar la respuesta a la pregunta del problema.

Ejercicios

1. Marca con una X la ecuación que describe la situación planteada en cada inciso.

1.1 Un número p excede a otro número q en 5 unidades. La ecuación que representa la relación entre ambos números es:

a) ___ $p + 5 = q$ b) ___ $p - 5 = q$ c) ___ $5 - p = q$ d) ___ $p = 5q$

1.2 La longitud de la costa norte de Cuba excede en 672 km a la longitud de la costa sur. Si la costa sur tiene 2 537 km de longitud, entonces la longitud de la costa norte se puede determinar por la ecuación:

a) ___ $x + 672 = 2\,537$ b) ___ $x + 2\,537 = 672$

c) ___ $x - 672 = 2\,537$ d) ___ Ninguna de las anteriores

1.3 En la figura 3.15 se tienen las rectas a, b, c tales que $a \parallel b$ y c secante. La amplitud del ángulo β excede en 100º a la amplitud del ángulo α. La amplitud del ángulo α se puede determinar resolviendo la ecuación:

a) ___ $\alpha = \alpha + 100°$ b) ___ $2\alpha + 100° = 180°$

c) ___ $\alpha + 100° = 180°$ d) ___ $2\alpha - 100° = 180°$

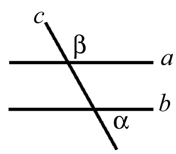


Figura 3.15

1.4 En la figura 3.16 aparece un rectángulo cuyo perímetro es 28 cm y su largo tiene 8,5 cm de longitud. La longitud de su ancho se puede determinar resolviendo la ecuación:

a) ___ $2x + 8{,}5 = 28$ b) ___ $2x + 17 = 28$

c) ___ $x + 8{,}5 = 28$ d) ___ $x + 17 = 28$

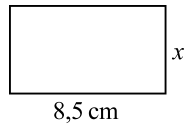


Figura 3.16

2. Marca con una X la respuesta correcta.

2.1 Al sustraer 3 a las tres cuartas partes de *n,* se obtiene 3. El valor de *n* es:

a) ___ 0 b) ___ 8 c) ___ 12 d) ___ – 8 e) ___ – 2,25

2.2 Si al quíntuplo de un número se le sustrae su 25 %, se obtiene 19. El número es:

a) ___ 1 b) ___ 76 c) ___ 4 d) ___ 95 e) ___ 380

2.3 Si $x = 2y + 5$, entonces el valor de y cuando $x = 3$ es:

a) ___ 11 b) ___ 1 c) $\frac{3}{2}$ d) ___ 4 e)___ -1

2.4 En un triángulo, uno de los ángulos exteriores triplica al ángulo interior adyacente a él. Entonces dicho triángulo no puede ser:

a) ___ equilátero b) ___ isósceles c) ___ rectángulo

d) ___ obtusángulo e) ___ acutángulo

3. El quíntuplo de un número es igual a 30. Halla el número.
4. La octava parte de un número es igual a 5. Determina el duplo de dicho número.
5. El 40 % de un número es igual a 100. Halla el sucesor del número.
6. El perímetro de un triángulo equilátero es igual a 73,5 cm, ¿qué longitud tienen los lados del triángulo?
7. Si mi edad actual se multiplica por 7 y se le adiciona 3, el resultado es 164. ¿Qué edad tendré dentro de 6 años?
8. El décuplo de un número aumentado en 4 es igual a 34. Determina el número.
9. El duplo del precio de una camisa disminuido en 30 pesos es igual a 80 pesos. Halla el precio de la camisa.

10. La distancia entre las ciudades de Cienfuegos y Pinar del Río es de 421 km. El doble de la distancia de la ciudad de Cienfuegos a la de Matanzas aumentado en 61 es igual a la distancia de la ciudad de Cienfuegos a la de Pinar del Río. ¿Cuántos kilómetros separan a la ciudad de Cienfuegos y la de Matanzas?

11. Valora la frase siguiente:

    "Para resolver un problema referente a números o relaciones abstractas de cantidades, basta con traducir dicho problema, del inglés u otra lengua, al idioma algebraico".

    Isaac Newton (1642-1727)

12. La cantidad de varones deportistas de séptimo grado de una secundaria básica excede en 10 a la cantidad de deportistas hembras. Si hay 18 hembras deportistas:

    a) ¿cuál es la cantidad de deportistas que tiene el séptimo grado de esa escuela?
    b) Si la asistencia al entrenamiento fue de un 87 % aproximadamente, ¿cuántos deportistas no asistieron ese día?

13. La mitad de la cantidad de años que tiene mi padre actualmente es menor en 10 que la mía. Si tengo 20 años, ¿cuántos años tiene mi padre?

14. El perímetro de un triángulo isósceles es igual a 19 cm y el lado desigual mide 8,0 cm. Determina la longitud de cada lado.

15. Un ángulo mide el quíntuplo de otro adyacente a él. ¿Cuánto mide el ángulo agudo?

16. La suma de dos números enteros consecutivos es igual a 367. ¿Qué número racional es el que se encuentra a la misma distancia de dichos números consecutivos?

17. David resolvió entre lunes y martes 64 ejercicios de Matemática. La cantidad de ejercicios resueltos el martes es el 60 % de los que resolvió el lunes.

    a) ¿Cuántos ejercicios más resolvió el lunes respecto al martes?
    b) Si tiene que resolver 120 ejercicios, ¿qué porcentaje del total le falta por resolver?

18. La diferencia entre el duplo de la cantidad de sacos de papa recogidos por Abel y el 50 % de dicha cantidad es igual a 30.

    a) ¿Cuántos sacos de papa recogió Abel?
    b) Si para cumplir la norma del día debió recoger 25 sacos, ¿qué porcentaje de cumplimiento de la norma logró Abel?

19. El precio de un artículo en febrero disminuyó en su tercera parte, por lo que ahora su costo es de $ 3,00. ¿Cuál era el precio del artículo antes de la rebaja?

20. El triplo de la suma de un número y su cuádruplo es igual a 75. Halla el número.

21. En un terreno rectangular, el largo es cinco veces el ancho y su perímetro es 48 m. Calcula el área de la superficie del terreno.

22. El 20 % de la diferencia de un número y su cuádruplo es igual a –12. Halla el número primo más cercano al número hallado.

23. Los pioneros Gabriela, Patricia y Camilo, para la realización de un trabajo práctico sobre la protección del medio ambiente, visitaron 14 casas de su consejo popular. Patricia visitó el doble de casas que Camilo y Gabriela dos casas más que Camilo. ¿Cuántas casas visitó cada pionero?

24. La suma de los dígitos de un número de tres cifras es 18. La cifra de las centenas es el triplo de la cifra de las unidades y la de las decenas excede en tres a la cifra de las unidades. Determina el antecesor y el sucesor de dicho número.

25. La edad actual de Ana aumentada en 8 es igual al duplo de dicha edad disminuido en 3. ¿Qué edad tendrá Ana al cabo de 15 años?

26. La cantidad de ventiladores producidos en una fábrica este año es igual al 75 % de dicha cantidad aumentado en 3 000.

    a) ¿Cuántos ventiladores produjo la fábrica este año?
    b) Si la fábrica logró sobrecumplir su plan en un 20 %, ¿cuántos ventiladores más produjo?

27. En el famoso libro de *Álgebra Recreativa* de Y. Perelman encontramos un problema titulado: ***La ecuación piensa por nosotros,*** al resolverlos descubrimos que las ecuaciones son a veces más previsoras que nosotros. Busca en este libro dicho problema y soluciónalo, será una simpática y enriquecedora experiencia. ¡No dejes de hacerlo! (fig. 3.17)

Figura 3.17

28. La firma de contratos entre productores agrícolas y el Turismo es una provechosa alternativa para consolidar el modelo económico cubano. El primer contrato de esta nueva modalidad consistió en la entrega por parte de la CCSF Camilo Cienfuegos al hotel Iberostar Taínos de una buena cantidad de frutas y vegetales,[94] la tabla siguiente esconde información sobre el tema. ¿Cuántos kilogramos de cada producto se entregarán al hotel por la CCSF?

