1
CAPÍTULO

El dominio de los números racionales

1.1 Relación de inclusión entre números naturales, enteros y racionales. Su utilización en el análisis e interpretación de datos de carácter estadístico

1. a) $-385 < -9{,}4 < 0 < \frac{1}{7} < 5\frac{1}{3} < 18{,}2$.

   b) $-148 < -7\frac{1}{10} < 0{,}4 < 7\frac{1}{10} < 35{,}161$.

   c) $-0{,}5 < -\frac{1}{5} < 0 < \frac{31}{3} < 14{,}3$.

2. $\underline{V}$ $4{,}010\,1\ldots \in \mathbb{Q}_+$.

   $\underline{F}$ –18,25 es un número fraccionario y racional; ($\underline{V}$ –18,25 es un número fraccionario o racional).

   $\underline{V}$ –945 es un número racional.

   $\underline{F}$ 48,25 es una expresión decimal periódica finita; ($\underline{V}$ 48,25 es una expresión decimal finita).

   $\underline{V}$ –3,011 03 es un número racional.

   $\underline{V}$ 2 028 es un número entero.

   $\underline{F}$ El resultado de dividir dos números enteros es siempre un número entero; ($\underline{V}$ El resultado de dividir dos números enteros no siempre es un número entero).

   $\underline{V}$ $5{,}\overline{01} \in \mathbb{Q}$.

3. a) $M = \{0\}$;

   $$D = \left\{\frac{1}{4};\ 7{,}010\,1\ldots;\ 5\frac{1}{2};\ 2{,}53;\ 1{,}\overline{7};\ \frac{1}{3}\right\};$$

$T = A$ o $T = \left\{-\sqrt{36}; -2; 0; \frac{1}{4}; 7{,}010\ 1...; 5\frac{1}{2}; 2{,}53; 1{,}\overline{7}; \frac{1}{3}\right\}$;

$H = \left\{7{,}0101...; 1{,}\overline{7}; \frac{1}{3}\right\}$.

Observa que en este conjunto se incluye $\frac{1}{3}$, pues aunque está escrito como fracción común, se puede expresar como una expresión decimal infinita periódica 0,333 333 3...

b) • $\{0\}$;

• $\left\{-\sqrt{36}; -2; \frac{1}{4}; 7{,}010\ 1...; 5\frac{1}{2}; 2{,}53; -1{,}\overline{7}; \frac{1}{3}\right\}$;

• $\{\ \}$ o ϕ.

4. Sugerencia: determina el número en cada caso.

$A = 583$ $B = 5\ 004$ $C = 5\ 009$ $D = 0{,}002\ 5$ $E = -3$ $F = -8$

a) 5 009 > 5 004 > 583 > 0,002 5 > –3 > –8.

b) $M = \{-8; -3; 0{,}002\ 5; 583; 5\ 004; 5\ 009\}$.

5. a) Entre –12 y –11.
b) El éter.
c) Agua, CO_2; éter; parafina.

6. En el par 2 y $\frac{5}{2}$; porque 2,25 > 2 y $\frac{5}{2} = 2{,}5$, por tanto, 2,5 > 2,25.

7. Sugerencia: representa los números en una recta numérica o determina un denominador común. Puedes también transformar las fracciones a expresiones decimales y representarlas en la recta numérica.

a) $\frac{13}{20}$. b) $\frac{5}{12}$.

8. En el par $-\frac{23}{5}$ y -4, porque $-\frac{23}{5} = -4{,}6$ y $-4{,}05 > -4{,}6$ pero $-4{,}05 < -4$.

9. Sugerencia: representa los números en una recta numérica o determina el denominador común.

a) $-\frac{37}{10}$. b) –2,51.

10. a) 8 208. b) 27,676. c) 2 368.

d) 20 400. e) 730. f) $5{,}1\overline{6}$.

g) 4 112,882. h) 42. i) –82,06.

j) $-\frac{3}{5}$ o $-0{,}6$. k) –2,04. l) –1.

10.1. Existen diversas respuestas para el ejercicio. Por ejemplo:

(–13,838) · (–2) o (6,919 · 4) o (138,38 · $\frac{1}{5}$) o ...

10.2. (10,5 : 0,25) o (–6 : $-\frac{1}{7}$) o (31,5 : $\frac{3}{4}$) o ...

11. Ejercicio 4 del libro de texto de noveno grado, p. 203.

a) 38,74. b) –66,78. c) $\frac{1}{9}$. d) $-\frac{5}{36}$.

e) 5,92. f) $\frac{61}{42}$ o $1\frac{19}{42}$. g) $\frac{79}{2}$ o $39\frac{1}{2}$ o 39,5. h) $1\frac{1}{15}$.

i) 17,8. j) 1,5. k) –232,7. l) –0,27.

m) 1. n) 15,85. ñ) 396,16. o) 12,2.

Ejercicio 5 del libro de texto de noveno grado, p. 203.

a) 92. b) 263. c) –27.

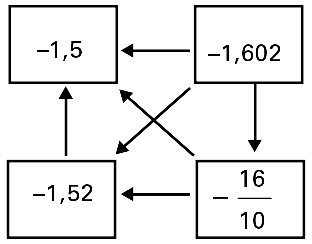
d) 125,5. e) 30,8. f) –11,6.

g) 47. h) 570,3. i) –27,78.

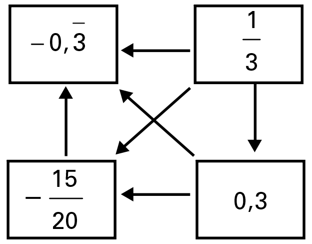
j) 4. k) 0,2. l) 0,529.

12. a) $\sqrt{\frac{1}{25}}; -3,5.$ b) 0; 147 853. c) $-\frac{3}{4}; -25,\overline{03}$

13. a)



b)



14. En este ejercicio el primero no es un cuadrado mágico, por lo que no puede completarse, el resto sí.

139	132	
	139	
		223

9	–5	**5**
–1	**3**	7
1	11	**–3**

–5	9	–1
5	**1**	–3
3	–7	7

1	–13	6
3	–2	–7
–10	9	**–5**

15. 1,9.

16. 1,04.

17. 100.

18. $ 324.00. (Nota que si se dieron 4 cortes, son 5 pedazos.)