[94] Órgano de prensa *Juventud Rebelde,* 8 de enero de 2012.

Producto	Cantidad de kilogramos
Fruta bomba	$4x - 1{,}05$
Col blanca	$x + 2{,}15$
Tomate	x
Guayaba	$x + 4$
Total	154,9

29. En gráfico de barras de la figura 3.18 se esconde información sobre el interés vocacional por la especialidad de Maestro Primario de un grupo de 35 estudiantes de séptimo grado. Fíjate que en cada techo de la barra aparece una expresión algebraica para que descubras la información.
    a) ¿A cuántos estudiantes de ese grupo les gusta ser maestro(a) primario(a)?
    b) Tú, ¿qué opción marcarías? ¿Por qué?

    Nota: Opción *I*: Me gusta, Opción *II*: Lo estudiaría, pero no es lo que más me gusta y Opción *III*: No me gusta.

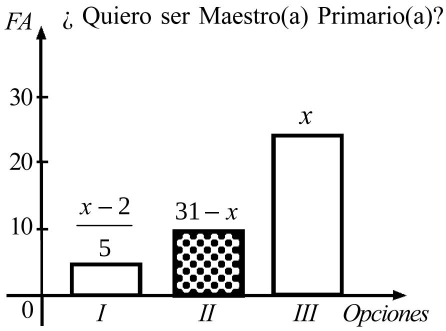


Figura 3.18

30. En la fábrica donde trabaja el papá de Alexis han hecho un experimento en el que clasifican la basura, para saber cuánto beneficio obtendrían si esta pudiera ser reciclada. Alexis con este resultado participó en el Ecocarnaval, evento didáctico de su escuela que promueve la protección del medio ambiente, observa y resuelve el ejercicio matemático que él propuso:
    En la figura 3.19, *A, B, C* y *D* son en ese mismo orden números naturales consecutivos impares y suman 96 kg. ¿Cuánto vidrio se recolectó? Responde por la vía algebraica y por la aritmética.

Una experiencia medioambiental

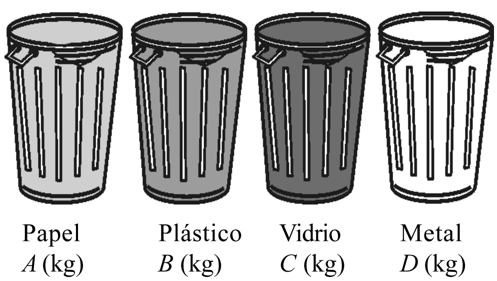


Figura 3.19

31. Elabora un problema que conduzca a una ecuación lineal con la información siguiente:

a) Cantidad de hembras y varones de tu grupo.
b) Tu edad y la de tu mamá.
c) El consumo de electricidad en tu casa o en tu escuela en dos meses consecutivos.
d) El precio del barril de petróleo durante este año respecto al anterior.
e) La producción de azúcar en nuestro país comparando los dos últimos años.
f) Cantidad de medallas (oro, plata y bronce) obtenidas por Cuba en los Juegos Olímpicos de Londres 2012.

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO

1. Escribe verdadero o falso según corresponda. En caso de las falsas, argumenta tu respuesta.

a) ___ Las ecuaciones lineales siempre tienen una sola solución.

b) ___ $2a^5 \cdot (-3a^7) = -6a^{35}$.

c) ___ La ecuación lineal $\frac{2}{3}x = \frac{3}{2}$ no tiene solución en el conjunto de los números enteros.

d) ___ El coeficiente del término $\frac{xy}{3}$ es 3.

e) ___ El valor numérico de la expresión $ab^{-1} + 2$, para $a = b$ y $b \neq 0$ es igual a 3.

f) ___ Las longitudes de los lados consecutivos de un rectángulo vienen dadas por las expresiones a cm y b cm respectivamente, entonces su perímetro quedará expresado por $4ab$ cm.

g) ___ Al calcular $\frac{2m^2 + 6m^5}{3m^2}$ se obtiene $2m^3 + \frac{2}{3}$.

h) ___ Si dos ecuaciones lineales tiene el mismo conjunto solución con el mismo dominio de la variable, se puede afirmar que son equivalentes.

i) ___ El conjunto solución de la ecuación $3x + 7 = -7 + 3x$ es el conjunto vacío.

j) ___ Los términos $-3m^2n^3p$ y $3n^3pm^2$ no son semejantes.

k) ___ La expresión en lenguaje común: "el 40 % de un número aumentado en 3", se puede escribir en lenguaje algebraico como $40x + 3$.

2. Marca con una X la respuesta correcta:

a) Si $x = 0{,}1$, entonces el valor numérico de la expresión $x^2 + x + 1$ es igual a:

___ 11,1 ___ 1,11 ___ 111 ___ 0,111 ___ 0,011 1

b) Sea la expresión $A = \left(\frac{p-q}{3}\right)^2$, el valor numérico de A para $p = 1$ y $q = -1$ es:

___ 0 ___ $\frac{1}{9}$ ___ $\frac{4}{9}$ ___ $\frac{1}{6}$ ___ $\frac{4}{3}$

c) Si $x + 0{,}8 = 0{,}7$ y $z - 0{,}9 = 0$, entonces $x + z$ es igual a:

___ – 0,8 ___ – 0,6 ___ 0,1 ___ 0,8 ___ 0,24

d) Si $a^3 = -216$, $\sqrt[b]{64} = 4$ y $5^c = 125$, entonces el valor numérico de $bc - a$ es igual a:

___ 0 ___ 3 ___ 12 ___ 15 ___ 18

e) Si $m = -1$, entonces $(-m)^3 + 3m$ toma valor:

___ – 6 ___ – 4 ___ – 2 ___ 0 ___ 4

f) La longitud del ancho de un rectángulo viene dado por la expresión $(2a - 3b)$ dm y la del largo por la expresión $(a + b)$ dm. El perímetro de dicho rectángulo se puede expresar por:

___ $(3a - 2b)$ dm ___ $(6a - 2b)$ dm

___ $(6a - 4b)$ dm ___ $(6a - 8b)$ dm

g) Pedro tiene $(n + 1)$ años. Su edad dentro de n años más será:

___ $2 + n + 1$ ___ $n^2 + n + 1$ ___ $n^2 + n$ ___ $2n + 1$ ___ $2n + 2$

h) El perímetro de un triángulo equilátero viene dado por la expresión algebraica $(x - 6)$ cm. El perímetro de un cuadrado, en centímetro, cuyo lado tiene longitud igual a la del lado del triángulo, se puede expresar como:

___ $4x - 6$ ___ $\frac{4x}{3} - 2$ ___ $\frac{4x}{3} - 8$ ___ $\frac{4x}{3} - 6$ ___ $\frac{4x}{3} - 24$

3SB019 Cap 3 Chapisteo planas.pmd 450 30/10/2013, 12:15

i) El producto del cuadrado de $3m$ por el triplo de $4n$ se puede expresar como:

___ $36m^2n$ ___ $108m^2n$ ___ $72m^2n$ ___ $576m^2n^3$ ___ $12mn$

j) Las edades de varias personas vienen dadas por las expresiones siguientes, donde x es un número natural mayor e igual que 2:

$x;\ x + 2;\ 2x + 3;\ x;\ x;\ x - 1;\ x + 2;\ x;\ x + 2;\ 2x$

La media de las edades está dada por la expresión:

___ $12x + 8$ ___ $6x + 4$ ___ $\frac{6}{5}x + 0{,}8$

___ $\frac{x+2x}{2}$ ___ Ninguna de ellas

3. Piensa en una situación de la vida práctica relacionada con la Estadística que se traduzca al lenguaje de las variables mediante la expresión siguiente: $\frac{3x+4y+5z}{x+y+z}$

4. Reduce:

a) $3a + 5b - 2{,}5a - 4b - b$ b) $\frac{x}{3} - 6{,}9 + \frac{2}{3}x + 6 - 2x$

c) $9y^2 - 6y + 2y^2 - 5 + 4y - 11y^2$ d) $3{,}2a^2b^3 - 1{,}5a^3b^2 + \frac{3}{2}a^3b^2 - 5{,}4a^2b^3$

e) $2{,}4x^4 \cdot 10x^5$ f) $-\frac{3}{5}y^{12} \cdot 15y^{18}$ g) $1{,}3a^6b^2z^8 \cdot \frac{5}{26}a^2b^4z$

h) $4p^{-2}q^3 \cdot 0{,}25p^5q^3$ i) $\frac{34a^{12}}{17a^9}$ j) $\frac{-6b^{35}}{2b^{40}}$ k) $\frac{\frac{3}{2}x^7y^8}{\frac{9}{20}x^7y^7}$

*l) $\frac{30m^{-5}n^{10}}{6m^{-6}n^{11}}$ m) $\frac{36x^8+18x^5}{6x^4}$ n) $\frac{-15y^{20}+30y^6+25y^{14}}{5y^{14}}$

ñ) $\frac{8x^4y^6-4x^3y^2-12x^5y^6}{-8x^4y^3}$

5. Calcula:

a) $3a \cdot 2a^3$ b) $(-5xy) \cdot (-1{,}4x^3y^5)$ c) $\frac{m^2n}{4} \cdot \frac{2mn^3}{3}$

d) $0{,}7p^3q^4s^3 \cdot \frac{10}{7}p^2q^3s$ e) $2x^{-2} \cdot 3x^7$ f) $8y(2y + 7)$

g) $m^2n(3m^3n^2 - mn)$ h) $4p^5 \left(\frac{3}{8}p^2 + 0{,}25p + 2{,}5\right)$ i) $\frac{256x^4y^5}{16x^2y^2}$

j) $\frac{0{,}3m^8n^{20}}{3m^8n^{21}}$ k) $\frac{\frac{2}{5}a^6}{\frac{4}{15}a^4}$ l) $(2x^3)^2 : 6x^5$

m) $\frac{36x^6 + 12x^3}{6x^3}$ n) $\frac{125a^5b - 25a^4b^2}{5a^3b}$ ñ) $\frac{\frac{1}{2}y^{18} + \frac{1}{4}y^{25}}{0{,}5y^{20}}$

o) $\frac{0{,}9m^4n^2 + 6m^2n^3 - 1{,}2mn}{3mn}$

6. Sean las expresiones algebraicas $A = 12x + 6$; $B = 3 - 7x$ y $C = 2x$.

Calcula:

a) $A + B - C$ b) $0{,}5A + B$

c) $C \cdot B + A - 6$ d) $\frac{A}{3} - 2C + B$

7. Sean las expresiones algebraicas $M = 2x^2y^3 - x^3y^2$ y $N = 3x^3y^2 + y^3x^2$

a) Determina la expresión $P = 3M + N$.

b) Halla el valor numérico de P para $x = \frac{7^{15} \cdot 49^{30}}{7^{76}}$ y $y = -\frac{0{,}000\,000\,001}{2^{-9} \cdot 5^{-9}}$ y di a qué conjunto numérico más restringido pertenece el resultado obtenido.

8. Completa la tabla:

M	N	P	$M - N + P$	$M \cdot N$	$M : N$	$\frac{M+N}{P}$
$-3xy$	$\frac{2}{3}xy$	$6yx$				
$2a^2b$	$-a^2b$	$\frac{ab}{2}$				
$3a^2 + 9b$	$3b$	$6ab$				

9. Halla el conjunto solución de las siguientes ecuaciones lineales:

a) $18 = 3x$ b) $\frac{2x}{5} = 6$ c) $x - 2 = -7$ d) $16 - x = 10$

e) $\frac{x}{3} - 1 = 3$ f) $3x + 5x = 18$ g) $6x - 2x = -8$ h) $6x - 10x = -20$

i) $\frac{x}{2} + \frac{3x}{2} = 2$ j) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5$ k) $2x + 7 = x + 14$ l) $4x - 6 = 3 - 5x$

m) $x = \frac{x}{3} + 6$ n) $\frac{4x+8}{2} = 2x + 4 = 5$ ñ) $3(x - 2) = 2x + x$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $1{,}5x - 3 = 0$ b) $-2y + 4y = 16$ c) $\frac{x}{5} - \frac{3x}{5} = 9$ d) $2x - \frac{1}{3}x + 1 = 3$

e) $5m + 0{,}5 = 2m + \frac{7}{2}$ f) $3x + 19x - 20 = 8x - 1$ g) $9 = 3(p + 2)$

h) $-4(a - 1) + 1 = 0$ i) $3(\frac{2}{3}x + 1) = 7$ j) $3x - 4 = 6(x - \frac{1}{6})$

11. Completa los espacios en blanco.

a) La mitad de un número aumentado en la unidad es igual a los tres cuartos del número. El número es igual a _______.

b) La cuarta parte de x es un octavo, entonces el valor numérico de $x + 0{,}25x$ es igual a _______.

c) El conjunto numérico más restringido al que pertenece la solución de la ecuación

$5(x - 2) + 1 = x - 3$ es _________.

d) Al multiplicar el quíntuplo de a^3 y el 20 % de a^2 se obtiene _______.

e) Al calcular $\dfrac{30a^4b^7c^5 + 25a^3b^3c^3}{15a^3b^3c^4}$ se obtiene _____________.

12. Lee detenidamente la siguiente información:

– Teresa tiene x años,

– Su hija Sara tiene 25 años menos que ella,

– La edad del papá de Sara excede en 6 años a la de su mamá.

a) Completa la siguiente tabla:

Personas	**Edad**
Teresa	x
Sara	
Papá de Sara	

b) Si la suma de las edades de los tres es igual a 101 años, halla la edad de cada uno.

13. Un ángulo recto se divide en tres ángulos de amplitudes diferentes. La amplitud del mayor de dichos ángulos, es el doble que la amplitud del menor y la amplitud del mediano excede en 10º la del menor. Determina la amplitud de cada ángulo.

14. El consumo de electricidad de una vivienda disminuyó un 20 % en febrero respecto a lo que se consumió en enero. Si el consumo en febrero fue de 120 kWh, ¿cuál fue el consumo de la vivienda en el mes de enero?

15. En la figura 3.20, $\overline{CD}$ es paralelo al lado $\overline{AB}$ del ΔABC.

$\angle ACB = x$

$\angle CAB = \dfrac{x}{2} + 5°$

$\angle BCD = 70°$

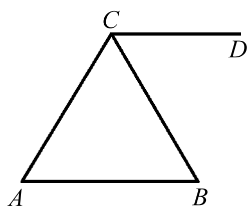


Figura 3.20

Halla la amplitud de los ángulos interiores del triángulo *ABC.*

16. En un centro de recreación se alquilan bicicletas. Por la primera hora de alquiler se deben pagar \$ 2,00, y por cada hora después de la primera se pagan \$ 2,50.

   a) ¿Por cuánto tiempo alquiló la bicicleta una persona que pagó \$ 19,50?
   b) Si una persona alquila la bicicleta por 8 h, ¿cuánto debe pagar?

17. En un triángulo isósceles, la longitud del lado base es igual al triplo de longitud de los lados iguales disminuido en 15 cm, si el perímetro del triángulo es de 40 cm, halla la longitud de cada lado.

18. Pablo realizó los exámenes de ingreso al IPVCE. En Matemática obtuvo 5 puntos más que en Español, y en Historia 8 puntos menos que en Español, por lo que su promedio fue de 94 puntos.

   a) ¿Qué nota logró Pablo en cada asignatura?
   b) ¿Qué nota debía lograr en Historia para que su promedio hubiese sido de 97 puntos?

19. La madre de Ariel y Heidi les encargó la compra de varios productos agrícolas que le hacían falta para el almuerzo. En la siguiente tabla se muestran los precios de esos productos.

   a) Si Heidi compró un melón por un precio de \$ 5,60, ¿cuántas libras tenía el melón?
   b) Ariel, por su parte, compró la misma cantidad de libras de papa que de malangas y además 10 cabezas de ajo, por lo que tuvo que pagar un total de \$ 34,00. ¿Cuántas libras de malanga compró Ariel?