19. Sugerencia: Ubica el 0 y el 1 donde corresponda en la recta numérica.

F $d = 0$. Porque d está a la izquierda del cero y representa el –0,5.

F $-b < e$. Porque $b < e$, por tanto, $-b > e$.

F $d \in \mathbb{Z}$. Porque d representa el número –0,5; o porque d es un número que se encuentra entre 0 y –1 por lo que no es un número entero.

F $a < -2$. Porque $a = -2$.

F $a = -1,1$. Porque $a = -2$.

V $|a| > 0,5$.

F $0 < e < 0,2$. Porque $e = 0,3$, por tanto, $0 < e \leq 0,3$ o porque aunque $e > 0$ también $e > 0,2$.

V c y d son negativos.

20. a) V $-2c > b$ V $-d > a$

F $d > a$ V $3a < b$

b) No $b = 2a + c$; $5 \neq 2(1) + (-4)$. Sí $d = c + a$.

Sí $b \neq a - 3$. Sí $-c - d = 2a + b$.

21. a) 100. b) $\frac{11}{3}$. c) 10,2 o $\frac{51}{5}$.

d) 47. e) 1,4. f) 53,04 o $\frac{1\,326}{25}$ o $53\frac{1}{5}$.

Nota: En el inciso e) debes sustituir $\sqrt{125}$ por $\sqrt[3]{125}$ para que te dé la respuesta que aparece.

22. 98,1.

23. 33.

24. Ninguno de los anteriores.

25. d) No es posible que a y b sean positivos simultáneamente.

26. En el primer plazo se pagan $ 316,00; en el segundo, $ 79,00 al igual que en el tercero.

27. La señora utilizó 6,0 m para confeccionar la sábana y ha utilizado la mitad de la pieza.

28. a) $-18 + 2 = \boxed{-16}$

$3 + \boxed{-16} = -13$

$-13 \cdot 2 = -26$

$-26 : 13 = -2$

b) $2 \cdot \boxed{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$

$1\frac{2}{3} + \boxed{-\frac{1}{2}} = \frac{7}{6}$

$\frac{7}{6} - \frac{43}{24} = -\frac{5}{8}$

$-\frac{25}{6} : -\frac{5}{8} = \frac{20}{3}$

Nociones de estadística

1. V El total de los cultivos de vegetales y arroz es mayor que el cultivo de caña.

2. 120.

3. a)

Deportes	Preferencias
Béisbol	40 %
Voleibol	25 %
Baloncesto	25 %
Otros deportes	5 %
Ningún deporte	5 %

b) Ver figura 1.

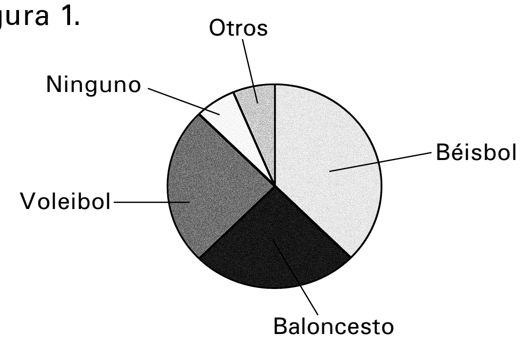


Fig. 1

c) 320 estudiantes prefieren béisbol; 200 estudiantes, voleibol; 200 estudiantes, baloncesto; 40 estudiantes prefieren otros deportes y 40 estudiantes no prefieren ningún deporte.

4. La respuesta correcta la tiene Marcos.

5. a) 9. b) a y $b + 1$ (bimodal). c) $n + 1$.

6. a) 1,28. b) a. c) $a + 1$.

7. F La moda es siempre igual a la mediana.
F La media aritmética es siempre distinta de la mediana.
F La moda es siempre distinta de la mediana y de la media.
V Moda, media y mediana pueden ser iguales.

8. a) 8,2 puntos.
b) El 50 % de los alumnos tiene notas iguales o inferiores a 8.
c) El 70 % de los alumnos tiene notas superiores a 7.
d) La moda es 9 y la mediana es 8,5.

9. a) La población son todos los estudiantes de la ESBEC (Escuela Secundaria Básica en el Campo) y la muestra son 30 estudiantes.

b)

Datos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa (%)
34	1	$\frac{1}{30} = 0{,}0\overline{3}$	3
35	2	$\frac{2}{30} = 0{,}0\overline{6}$	7

Datos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa (%)
36	2	$\frac{2}{30} = 0{,}0\overline{6}$	7
37	4	$\frac{4}{30} = 0{,}1\overline{3}$	13
38	5	$\frac{5}{30} = 0{,}1\overline{6}$	17
39	6	$\frac{6}{30} = 0{,}2$	20
40	3	$\frac{3}{30} = 0{,}1$	10
41	3	$\frac{3}{30} = 0{,}1$	10
42	3	$\frac{3}{30} = 0{,}1$	10
43	1	$\frac{1}{30} = 0{,}0\overline{3}$	3
Total	30	$\frac{30}{30} = 1{,}00$	100

c) Calzan el 38, cinco alumnos.
d) Calzan menos de un 40, 20 alumnos y de ellos 14 calzan un número menor o igual que 38.
e) El 20 % de los estudiantes calza el 39, el 10 % calza el 40 y el 10 % calza el 41.
f) La media es 38,7; la moda es 39; la mediana es 38,5.
g) Ver figura 2.

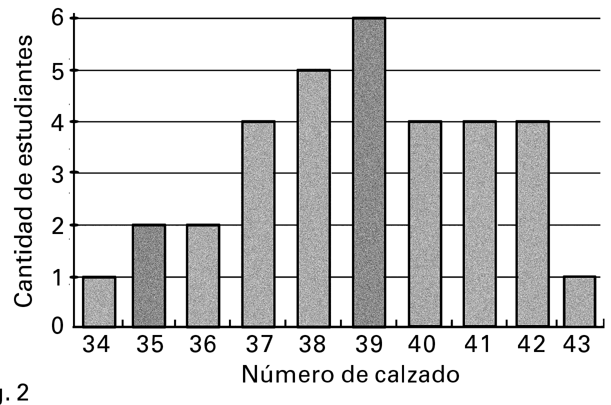


Fig. 2

10. 30 años.

11. 23 años.

12. a) Gráfica de barra.
b) En el concurso participaron 20 alumnos.
c) La moda es 8.
d)

Datos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa (%)
6	4	$\frac{4}{20} = 0{,}2$	20
7	3	$\frac{3}{20} = 0{,}15$	15
8	7	$\frac{7}{20} = 0{,}35$	35
9	5	$\frac{5}{20} = 0{,}25$	25
10	1	$\frac{1}{20} = 0{,}05$	5
Total	20	$\frac{20}{20} = 1{,}00$	100

e) El promedio de notas es 7,8.
f) La mediana es 8.
g) El 30 % de los alumnos obtuvo notas superiores a 8 puntos.

13. a) Ver figuras 3 y 4.

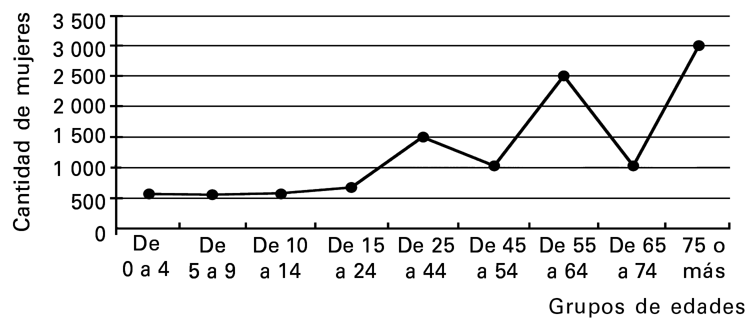


Fig. 3

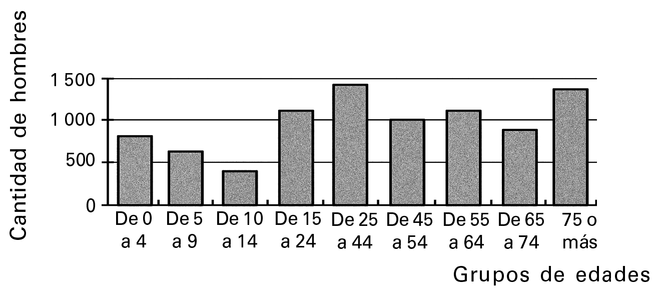


Fig. 4

b) Ver figura 5.

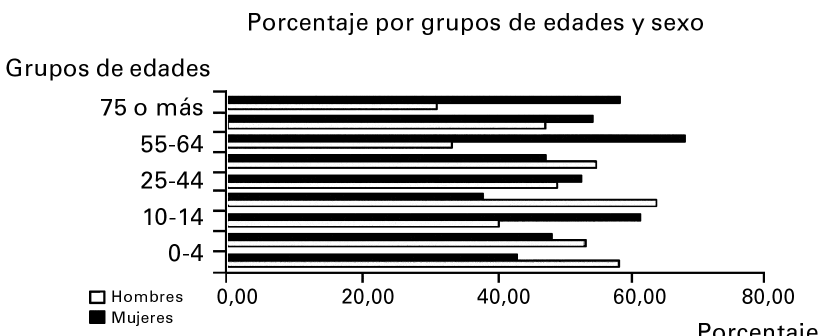


Fig. 5

c) Las mujeres sufren menos accidentes que los hombres en los grupos de edades siguientes: 0 a 4; 5 a 9; 15 a 24 y de 45 a 54.

d) Las mujeres accidentadas respecto al total de accidentados representan aproximadamente el 68,6 %.

14. a) La población de El Salvador es de 6 380 000 habitantes.

b) Extensión territorial de Perú: Un millón doscientos ochenta y cinco mil ochocientos quince kilómetros cuadrados.
Tasa de mortalidad infantil de Cuba: Siete coma uno o siete unidades y una décima o setenta y una décimas.

c)

País	Área en km²
El Salvador	21 041
Haití	27 750
Cuba	110 920
Perú	1 285 815
Estados Unidos	9 372 814

d) El índice de mortalidad infantil de Haití respecto al de Cuba es aproximadamente 14,51 veces mayor.

e) El territorio de Cuba está contenido aproximadamente 84,5 veces en el de Estados Unidos.

f) La población de Haití excede a la de El Salvador en 40 000 habitantes.

g) El área territorial de Perú excede a la de Cuba en 1 174 895 km².

h) Ver figura 6.

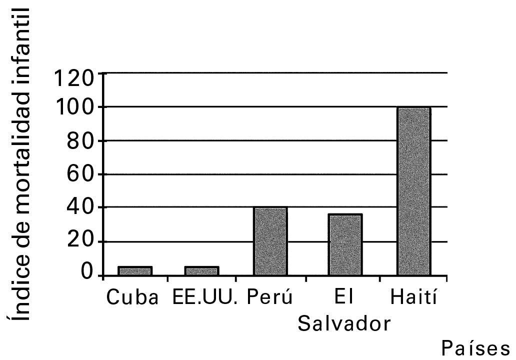


Fig. 6

15. a)

País	Población	Mortalidad infantil	Superficie en km²
Cuba	11 217 000	7,1	110 920
Angola	12 870 000	19	1 245 700
Japón	128 876 000	8	377 837
Grecia	10 596 000	10,4	131 957

b) La cantidad de habitantes de Japón es de: Ciento veintiocho millones ochocientos setenta y seis mil.

c) En Angola son analfabetos 59 de cada 100 habitantes.
En Japón son analfabetos 10 de cada mil habitantes.

d)

País	Población
Grecia	10 596 000
Cuba	11 217 000
Angola	12 870 000
Japón	128 876 000

e) Densidad de población, cantidad de individuos existentes en una población en relación con la superficie en que habitan. Es un modo de reflejar la abundancia, lo que, a su vez, nos indica el grado de concentración de individuos en el territorio.

g) Ver figura 7.

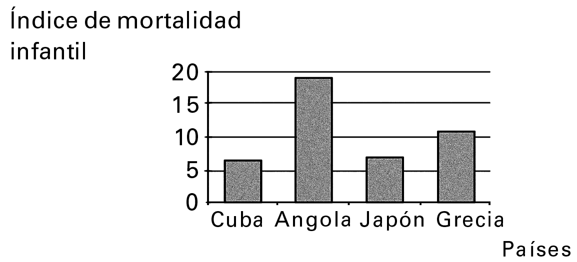


Fig. 7

1.2 Potenciación y radicación en los números racionales

1. a) $\frac{1}{2}$. b) $(0,2)^{-1}$ o 5. c) $\frac{1}{9}$. d) $\frac{6}{5}$ o $1\frac{1}{5}$.

 e) $\frac{1}{27}$. f) 3. g) 12,6. h) $7,1 \cdot 10^{-1}$ o 0,71.