Producto	**Precio**
Malanga	\$ 3,00 lb
Papa	\$ 1,00 lb
Melón	\$ 0,80 lb
Ajo	\$ 1,00 c/u

20. La siguiente balanza (fig. 3.21) se encuentra en equilibrio. Halla la masa de un cubo y de un cilindro.

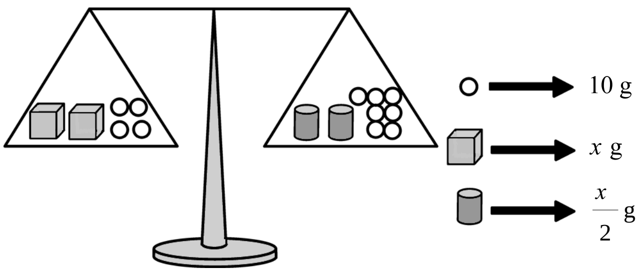


Figura 3.21

21. La torre de la figura 3.22 tiene 3 pisos y 46 varillas.

   a) Escribe una expresión algebraica que indique el número de varillas necesario para levantar una torre de igual base y n pisos de altura.
   b) ¿Cuántas varillas será necesario utilizar para levantar una torre de 10 pisos?
   c) ¿Cuántos pisos tendrá una torre donde se utilizaron 111 varillas?

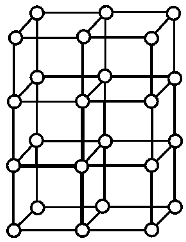


Figura 3.22

PARA LA AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona sobre lo aprendido

1. ¿Para qué se utilizan las variables en Matemática?
2. ¿Qué es un monomio?
3. ¿Sabes sumar, restar, multiplicar y dividir monomios?
4. ¿Sabes qué es una ecuación y cómo se llaman sus elementos?
5. ¿Sabes qué es resolver una ecuación lineal?
6. ¿Conoces el procedimiento que se utiliza para resolverlas?
7. ¿Sabes cómo transponer y reducir términos?
8. ¿Conoces los pasos a seguir para resolver un problema con ayuda de las ecuaciones lineales?

Ponte a prueba

1. Lee detenidamente y responde:

1.1 Escribe verdadero (V) o falso (F) según corresponda. En el caso de las falsas, argumenta el porqué.

a) ___ $2a^2b^3c$ y $-\frac{1}{3}\ cb^3a^2$ son términos semejantes.

b) ___ Las ecuaciones $3x = 12$ y $2x + 3 = x + 7$ no son equivalentes.

c) ___ $\frac{3m^2+12m}{6m} = 2m + 2$

d) ___ Si $x_0 = 5$ es la solución de la ecuación $ax + 2 = -3$, entonces el valor de a es -1.

1.2 Marca con una X la respuesta correcta.

Según el Ministerio de Trabajo y Seguridad Social el número de trabajadores por cuenta propia, hasta mayo de 2012, aumentó en 24 920 personas respecto al 2011.

1.2.1 Si designamos por x la cantidad de trabajadores por cuenta propia en el año 2011, podemos afirmar que al cierre de mayo del 2012 ejercían el trabajo por cuenta propia:

a) ___ $24\ 920x$ personas

b) ___ $(x + 24\ 920)$ personas

c) ___ $(2x + 24\ 920)$ personas

d) ___ $(24\ 920 – x)$ personas

1.2.2 Si al cierre de mayo de 2012 eran 387 275 las personas que ejercían el trabajo por cuenta propia, entonces en el 2011 lo ejercían:

a) ___ 362 355

b) ___ 412 195

c) ___ 26 931

d) ninguna de las anteriores

1.2.3 Sean a y b las longitudes de los lados de un paralelogramo. La expresión $\frac{1}{2}(a+b)$ se puede expresar en el lenguaje común como:

a) ___ el 50 % del perímetro del paralelogramo.

b) ___ el 25 % del perímetro del paralelogramo.

c) ___ el duplo de la suma de las longitudes de los lados del paralelogramo.

d) ___ la mitad de la longitud del lado a más la longitud del lado b.

2. Sean $A = 2x^2$, $B = 3x – 2$ y $C = 0{,}4x \cdot (–10x)$

a) Calcula y simplifica $A \cdot B – C$.

b) Halla el valor numérico de la expresión resultante para $x = – 0{,}5$ y di a qué conjunto numérico más restringido pertenece.

3. Con vistas al curso escolar 2012 – 2013 la Unión Poligráfica producirá, para entregar a las diferentes enseñanzas, entre libros y libretas 54 millones de útiles escolares.[95] El duplo de la cantidad de libros a producir excede en 3 millones a la cantidad de libretas.

a) ¿Cuántas libretas y cuántos libros producirá la Unión Poligráfica para el curso 2012-2013?

b) Si para el inicio del curso en septiembre se entregarán 25 millones de libretas y 13,5 millones de libros, ¿qué porcentaje de la cantidad planificada de libretas faltarán por entregar?

[95] Órgano de prensa *Granma,* 2 de julio de 2012.

Epígrafe 3.1.1

1. Inciso	**Coeficiente**	**Parte literal**	Inciso	**Coeficiente**	**Parte literal**
a)	2	x	f)	1	y^2z
b)	$\frac{1}{3}$	ab	g)	$-\frac{1}{2}$	n
c)	– 0,7	m^2	h)	$\frac{1}{5}$	a^3b^2c
d)	$-\frac{2}{5}$	p^3q^2	i)	– 7	no tiene
e)	$\frac{3}{7}$	x	j)	$\frac{1}{6}$	no tiene

3. a) $3a$ b) $\frac{b}{3}$ c) $5c$ d) $\frac{7}{20}d$ e) $\frac{2}{3}e$ f) $\frac{f}{2}+4$ g) $4g-8$ h) $h+6$

i) $i-\frac{i}{8}$ j) j y $j+1$ k) $2k$ y $2k+2$ l) $2r+1$ y $2r+3$

m) $m+(m-1)$ n) $n(n+1)$ ñ) $2\tilde{n}-\frac{\tilde{n}}{2}+3p$ o) $\frac{3}{8}o$

4. a) $x-2$ b) $\frac{1}{2}p$ c) $(2n+6)$ cm d) $(3t-2)$ e) $p+25$

5. a) $a+15$ b) $a-1$ c) $65-a$ d) $2a$ e) $a+8$ (a: Edad en el 2012)

6. a) V b) V c) F, excede en 0,71 d) F , es en 1,03 e) F, una sola blusa

7. a) $\frac{1}{10}x$ (x: Cantidad de jóvenes de secundaria)

b) $\frac{13}{20}y$ (y: Cantidad de integrantes de la delegación cubana)

c) $2z$ (z: Mortalidad infantil en menores de 1 año de los países ricos)

d) $\frac{17}{20}p$ (p: Población mundial)

e) $t + 200$ (t: Toneladas de papa cosechadas el año anterior)

f) $p+\frac{1}{20}p$ (p: Peso de Luis el mes anterior)

g) $x-\frac{1}{20}x$ (x: Precio anterior del artículo)

h) $2{,}50y$ (y: Cantidad de libras de tomate compradas)

i) $4a$ (a: Longitud del lado del cuadrado)

j) $2b^2$ (b: Longitud del lado menor)

k) $180° - \alpha$ (α: Amplitud del otro ángulo)

8. a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{N}$ d) $\mathbb{Z}$

9. a) –2 b) 1 c) – 0,7 d) 2,5 e) – 1,5 f) – 4,9
g) No existe h) 0 i) No existe j) 0 k) – 1

10. a) – 4; 0; $\frac{4}{3}$ 1,6; 4 b) – 8; – 2; 0; 0,4; 4

11. 4 y 10 (importante el orden de las operaciones)

12. a) 5 b) – 2 c) 5 d) 14 e) – 1 f) $\frac{5}{4}$

13.