2. a) –32. b) 1 331. c) $\frac{1}{49}$. d) 729.

 e) 16. f) 0,656. g) $\frac{16}{9}$. h) 0,25.

 i) 4. j) $\frac{1}{49}$. k) $\frac{1}{729}$. l) 1.

 m) $\frac{8^5 \cdot 8^{-2}}{4^3} = 8$. n) 28,1. ñ) $4^3 \cdot 8^{-2} + 3^0 = 2$. o) $\frac{4}{27}$.

3. a) No se puede simplificar porque los factores que intervienen son distintos.
 b) 99.
 c) 0.
 d) En el cuaderno aparece la expresión $\frac{3^8 \cdot 2^2 \cdot 3^8}{3}$. y debe ser la expresión $\frac{3^8 \cdot 2^2 - 3^8}{3}$.

 Nota: En este ejercicio pueden seleccionarse dos respuestas correctas: 3^8 o $3^7 \cdot 2^2 - 3^7$.

4. a) 1) $\frac{3^2}{2^4 \cdot 5^5 \cdot 7}$. 2) $2^{-4} \cdot 3^2 \cdot 5^{-5} \cdot 7^{-1}$.

 b) $\frac{a^3 \cdot c^2}{b}$. 2) $a^3 \cdot b^{-1} \cdot c^2$.

5. Tierra - Sol $1,5 \cdot 10^8$ km.
 Tierra - Alfa Centauro $4 \cdot 10^6$ m.
 Tierra - Galaxia Audio Media $7,6 \cdot 10^{18}$ km.
 Radio medio de La Tierra $6,37 \cdot 10^6$ m.

6. Diámetro de la Luna $3,4 \cdot 10^6$.
 Diámetro de la Tierra $1,27 \cdot 10^7$.
 El diámetro de la Tierra es aproximadamente 3,7 veces mayor que el de la Luna.

7. $7,05 \cdot 10^{64}$.

8. a) $-\frac{5}{3} = -1,\overline{6}$ b) $0,2 = 2,0 \cdot 10^{-1}$ c) 20. d) 5.

9. a) $\approx$ 68,572.
 b) $\approx$ 946 691,4.

10. a) Puede contener $3,01 \cdot 10^{21}$ moléculas de gas.
 b) Ha inspirado $4,515 \cdot 10^{22}$ moléculas de aire.

11. Entero positivo.

12. Este ejercicio se propondrá después que se explique el teorema de Pitágoras en el capítulo 3 con la finalidad de vincular la geometría con el cálculo.
Sugerencia: Para dibujar los rectángulos se puede fijar la longitud de uno de sus lados y, conocida la longitud de la diagonal, calcular el otro lado. En el caso del cuadrado basta, a partir de la longitud de la diagonal, determinar la longitud de los lados.

13. El lado tiene como medida en centímetro un número irracional positivo.

14. A cada persona, $\frac{8,5}{120}$ km^2.

15. a) $\mathbb{Q}$. b) $\mathbb{I}$. c) $\mathbb{Q}_+$. d) $\mathbb{Q}_+$. e) $\mathbb{N}$. f) $\mathbb{Z}$. g) $\mathbb{Q}$. h) $\mathbb{Q}_+$.
i) $\mathbb{I}$. j) $\mathbb{Q}_+$. k) $\mathbb{Q}$. l) $\mathbb{N}$. m) $\mathbb{N}$. n) $\mathbb{I}$. ñ) $\mathbb{Z}$. o) $\mathbb{Z}$.

16. a.

17. a) $a = 8$. b) $x = \frac{1}{2}$. c) $m = 4$.
d) En este ejercicio en vez de m^{29} que aparece en el denominador debe ser m^{49} y la respuesta correcta es $m = 1,5$.

18. $0,7 \cdot 10^4$.

2 CAPÍTULO

Proporcionalidad, función y ecuación

2.1 La proporcionalidad directa e inversa

1. a) 8. b) 42. c) $\frac{1}{32}$.

2. a) $\frac{8}{10}; \frac{12}{15}; \frac{16}{20}$.
b) $\frac{24}{6}; \frac{36}{9}; \frac{48}{12}$.

3. a) $\frac{1}{2}$. b) $\frac{5}{3}$.

4. a) $\frac{8}{9}$. b) 3. c) 50. d) 2.

5. 15 y 3.

6. $\frac{5}{10}$ y $\frac{0,2}{0,4}$.

7. b) $a = 10$. b) $a = 7,5$. c) $a = 20$. d) $a = 40$ o $a = -40$.

8. Están categorizados como Rebeldes 210 pioneros.

9. Hay 21 hembras más que varones en la acampada.

10. Se dejaron de anotar 36 canastas. (Observa que si se anotan 3 canastas por cada 7 tiros, dejan de anotarse 4 canastas por cada 7 tiros. Aplicando la proporción 4 : 7 = x : 63 puede llegarse a la respuesta x representa la cantidad de canastas que dejaron de anotarse.)

11. Asistieron al campismo 66 personas.

12. Había en la alcancía $7,20.

13. a) Representan magnitudes inversamente proporcionales porque los valores de la segunda variable tiempo (t) se obtienen de multiplicar por 100 los recíprocos de la primera variable velocidad (v) o porque al disminuir la velocidad, el tiempo aumenta proporcionalmente. El factor de proporcionalidad es 100.
    b) No representan magnitudes directamente proporcionales ni inversamente proporcionales.
    c) No representan magnitudes directamente proporcionales ni inversamente proporcionales.
    d) Representan magnitudes directamente proporcionales porque los valores de una de las variables se obtienen multiplicando por un mismo número los valores correspondientes de la otra o porque en la medida que aumente el tiempo de trabajo, aumenta el salario proporcionalmente. El factor de proporcionalidad es 1,5.

14. a) 6,0 dm^3. b) 15. c) 48.
    d) 7 h. e) 27 h.