Situación matemática	**Expresión algebraica en función de la variable *x***	**Valor numérico de la expresión para *x* = – 2**
El triplo de un número aumentado en 7.	$3x + 7$	1
	$\frac{2x}{5}$	$-\frac{4}{5}$
El 20 % de un número disminuido en 5.	$\frac{1}{5}x-5$	$-\frac{27}{5}$
	$\frac{x}{6}+2x$	$-\frac{13}{3}$
La suma de un número natural y su sucesor.	$x+x+1$	– 3

14. $4x$; $4x + 6$; $\frac{4x+6}{2}$; $\frac{4x+6}{2} - 1$

15. a) $2x$; $\frac{2x}{3}$; $\frac{2x}{3} + 1$ b) $2x$; $2x + 3$; $\frac{2x+3}{3}$

17. No, ya que tiene 36,5 °C de temperatura.

18 a) $\frac{p}{h^2}$

Epígrafe 3.2.1

1. a) $(x;\ 2x;\ -0{,}2x)$ b) $(1{,}2a;\ 9a)$ y $(3a^2;\ -5a^2)$ c) $(-2b^3;\ 0{,}8b^3)$

d) $(ab;\ -ab)$ y $(2a;\ -\frac{4}{3}a)$ e) $(-\frac{2}{3}mn;\ 6nm)$ f) $(3xyz;\ 2{,}5yzx;\ xzy)$

g) $(-\frac{a^2b}{4};\ 8a^2b)$ y $(ab^2;\ 8{,}82b^2a)$ h) $(4{,}5m^2n^3p^4;\ \frac{7}{5}n^3m^2p^4;\ 709n^3p^4\ m^2)$

2. a) $4a$ b) $2b$ c) $3{,}6c$ d) $7d$ e) $-0{,}4e$ f) 0 g) $6{,}1mn$ h) $-3{,}3z - 2y$

i) $-\frac{11}{3}x^2y + xy^2$ j) $2{,}6 - 1{,}5s + s^2$ k) $2p - 0{,}1q - 5pq$ l) $-2{,}05m + \frac{n}{5}$

m) $-2{,}8a - 5b - 5{,}3c + abc$ n) $\frac{9}{2}m^3n^3$ ñ) $-2xyz + 1$

3. Completa la siguiente tabla:

A	B	C	$A + B$	$A - C$	$A + B - C$
$4a$	$7a$	$2a$	$11a$	$2a$	$9a$
$2a + 3b$	a	$3b$	$3a + 3b$	$2a$	$3a$
$\frac{1}{2}m + 2n - 1$	$-\frac{1}{4}m - n + 1$	$2n$	$\frac{1}{4}m + n$	$\frac{1}{2}m - 1$	$\frac{1}{4}m - n$
$7x^2y + 2xy$	$x^2y + 2xy$	$4yx$	$8x^2y + 4xy$	$7x^2y - 2xy$	$8x^2y$

4. a) Binomio b) Monomio c) Trinomio d) Monomio
e) Binomio f) Binomio g) Monomio h) Trinomio
i) Monomio j) Binomio k) Binomio l) Trinomio
m) Monomio n) Monomio

5.

A	*B*
• Monomio con coeficiente entero y parte literal con dos variables.	$5x^2 - 3x + 7$
• Trinomio donde los coeficientes de sus términos son números primos.	$-\frac{3}{5}x^2$
• Monomio de coeficiente uno.	$-6ab^2$
• Monomio que no tiene parte literal.	$0{,}2\,mn$
• Binomio con un término elevado al cuadrado.	$2y^2 - 3y + 39$
• Monomio cuyo coeficiente es un número fraccionario y su parte literal tiene dos variables.	10
	$z^2 + 15$
	p^2q^3r
	$2x - y$

Epígrafe 3.2.2

1. a) $2a^2$ b) $27b^4$ c) $4c^{10}$ d) d^3 e) $10m^3n^4$ f) x^8y^{12}

g) $3a^5\ b^3x$ h) $\frac{3}{4}m^5n^2$ i) $-x^5y^9z^8$

2. a) $2a - 8$ b) $b^2 + 3b$ c) $-5c - 50$ d) $3d^2 - 18d$

e) $3e^2 + 8e$ f) $-2d^5 - 12d^7$ g) $0{,}6p^4 + 0{,}16p^7$ h) $-6x^3y^2 - 2{,}1x^2y^4$

i) $\frac{8}{9}m^5n^7p^3 - 8m^4n^9p^2$ j) $4x^2 + 8x + 4$ k) $2y^4 - 3y^3 + 2y$

l) $-15m^2 + 2m - 1$ m) $4p^5 + 2p^4 - 10p^3$ n) $-\frac{1}{4}t^6 + 4t^3 - 3t^2$

ñ) $8{,}5e^4 + 17e^3 + 8{,}5e^2$ o) $6x^6y^2 - 12x^6y^4 + 15x^5y$ p) $-4m^7x + 12m^5x - 28m^3n^4x$

q) $ax^6y - 4ax^5y^2 + 6ax^4y^3$ r) $a^2t^2 - \frac{5}{18}at^3$ s) $6p^2q^3 + 4{,}5p^3q^4$

t) $-0{,}2a^3x^6y^3 + \frac{1}{6}a^3x^8y^5 - 0{,}05a^3x^4y^9$ u) $\frac{2}{3}p^3q^5 + 6p^2q^4 - \frac{24}{5}p^3q^3$

Epígrafe 3.2.3

1. a) 5 b) -2 c) 8 d) $1{,}1$ e) $-2mn^3$ f) $-2ab$

g) $\frac{1}{3}yz^8$ h) $\frac{7}{2}m^2n$ i) $-35q^3r$ j) $-\frac{3}{4}m^2np^2$ *k) $\frac{5}{b}$ *l) $-40\frac{m}{n^2}$

2. a) $2a + \frac{2}{3}b$ b) $2m^2 + 4m^4$ c) $5q^6 - 4p$ d) $\frac{1}{9}b^5 + \frac{1}{3}a^7b$ e) $3 - 5x + 7x^3$

f) $2m^2 + 4m^3 - \frac{1}{2}m^6$ *g) $\frac{4}{p^2} + \frac{10}{p^4} - \frac{2}{3}$ h) $ab + b - a$ i) $6s + 2s^{28}t^6$

j) $4n + 2m - \frac{1}{8}p + \frac{1}{2}$ k) $\frac{a^7}{3b} + \frac{b^7}{4a}$ l) $8\frac{y}{x^3} + 3x^2y^{14}z^2$ m) $5x - 11x^2y + 12y$

n) $\frac{n}{8} + \frac{m}{8} - \frac{p}{8} + \frac{1}{2}$ ñ) $\frac{a^7}{3b} + \frac{b^7}{4a}$ o) $\frac{8yz^2}{x^3} + 3xzy^{14}z^2$

3. a) $6a^2$ b) $4m^{11}$ c) $10x^{10}y^{10}$ d) $\frac{1}{3}m^3n$

e) b^4 f) $4m^5$ g) $24a^3$ y $3a^3$ h) $15m^3n^2$ y $5mn$

4. a) $21xy^2z^3 + 45x^2y^3z^4 - 15x^3y^4z^5$ b) $35y^2z^4 + 75xy^3z^5 - 25x^2y^4z^6$

c) $4{,}2yz^5 + 9xy^2z^6 - 3x^2y^3z^7$ d) $42x^3 + 90x^4yz - 30x^5y^2z^2$

e) $\frac{7}{xy^2z^2} + \frac{15}{yz} - 5x$ *f) $\frac{21z^2}{2x^2} + \frac{45yz^3}{2x} - 7{,}5y^2z^3$

Epígrafe 3.3

1. a) $x = 2$ b) $y = 4$ c) $z = -2{,}5$ d) $x = 0{,}5$ e) $p = 30$ f) $x = 6$

   g) $y = 0{,}5$ h) $z = \frac{5}{4}$ i) $p = 1$ j) $x = 1{,}5$ k) $x = 2$ l) $y = 5$

   m) $p = -2$ n) $x = 1$ ñ) $x = -1$ o) $y = \frac{2}{3}$ p) $z = -\frac{1}{2}$

2. a) $S = \{6\}$ b) $S = \{3\}$ c) $S = \{-4\}$ d) $S = \{4\}$ e) $S = \{6\}$

   f) $S = \{7\}$ g) $S = \{1\}$ h) $S = \{2\}$ i) $S = \{-\frac{10}{3}\}$ j) $S = \{24\}$

   k) $S = \{225\}$ l) $S = \{12\}$ m) $S = \{-2\}$ n) $S = \{10\}$ ñ) $S = \{2\}$

   o) $S = \{3\}$ p) $S = \{-\frac{5}{2}\}$ q) $S = \{5\}$ r) $S = \{-1\}$ s) $S = \{6\}$

   t) $S = \{24\}$ u) $S = \{3\}$ v) $S = \{0\}$ w) Infinitas soluciones

3. a) $x = -2$ b) $x = 6$ c) $x = -4$ d) $a = 1$ e) $y = 14$ f) $z = 15$

   g) $b = 2$ h) $y = -\frac{2}{7}$ i) $z = 0$ j) $n = 0$ k) $a = 0{,}4$ l) N.T.S

4. a) $S = \{2\}$ b) $S = \phi$ c) $S = \{3\}$ d) $S = \phi$ e) $S = \{10\}$ f) $S = \phi$

5. d.

6.

A	*B*
$3x + 2 = 2$	$S = \phi$
$\frac{1}{2}x - 2x = -6$	$S = \{-4\}$
$-0{,}2x = -2$	$S = \{0{,}1\}$
$4 - x = 8$	$S = \{-10\}$
$2x + x - 1 = 3x + 1$	$S = \{4\}$
$5(x - 2) + 3{,}5 = -6$	$S = \{0\}$
	$S = \{10\}$
	$S = \{9\}$
	$S = \{12\}$
	$S = \{-0{,}1\}$

7.

La ecuación con $n, p, q, s, k \in \mathbb{Q}$	Se transforma en una proposición verdadera		
	Siempre	*A veces*	*Nunca*
$n + 2 = 3$		X	
$2n - 3 = 3 - 2n$		X	
$q + 12 = s + 12$		X	
$p + q = p + s$		X	
$3(n + 3) = 3n + 3$			X
$2(p - 5) = 2p - 10$	X		
$\frac{p+4}{2} = p + 2$		X	

12. a) $a = 3$ b) $a = -\frac{13}{5}$ c) $b = 0$ d) $p = 2$

13. $x = 0{,}8$

Epígrafe 3.3.1

1. 1.1. b 1.2. c 1.3. b 1.4. b
2. 2.1. b 2.2. c 2.3. e 2.4. a
3. El número es 6.
4. El duplo del número es 80.
5. El sucesor del número es 251.
6. La longitud del lado es de 24,5 cm.
7. Dentro de 6 años tendré 29.
8. El número es 3.
9. El precio de la camisa es $ 55,00.
10. A las ciudades de Cienfuegos y Matanzas las separan 180 km.
12. a) La matrícula del grupo es 46 alumnos.
    b) Faltaron ese día 6 estudiantes.
13. El padre tiene 60 años.
14. Los otros dos lados miden 5,5 cm.
15. El ángulo agudo mide 30°.
16. Entre dichos números se encuentra el número 183,5.

3SB019 Cap 3 Chapisteo planas.pmd 464 30/10/2013, 12:15

17. a) Resolvió 16 ejercicios más.
    b) Le falta por resolver un 46,7 % del total de ejercicios.
18) a) Abel recogió 20 sacos.
    b) Abel logró un 80 % de cumplimiento de la norma.
19. El precio del artículo antes de la rebaja era de $ 4,50.
20. El número es 5.
21. El área de la superficie del terreno es 80 m^2.
22. El número primo más cercano a 20 es el 19.
23. Camilo visitó 3 casas, Patricia 6 casas y Gabriela 5 casas.
24. El antecesor del número 963 es el 962 y su sucesor el 964.
25. Al cabo de 15 años Ana tendrá 26 años.
26. a) Este año la fábrica produjo 12 000 ventiladores.
    b) La fábrica produjo 2 000 ventiladores más respecto a su plan.
28. 21,4 kg
29. 4
30. 25 kg

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO

1. a) Falso, pueden tener infinitas soluciones o ninguna solución.
   b) Falso, quedaría $-6a^{12}$, ya que en un producto de potencias de igual base, los exponentes se suman.
   c) Verdadero.
   d) Falso, el coeficiente es $\frac{1}{3}$.
   e) Verdadero.
   f) Falso, quedaría expresado por $2a + 2b$.
   g) Verdadero.
   h) Verdadero.
   i) Verdadero.
   j) Falso, porque tienen la misma parte literal.
   k) Falso, quedaría traducido $\frac{2}{5}x + 3$.

2. a) 1,11 b) $\frac{4}{9}$ c) 0,8 d) 15 e) -2 f) $6a - 4b$

   g) $2n + 1$ h) $\frac{4}{3}x - 8$ i) $108m^2n$ j) $\frac{6}{5}x + 0,8$

4. a) $0{,}5a$ b) $-x-0{,}9$ c) $-2y-5$ d) $-2{,}2a^2b^3$ e) $24x^9$ f) $-9y^{30}$

g) $0{,}25a^8b^6z^9$ h) p^3q^6 i) $2a^3$ j) $\frac{-3}{b^5}$ k) $\frac{10}{3}y$ l) $5\frac{m}{n}$

m) $6x^4+3x$ n) $-3y^6+\frac{6}{y^8}+5$ ñ) $-y^3+\frac{1}{2xy}+\frac{3}{2}xy^3$

5. a) $6a^4$ b) $7x^4y^6$ c) $\frac{m^3n^4}{6}$ d) $p^5q^7s^4$ e) $6x^5$ f) $16y^2+56y$

g) $3m^5n^3-m^3n^2$ h) $\frac{3}{2}p^7+p^6+10p^5$ i) $16x^2y^3$ j) $\frac{0{,}1}{n}$ k) $\frac{3}{2}a^2$

l) $\frac{1}{3}x$ m) $6x^3+2$ n) $25a^2-5ab$ ñ) $\frac{1}{y^2}+0{,}5y^5$ o) $0{,}3m^3n+2mn^2-4$

6. a) $3x+9$ b) $-x+6$ c) $-14x^2+18x$ d) $5-7x$

7. a) $7x^2y^3$ b) $-\frac{1}{7}$ y los racionales.

8.

$M-N+P$	$M\cdot N$	$M:N$	$\frac{M+N}{P}$
$\frac{7}{3}xy$	$-2x^2y^2$	$-4{,}5$	$-\frac{7}{18}$
$3a^2b+\frac{ab}{2}$	$-2a^4b^2$	-2	$2a$
$3a^2+6b+6ab$	$9a^2b+27b^2$	$\frac{a^2}{b}+3$	$\frac{a}{2b}+\frac{2}{a}$

9. a) $S=\{6\}$ b) $S=\{15\}$ c) $S=\{-5\}$ d) $S=\{6\}$ e) $S=\{12\}$

f) $S=\{\frac{9}{4}\}$ g) $S=\{-2\}$ h) $S=\{5\}$ i) $S=\{1\}$ j) $S=\{6\}$

k) $S=\{7\}$ l) $S=\{1\}$ m) $S=\{9\}$ n) $S=\{\mathrm{R}\}$ ñ) $S=\phi$

10. a) $x = 2$ b) $y = 8$ c) $x = -22{,}5$ d) $x = \frac{6}{5}$ e) $m = 1$

f) $x = \frac{19}{14}$ g) $p = 1$ h) $a = \frac{5}{4}$ i) $x = 2$ j) $x = -1$

11. a) 4 b) 0,625 c) $\mathbb{Q}_+$ d) a^5 e) $2ab^4c + \frac{5}{3c}$

12. b) Teresa: 40 años, Sara: 15 años y su papá, 46 años.