2.2 La función lineal

1. a) No es una función porque existen elementos del conjunto de partida que no tienen correspondiente en el conjunto de llegada. Por ejemplo, el elemento 5 pertenece al conjunto de partida y no tiene correspondiente en el conjunto de llegada.
   b) Sí es una función porque a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada.
   c) No es una función porque existe un elemento del conjunto de partida (conjunto A) que tiene dos correspondientes en el de llegada (conjunto B).
   d) Sí es una función porque a cada elemento del conjunto de partida (representado en el eje x) le corresponde un único elemento del conjunto de llegada (representado en el eje y).

2. a) Es falsa porque no basta con la ecuación que la define, también debe conocerse el conjunto de partida y el de llegada. Es necesario conocer, además, en qué conjuntos la correspondencia está definida.
   c) Es falsa porque existen muchos gráficos que no corresponden a funciones, por ejemplo, el gráfico correspondiente a la ecuación $x = 2$ no representa una función, ya que a un mismo valor de x que en este caso es 2 se le hace corresponder infinitos valores de y.
   e) Es falsa porque al estar definida la correspondencia de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ por la relación que se establece entre sus elementos los números naturales diferentes del cero no tienen correspondiente en el conjunto de llegada, por ejemplo, el opuesto de 2 es –2 y –2 no pertenece al conjunto de los números naturales.
   f) Es falsa porque la función no está definida para $x_0 = 0$, por tanto, su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. a)

t	0	2	4	6	8	10
x	0	3	6	**9**	**12**	**15**

   b) Sí, porque a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada.
   c) t: variable independiente.
   x: variable dependiente.
   d) $x = \frac{3}{2}t$.

4. a) $b = \frac{20}{a}$ define una función porque para todo $a > 0$ le corresponde un único valor de b.
   b) a: variable independiente.
   b: variable dependiente.
   c) Si $a = 2,5$ cm, entonces $b = 8,0$ cm.
   $P = 2(a + b) = 2\ (2,5 \text{ cm} + 8 \text{ cm}) = 21$ cm.

5. a) $d = 60t$ es una función porque a cada valor de t corresponde un único valor de d.
   b) $d(1,5) = 60 \cdot 1,5 = 90$, luego $d = 90$ cm.
   $d(2) = 60 \cdot 2 = 120$, luego $d = 120$ cm.

c) $120 = 60t$.
$2 = t$, luego $t = 2$ h.
$30 = 60$.
$0{,}5 = t$, luego $t = 0{,}5$ h.

6. a) $V = a^3$. b) $d = 30t$. c) $a = \frac{p}{4}$.
d) $C = 3t + 15$. e) $v = \frac{d}{2}$. f) $h = \frac{35}{b}$. g) $b = \frac{2}{5}A$.

7. a)

x	0	1	2	3	4
y	5	8	11	14	17

b) Ver figura 8.

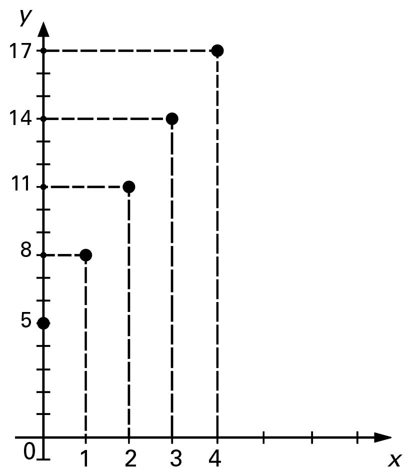


Fig. 8

c) $y = 3x + 5$ es una función porque a cada elemento del conjunto de partida M se le hace corresponder un único elemento del conjunto de llegada.
d) Dominio: El conjunto M.
Conjunto imagen: {5; 8; 11; 14; 17}.

8. a) Al sustituir $f\left(\frac{1}{2}\right)$ en la ecuación de la función f y realizar los cálculos que se indican, da como resultado 2, al calcular $g(0)$ en la función g se obtiene como resultado –1 y al evaluar la función h en $\left(\frac{1}{3}\right)$ y realizar los cálculos, se obtiene como resultado –2. Luego al sustituir cada valor obtenido en la expresión y realizar los cálculos, se obtiene como resultado 2 y así, queda comprobada la igualdad dada.
b) Se cumple para $x = -0{,}125$.
Para obtener el valor de x, basta determinar $f(2x + 1)$, para eso se evalúa la función f en $2x + 1$. Luego $f(2x + 1) = -2(2x + 1) + 3$. Esta expresión la sustituimos en la ecuación dada y después de sustituir $g(x)$ por $x^2 - 1$, se obtiene $-2(2x + 1) + 3 + x^2 - 1 - x^2 = 0{,}5$ de donde se puede calcular el valor de x resolviendo la ecuación anterior.

Ejercicios de las páginas 40 a la 46 del Cuaderno complementario

1. Son funciones lineales las representadas en los incisos a), c), f).

2. a) (6; 0). La respuesta se obtiene calculando el valor de la abscisa del punto de intersección en que la gráfica interseca al eje x. Para eso se calcula el cero de la función f. También puede hacerse, sustituyendo las coordenadas de los pares dados en la ecuación $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$ y seleccionar el par ordenado que al ser sustituido se obtenga una igualdad.
b) $m < 0$.

3. a) $T = 10t + 20$. Para escribir la ecuación que define el proceso, primeramente se identifican los puntos de coordenadas (2; 40) y (5; 70) que pertenecen al gráfico de esta función. Luego se calcula el valor de la pendiente m, de la semirrecta representada. Una vez que se tenga el valor de m, se calcula el valor de n sustituyendo las coordenadas de uno de los dos puntos en la ecuación. Finalmente se escribe la ecuación que define el proceso respetando los parámetros con que se está trabajando.
b) La temperatura inicial de la sustancia era de 20 ºC. Observa que es el valor del intercepto del gráfico de la función con el eje de las ordenadas.
c) La temperatura alcanzará los 100 ºC a los 8 minutos. En este caso se calcula de valor funcional, es decir, se sustituye en la ecuación

$T = 10t + 20$ a T por 100 ºC y luego se resuelve la ecuación calculando el valor de t.

d) A los 4 minutos la sustancia había alcanzado una temperatura de 60 ºC. Para obtener esta respuesta se procede de forma análoga a lo descrito en el inciso c, pero, en este caso, sustituyendo el valor de t por 4 en la ecuación, se obtiene el valor $T = 60$.

4. a) $\frac{5}{2}$. En este caso para obtener el cero, una de las vías es igualar la ecuación de la función a cero y despejar la variable x.
   b) $m = 2$.
   c) Creciente.

5. a) Falsa, porque el cero de la función es el elemento del dominio cuya imagen es cero y no es el par ordenado sino el valor de la abscisa de este par. El cero es $x_0 = -2$.
   b) Falsa, porque la función es decreciente.
   c) Verdadera.
   d) Falsa, porque al hallar el valor de la pendiente de la recta, se obtiene $m = -\frac{3}{2}$.
   e) Falsa, porque el dominio de la función es $x \in \mathbb{R}$. Los elementos del dominio pertenecen al conjunto de partida.
   f) Falsa, porque al sustituir los valores del par ordenado en la ecuación que define la función y realizar los cálculos, se obtiene una desigualdad.

6. a)

C	5	10	15
F	41	50	59

Los valores de F se obtienen sustituyendo cada valor de C en la fórmula dada y realizando los cálculos correspondientes.

   b) C: variable independiente.
   F: variable dependiente.
   c) Las variables C y F no son directamente proporcionales, porque los valores de F no se obtienen multiplicando por un mismo número los valores de C. No existe un factor de proporcionalidad directa.

   d) Ver figura 9.

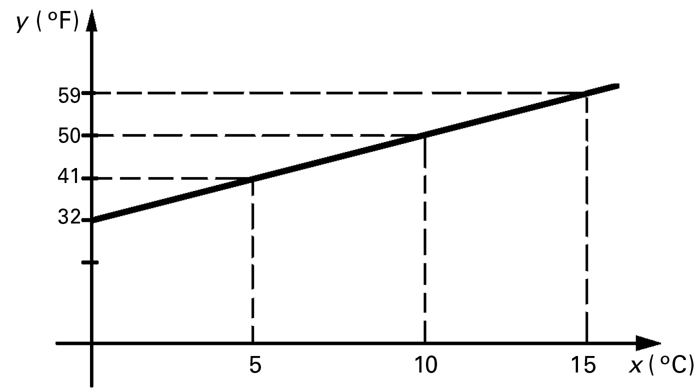


Fig. 9

Al observar el gráfico se aprecia que es una función, porque a cada valor que tome C se le hace corresponder un único valor de F.

7. Una función lineal que cumpla las condiciones anteriores puede ser f de ecuación $f(x) = \frac{3}{2}x + 3$. Para su obtención se puede sustituir el valor de la pendiente y las coordenadas del punto (–2; 0) en la ecuación $y = mx + n$ y obtener el valor de n.

8. $h = mt$ (fig. 10).

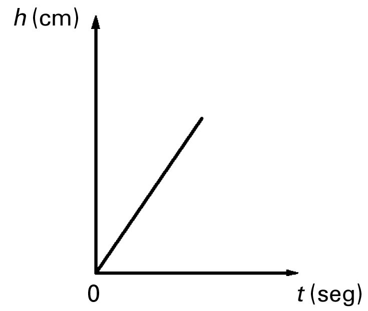


Fig. 10

9. a) $y = 14x$.
   b) 5 ha.

10. a) $V = t + 2$.
   b) 6 m/s. (Este resultado se obtiene al sustituir en la ecuación $V = t + 2$ el valor de t por 4 seg y efectuar los cálculos correspondientes.)

11. Al cabo de 12 años el artículo no tendrá valor alguno.
Para determinar a los cuántos años el artículo no tendría valor alguno, es evidente que hay que calcular el cero de la función y para eso hay que determinar la ecuación que define dicha función. Según el gráfico, se puede inferir que $n = 12$ y como el punto de coordenadas (7,5; 4,5) pertenece al gráfico de la función se sustituyen esos valores en la ecuación $y = mx + n$ y se calcula el valor de la pendiente m, obteniéndose la ecuación $P = -t + 12$ y a partir de esta ecuación se calcula el cero de la función y se obtiene como resultado $t = 12$.

12. a) Ver figura 11.

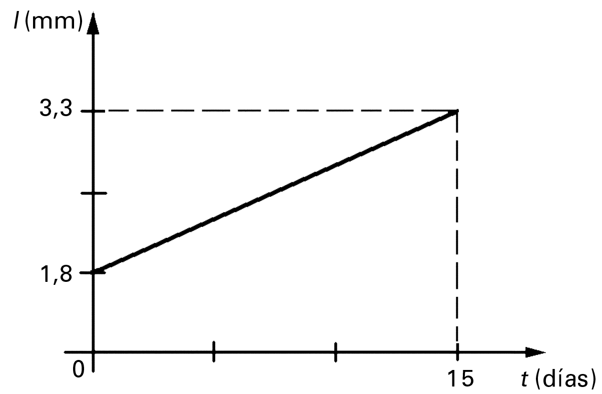


Fig. 11

b) Tendrán que transcurrir 12 días. (Para calcularlo, se sustituye en la ecuación de la función $l = 3{,}0$ mm y luego se despeja para obtener el valor de t.)
c) Al nacer tenían una longitud de 1,8 mm y a los 5 días de 2,3 mm. (Para calcularlo, se evalúa la ecuación que define la función para $t = 0$ y $t = 5$ y se obtiene el valor de l.)

13. a) $P = 240 + 1{,}8t$ (P: salario mensual en pesos ($); t: tiempo en horas extras (h_e)).

b) El salario devengado fue de $ 294.00. (Para calcularlo basta sustituir el valor de t por 30 en la ecuación.)
c) En ese mes trabajó 20 horas extras. (Para calcularlo basta sustituir en la ecuación de la función el valor del salario devengado (276) y despejar la variable t.)

14. Perímetro del triángulo equilátero: $p = 3l$.
Perímetro del cuadrado: $p = 4l$.

Para representar gráficamente en un mismo sistema de coordenadas el perímetro p en función del lado l de un triángulo equilátero y de un cuadrado, se le dan valores reales positivos al lado l y se obtiene el valor del perímetro p (fig. 12).

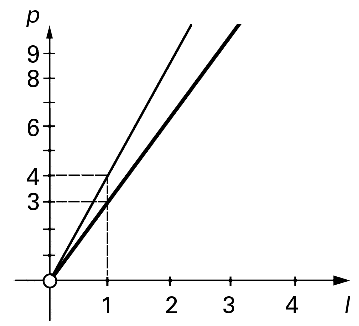


Fig. 12

15. a) B. (Observa que a medida que la temperatura T disminuye, la altura h aumenta.)