13. 20°, 30° y 40° 14. 150 kWh. 15. $\angle ACB = 70°$, $\angle CAB = 40°$ y $\angle ABC = 70°$

16. a) 7 h. b) $ 22,00.

17. 11 cm, 11 cm y 18 cm.

18. a) Pedro logró 100 puntos en Matemática, 95 puntos en Español y 87 puntos en Historia.
    b) Debió obtener en Historia 96 puntos.

19. a) El melón pesaba 7 L.
    b) Ariel compró 6 l de malanga.

20. La masa del cubo es de 30 kg y la del cilindro de 15 kg.

21. a) $13n + 7$, n: cantidad de pisos b) 137 barillas c) 8 pisos

ANEXOS

TABLA DE CUADRADOS

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638	1,664
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,823	1,850	1,877	1,904	1,932
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,103	2,132	2,161	2,190	2,220
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,403	2,434	2,465	2,496	2,528
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,723	2,756	2,789	2,822	2,856
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,063	3,098	3,133	3,168	3,204
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,423	3,460	3,497	3,534	3,572
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,803	3,842	3,881	3,920	3,960
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,203	4,244	4,285	4,326	4,368
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,623	4,666	4,709	4,752	4,796
2,2	4,840	4,884	4,928	4,973	5,018	5,063	5,108	5,153	5,198	5,244
2,3	5,290	5,336	5,382	5,429	5,476	5,523	5,570	5,617	5,664	5,712
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,003	6,052	6,101	6,150	6,200
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,503	6,554	6,605	6,656	6,708
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,023	7,076	7,129	7,182	7,236
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,563	7,618	7,673	7,728	7,784
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,123	8,180	8,237	8,294	8,352
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,703	8,762	8,821	8,880	8,940
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,303	9,364	9,425	9,486	9,548
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,923	9,986	10,05	10,11	10,18
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91
5,1	26,01	26,11	26,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14

TABLA DE CUADRADOS

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	35,28	35,40	35,52	35,64	35,76	35,88
6,0	36,00	36,12	36,24	36,36	36,48	36,60	36,72	36,84	36,97	37,09
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58	37,70	37,82	37,95	38,07	38,19	38,32
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81	38,94	39,06	39,19	39,31	39,44	39,56
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07	40,20	40,32	40,45	40,58	40,70	40,83
6,4	40,96	41,09	41,22	41,34	41,47	41,60	41,73	41,86	41,99	42,12
6,5	42,25	42,38	42,51	42,64	42,77	42,90	43,03	43,16	43,30	43,43
6,6	43,56	43,69	43,82	43,96	44,09	44,22	44,36	44,49	44,62	44,76
6,7	44,89	45,02	45,16	45,29	45,43	45,56	45,70	45,83	45,97	46,10
6,8	46,24	46,38	46,51	46,65	46,79	46,92	47,06	47,20	47,33	47,47
6,9	47,61	47,75	47,89	48,02	48,16	48,30	48,44	48,58	48,72	48,86
7,0	49,00	49,14	49,28	49,42	49,56	49,70	49,84	49,98	50,13	50,27
7,1	50,41	50,55	50,69	50,84	50,98	51,12	51,27	51,41	51,55	51,70
7,2	51,84	51,98	52,13	52,27	52,42	52,56	52,71	52,85	53,00	53,14
7,3	53,29	53,44	53,58	53,73	53,88	54,02	54,17	54,32	54,46	54,61
7,4	54,76	54,91	55,06	55,20	55,35	55,50	55,65	55,80	55,95	56,10
7,5	56,25	56,40	56,55	56,70	56,85	57,00	57,15	57,30	57,46	57,61
7,6	57,76	57,91	58,06	58,22	58,37	58,52	58,68	58,83	58,98	59,14
7,7	59,29	59,44	59,60	59,75	59,91	60,06	60,22	60,37	60,53	60,68
7,8	60,84	61,00	61,15	61,31	61,47	61,62	61,78	61,94	62,09	62,25
7,9	62,41	62,57	62,73	62,88	63,04	63,20	63,36	63,52	63,68	63,84
8,0	64,00	64,16	64,32	64,48	64,64	64,80	64,96	65,12	65,29	65,45
8,1	65,61	65,77	65,93	66,10	66,26	66,42	66,59	66,75	66,91	67,08
8,2	67;24	67,40	67,57	67,73	67,90	68,06	68,23	68,39	68,56	68,72
8,3	68,89	69,06	69,22	69,39	69,56	69,72	69,89	70,06	70,22	70,39
8,4	70,56	70,73	70,90	71,06	71,23	71,40	71,57	71,74	71,91	72,08
8,5	72,25	72,42	72,59	72,76	72,93	73,10	73,27	73,44	73,62	73,79
8,6	73,96	74,13	74,30	74,48	74,65	74,82	75,00	75,17	75,34	75,52
8,7	75,69	75,86	76,04	76,21	76,39	76,56	76,74	76,91	77,09	77,26
8,8	77,44	77,62	77,79	77,97	78,15	78,32	78,50	78,68	78,85	79,03
8,9	79,21	79,39	79,57	79,74	79,92	80,10	80,28	80,46	80,64	80,82
9,0	81,00	81,18	81,36	81,54	81,72	81,90	82,08	82,26	82,45	82,63
9,1	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54	83,72	83,91	84,09	84,27	84,46
9,2	84,64	84,82	85,01	85,19	85,38	85,56	85,75	85,93	86,12	86,30
9,3	86,49	86,68	86,86	87,05	87,24	87,42	87,61	87,80	87,98	88,17
9,4	88,36	88,55	88,74	88,92	89,11	89,30	89,49	89,68	89,87	90,06
9,5	90,25	90,44	90,63	90,82	91,01	91,20	91,39	91,58	91,78	91,97
9,6	92,16	92,35	92,54	92,74	92,93	93,12	93,32	93,51	93,70	93,90
9,7	94,09	94,28	94,48	94,67	94,87	95,06	95,26	95,45	95,65	95,84
9,8	96,04	96,24	96,43	96,63	96,83	97,02	97,22	97,42	97,61	97,81
9,9	98,01	98,21	98,41	98,60	98,80	99,00	99,20	99,40	99,60	99,80