16. a) Ver figura 13.

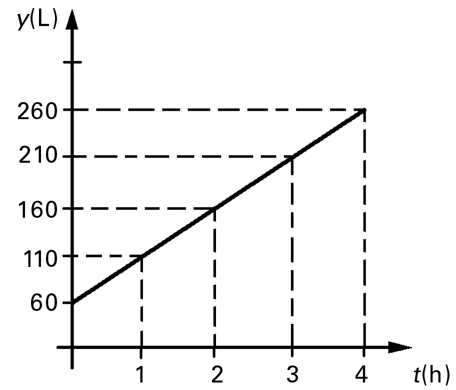


Fig. 13

Para representar gráficamente el proceso de llenado de la piscina, durante las cuatro primeras horas, se puede sustituir t por 4 en la ecuación dada y al efectuar los cálculos, se obtiene como resultado $y = 260$, luego se ubica este punto (4; 260) en el sistema de coordenadas. Se conoce el valor de $n = 60$, al ubicar este valor en el eje de las ordenadas se traza el gráfico de la función que define el proceso de llenado de la piscina.
b) La piscina tenía 60 000 L de agua.

c) La piscina tenía 310 000 L de agua a la 1:00 a.m.
Se evalúa la ecuación de la función para $t = 5$, ya que desde que se comenzó a llenar (8:00 p.m.) hasta la 1:00 a.m. transcurrieron 5 horas, y al efectuar los cálculos, se obtiene como resultado 310.

d) La piscina tiene una capacidad de 460 000 litros de agua. (Se sustituye t por 8 y se realizan los cálculos correspondientes obteniendo el valor de y.)

17. a) $C = -0{,}1d + 30$.
b) Al comenzar el viaje, el tanque tenía 30 L de combustible.
c) Al haber recorrido 80 km, el automóvil había consumido 8 L de combustible.
Se calcula la cantidad de combustible que queda en el tanque a los 80 km que es 22 L y por diferencia se calcula la cantidad de combustible consumido (30 – 22).
d) Había recorrido 120 km.
Cuando el automóvil había consumido 12 L, quedaban en el tanque 18 L por lo que se sustituye en la ecuación de la función el valor de C por 18 y se calcula el valor de d.
e) El tanque quedó totalmente vacío a los 300 km.
El tanque queda vacío cuando no hay combustible en él y esto ocurre cuando la cantidad de combustible está en 0 L, por tanto, se calcula el cero de la función que representa la relación dada.

18. a) El costo inicial de la máquina fue de $ 15 000.
b) El precio de la máquina a los dos años de ser comprada es de $12 000, ya que $y = 15\,000 - 1\,500 \cdot 2 = 15\,000 - 3\,000 = 12\,000$.
c) Para representar gráficamente la función, se puede obtener directamente de la ecuación $y = 15\,000 - 1\,500t$ el valor del intercepto con el eje y que es el par (0; 1 500) y calcular el cero de la función que es $t = 10$ (fig. 14).
d) Deben transcurrir 10 años.

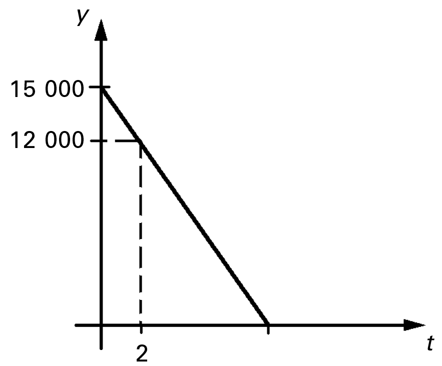


Fig. 14

19. a) Sea $d_1 = 90t$ la ecuación de la función que permite calcular la distancia a que se encuentra el ómnibus que sale del Capitolio en cada instante de tiempo y $d_2 = 150 - 70t$ la ecuación de la función que permite calcular la distancia a que se encuentra el ómnibus que sale de Varadero en cada instante de tiempo. La segunda componente del par ordenado correspondiente al punto de intersección representa la distancia a que se encuentran los ómnibus del Capitolio en el momento en que coinciden. Luego, por diferencia, se puede obtener la distancia a que se encuentran ambos de Varadero.
La primera componente del par permite determinar la hora en que los dos ómnibus coinciden. Si se tiene en cuenta que ambos salieron a las 8:00 a.m., ellos coinciden a las 8:56 a.m. aproximadamente. Observa que es necesario transformar la fracción de hora 0,94 a minuto.
b) Sean la función f la representada por d_1 y la función g la representada por d_2 (fig. 15).

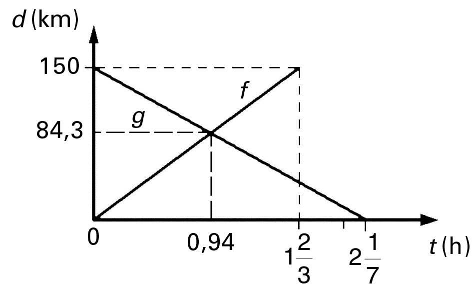


Fig. 15

Representación gráfica e interpretación de datos a partir de funciones definidas por tramos de funciones lineales

1. a) $h = \frac{5}{6}t$. (Se debe tener presente que es la ecuación del primer tramo, por tanto, para calcular el valor de la pendiente se consideran los puntos de coordenadas (0; 0) y (12; 10).)
b) La altura que había alcanzado el agua a los 10 min era aproximadamente de 8,3 dm.
c) Demoró en llenarse totalmente 18 minutos. (Se determina la ecuación que define la función en el segundo tramo y a partir de esta se calcula el tiempo que demoró en llenarse totalmente conociendo que la altura máxima que alcanzó el agua en el tanque fue de 20 dm.

d) En el segundo tramo. (Se comparan los valores de las pendientes de las rectas que contienen a los tramos dados y resulta que el valor de m en el segundo tramo es mayor que el valor de m en el primer tramo $\frac{5}{3} > \frac{5}{6}$.)

2. a) Alcanzó 16 dm de altura.
   b) Durante los 10 primeros minutos. Se calcula el valor de la pendiente de la recta correspondiente a la función del primer tramo ($m = 1$) y el valor de la pendiente de la recta en el segundo tramo $\left(m = \frac{1}{3}\right)$, $1 > \frac{1}{3}$.
   c) La altura del agua a los 22 minutos era de 14 dm. (Se determina la ecuación que define la función en el segundo tramo, la cual es $h = \frac{1}{3}t + \frac{20}{3}$ y luego se evalúa para $t = 22$, al desarrollar los cálculos, se obtiene la respuesta.)