TABLA DE CUBOS

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,030	1,061	1,093	1,125	1,158	1,191	1,225	1,260	1,295
1,1	1,331	1,368	1,405	1,443	1,482	1,521	1,561	1,602	1,643	1,685
1,2	1,728	1,772	1,816	1,861	1,907	1,953	2,000	2,048	2,097	2,147
1,3	2,197	2,248	2,300	2,353	2,406	2,460	2,515	2,571	2,628	2,686
1,4	2,744	2,803	2,863	2,924	2,986	3,049	3,112	3,177	3,242	3,308
1,5	3,375	3,443	3,512	3,582	3,652	3,724	3,796	3,870	3,944	4,020
1,6	4,096	4,173	4,252	4,331	4,411	4,492	4,574	4,657	4,742	4,827
1,7	4,913	5,000	5,088	5,178	5,268	5,359	5,452	5,545	5,640	5,735
1,8	5,832	5,930	6,029	6,128	6,230	6,332	6,435	6,539	6,645	6,751
1,9	6,859	6,968	7,078	7,189	7,301	7,415	7,530	7,645	7,762	7,881
2,0	8,000	8,121	8,242	8,365	8,490	8,615	8,742	8,870	8,999	9,129
2,1	9,261	9,394	9,528	9,664	9,800	9,938	10,08	10,22	10,36	10,50
2,2	10,65	10,79	10,94	11,09	11,24	11,39	11,54	11,70	11,85	12,01
2,3	12,17	12,33	12,49	12,65	12,81	12,98	13,14	13,31	13,48	13,65
2,4	13,82	14,00	14,17	14,35	14,53	14,71	14,89	15,07	15,25	15,44
2,5	15,63	15,81	16,00	16,19	16,39	16,58	16,78	16,97	17,17	17,37
2,6	17,58	17,78	17,98	18,19	18,40	18,61	18,82	19,03	19,25	19,47
2,7	19,68	19,90	20,12	20,35	20,57	20,80	21,02	21,25	21,48	21,72
2,8	21,95	22,19	22,43	22,67	22,91	23,15	23,39	23,64	23,89	24,14
2,9	24,39	24,64	24,90	25,15	25,41	25,67	25,93	26,20	26,46	26,73
3,0	27,00	27,27	27,54	27,82	28,09	28,37	28,65	28,93	29,22	29,50
3,1	29,79	30,08	30,37	30,66	30,96	31,26	31,55	31,86	32,16	32,46
3,2	32,77	33,08	33,39	33,70	34,01	34,33	34,65	34,97	35,29	35,61
3,3	35,94	36,26	36,59	36,93	37,26	37,60	37,93	38,27	38,61	38,96
3,4	39,30	39,65	40,00	40,35	40,71	41,06	41,42	41,78	42,14	42,51
3,5	42,88	43,24	43,61	43,99	44,36	44,74	45,12	45,50	45,88	46,27
3,6	46,66	47,05	47,44	47,83	48,23	48,63	49,03	49,43	49,84	50,24
3,7	50,65	51,06	51,48	51,90	52,31	52,73	53,16	53,58	54,01	54,44
3,8	54,87	55,31	55,74	56,18	56,62	57,07	57,51	57,96	58,41	58,86
3,9	59,32	59,78	60,24	60,70	61,16	61,63	62,10	62,57	63,04	63,52
4,0	64,00	64,48	64,96	65,45	65,94	66,43	66,92	67,42	67,92	68,42
4,1	68,92	69,43	69,93	70,44	70,96	71,47	71,99	72,51	73,03	73,56
4,2	74,09	74,62	75,15	75,69	76,23	76,77	77,31	77,85	78,40	78,95
4,3	79,51	80,06	80,62	81,18	81,75	82,31	82,88	83,45	84,03	84,60
4,4	85,18	85,77	86,35	86,94	87,53	88,12	88,72	89,31	89,92	90,52
4,5	91,13	91,73	92,35	92,96	93,58	94,20	94,82	95,44	96,07	96,70
4,6	97,34	97,97	98,61	99,25	99,90	100,5	101,2	101,8	102,5	103,2
4,7	103,8	104,5	105,2	105,8	106,5	107,2	107,9	108,5	109,2	109,9
4,8	110,6	111,3	112,0	112,7	113,4	114,1	114,8	115,5	116,2	116,9
4,9	117,6	118,4	119,1	119,8	120,6	121,3	122,0	122,8	123,5	124,3
5,0	125,0	125,8	126,5	127,3	128,0	128,8	129,6	130,3	131,1	131,9
5,1	132,7	133,4	134,2	135,0	135,8	136,6	137,4	138,2	139,0	139,8
5,2	140,6	141,4	142,2	143,1	143,9	144,7	145,5	146,4	147,2	148,0
5,3	148,9	149,7	150,6	151,4	152,3	153,1	154,0	154,9	155,7	156,6
5.4	157,5	158,3	159,2	160,1	161,0	161,9	162,8	163,7	164,6	165,5

TABLA DE CUBOS

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	166,4	167,3	168,2	169,1	170,0	171,0	171,9	172,8	173,7	174,7
5,6	175,6	176,6	177,5	178,5	179,4	180,4	181,3	182,3	183,3	184,2
5,7	185,2	186,2	187,1	188,1	189,1	190,1	191,1	192,1	193,1	194,1
5,8	195,1	196,1	197,1	198,2	199,2	200,2	201,2	202,3	203,3	204,3
5,9	205,4	206,4	207,5	208,5	209,6	210,6	211,7	212,8	213,8	214,9
6,0	216,0	217,1	218,2	219,3	220,3	221,4	222,5	223,6	224,8	225,9
6,1	227,0	228,1	229,2	230,3	231,5	232,6	233,7	234,9	236,0	237,2
6,2	238,3	239,5	240,6	241,8	243,0	244,1	245,3	246,5	247,7	248,9
6,3	250,0	251,2	252,4	253,6	254,8	256,0	257,3	258,5	259,7	260,9
6,4	262,1	263,4	264,6	265,8	267,1	268,3	269,6	270,8	272,1	273,4
6,5	274,6	275,9	277,2	278,4	279,7	281,0	282,3	283,6	284,9	286,2
6,6	287,5	288,8	290,1	291,4	292,8	294,1	295,4	296,7	298,1	299,4
6,7	300,8	302,1	303,5	304,8	306,2	307,5	308,9	310,3	311,7	313,0
6,8	314,4	315,8	317,2	318,6	320,0	321,4	322,8	324,2	325,7	327,1
6,9	328,5	329,9	331,4	332,8	334,3	335,7	337,2	338,6	340,1	341,5
7,0	343,0	344,5	345,9	347,4	348,9	350,4	351,9	353,4	354,9	356,4
7,1	357,9	359,4	360,9	362,5	364,0	365,5	367,1	368,6	370,1	371,7
7,2	373,2	374,8	376,4	377,9	379,5	381,1	382,7	384,2	385,8	387,4
7,3	389,0	390,6	392,2	393,8	395,4	397,1	398,7	400,3	401,9	403,6
7,4	405,2	406,9	408,5	410,2	411,8	413,5	415,2	416,8	418,5	420,2
7,5	421,9	423,6	425,3	427,0	428,7	430,4	432,1	433,8	435,5	437,2
7,6	439,0	440,7	442,5	444,2	445,9	447,7	449,5	451,2	453,0	454,8
7,7	456,5	458,3	460,1	461,9	463,7	465,5	467,3	469,1	470,9	472,7
7,8	474,6	476,4	478,2	480,0	481,9	483,7	485,6	487,4	489,3	491,2
7,9	493,0	494,9	496,8	498,7	500,6	502,5	504,4	506,3	508,2	510,1
8,0	512,0	513,9	515,8	517,8	519,7	521,7	523,6	525,6	527,5	529,5
8,1	531,4	533,4	535,4	537,4	539,4	541,3	543,3	545,3	547,3	549,4
8,2	551,4	553,4	555,4	557,4	559,5	561,5	563,6	565,6	567,7	569,7
8,3	571,8	573,9	575,9	578,0	580,1	582,2	584,3	586,4	588,5	590,6
8;4	592,7	594,8	596,9	599,1	601,2	603,4	605,5	607,6	609,8	612,0
8,5	614,1	616,3	618,5	620,7	622,8	625,0	627,2	629,4	631,6	633,8
8,6	636,1	638,3	640,5	642,7	645,0	647,2	649,5	651,7	654,0	656,2
8,7	658,5	660,8	663,1	665,3	667,6	669,9	672,2	674,5	676,8	679,2
8,8	681,5	683,8	686,1	688,5	690,8	693,2	695,5	697,9	700,2	702,6
8,9	705,0	707,3	709,7	712,1	714,5	716,9	719,3	721,7	724,2	726,6
9,0	729,0	731,4	733,9	736,3	738,8	741,2	743,7	746,1	748,6	751,1
9,1	753,6	756,1	758,6	761,0	763,6	766,1	768,6	771,1	773,6	776,2
9,2	778,7	781,2	783,8	786,3	788,9	791,5	794,0	796,6	799,2	801,8
9,3	804,4	807,0	809,6	812,2	814,8	817,4	820,0	822,7	825,3	827,9
9,4	830,6	833,2	835,9	838,6	841,2	843,9	846,6	849,3	852,0	854,7
9,5	857,4	860,1	862,8	865,5	868,3	871,0	873,7	876,5	879,2	882,0
9,6	884,7	887,5	890,3	893,1	895,8	898,6	901,4	904,2	907,0	909,9
9,7	912,7	915,5	918,3	921,2	924,0	926,9	929,7	932,6	935,4	938,3
9,8	941,2	944,1	947,0	949,9	952,8	955,7	958,6	961,5	964,4	967,4
9,9	970,3	973,2	976,2	979,1	982,1	985,1	988,0	991,0	994,0	997,0