3. a) La velocidad fue constante, $v = 80$.
   b) El móvil tenía una velocidad de 60 km/h. (Se sustituye en la ecuación el valor de t por 1,5 y se obtiene $v = 40 \cdot 1{,}5 = 60$.)
   c) Duró aproximadamente 15 horas y 42 minutos. (Se determina la ecuación de la función correspondiente al tercer tramo a partir de las 5 horas y luego se calcula el cero de la función. Fíjese que al calcular el cero de la función se obtiene aproximadamente $15{,}\overline{6}$. Luego aproximando $0{,}\overline{6}$ a 0,7, podemos transformar las 0,7 horas a minutos y obtenemos los 42 minutos.)

4. a) Alcanzaba la altura de 3,5 m.
   b) A las tres horas el agua tenía una altura de 2,6 m. (Hay que determinar la ecuación que define la función para luego calcular h si $t = 3$.)
   c) La piscina se vació totalmente a las 6 horas y media o a las 6 horas y 30 minutos. (Para obtener la respuesta se calcula el cero de la función g.)
   d) Ver figura 16.

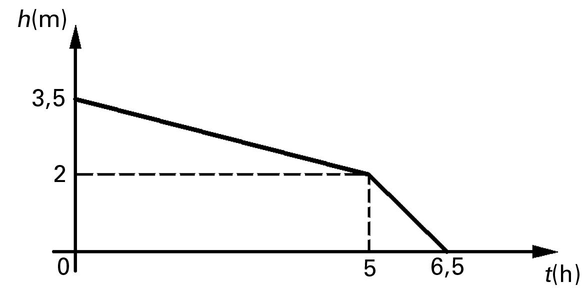


Fig. 16

5. a) 180 s.
   b) $d = 500$.
   c) 10:29 a.m.
   d) $d = 125t$.
   e) El ciclista llegó a la casa a las 10:36 a.m.
   (Se calcula el cero de la función correspondiente al último tramo, el cual es $t = 16$ y tomando como referencia este valor, se calcula el tiempo que duró el recorrido desde que salió el ciclista de su casa hasta que llegó ($t = 16$ min). Luego se determina la hora en que llegó a su casa teniendo en consideración que salió a las 10:20 a.m.)

6.
   6.1 12,5 ºC.
   6.2 a) 300 min.
   b) $T = 2{,}5t - 2{,}5$.
   6.3 A las 10:00 p.m. (Se calcula el cero de la función correspondiente al último tramo a partir de la ecuación de la función dada.)

7. El gráfico que está en el cuaderno (fig. 2.20) está incorrecto. Debe ser como el que se representa en la figura 17.
   7.1 5 h
   7.2 a) 12:30 p.m.
   b) 7,5 h. (Se calcula el cero de la función en el tramo a partir de la ecuación de la función en el último tramo.)
   7.3 $d = 60t$.

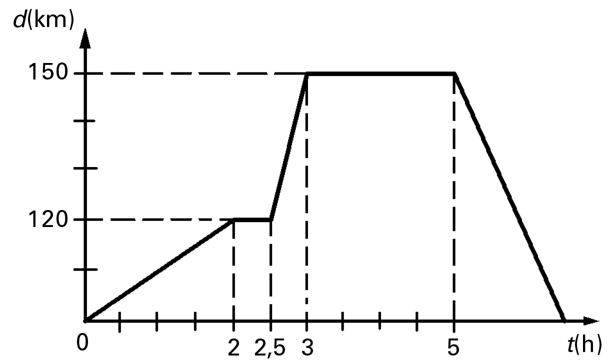


Fig. 17

8. El gráfico que aparece en el cuaderno (fig. 2.21) está incorrecto, debe ser como el que se representa en la figura 18.

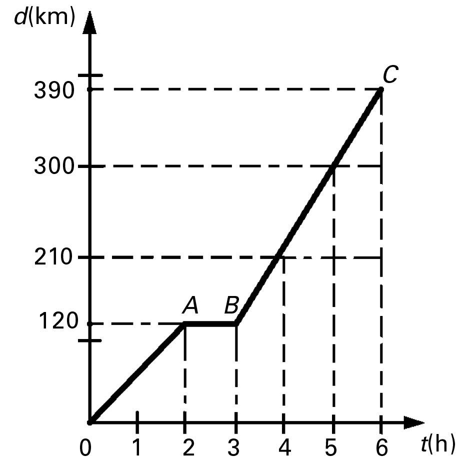


Fig. 18

8.1 1 h.

8.2 a) 2 h. (Cuando le faltan por recorrer 180 km es porque ya había recorrido 210 km. Luego basta observar en el eje de las abscisas el tiempo transcurrido al recorrer la distancia de 210 km a 390 km.)

b) 9 h. (Se sustituye en la ecuación de la función dada para $d = 540$ y al despejar la variable t, se obtiene $t = 9$.)

8.3 $d = 90t - 150$. (Se obtienen los puntos del gráfico de la función que define el último tramo $\overline{BC}$, los cuales son (3; 120), (4; 210), (5; 300) y (6; 390) y de ellos se escogen dos para hallar el valor de la pendiente m; luego se calcula el valor de n y finalmente se obtiene la ecuación de la función lineal que describe la variación de la distancia en función del tiempo del móvil representado en este tramo.)

9. En la tabla que aparece en la pregunta debe ponerse en la línea inferior la palabra Temperatura.
R: El C.

10. El A.

11. El C.

12. Ver figura 19.

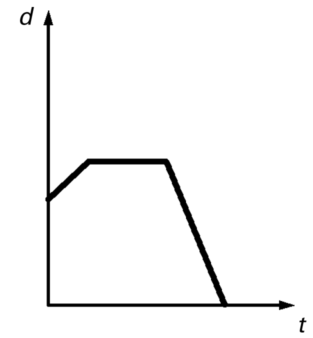


Fig. 19

13. a) El área del triángulo ABC es igual a 13,75 u^2.
Para calcular el área del triángulo ABC, hay que conocer la longitud de la base y la altura. Para eso es necesario conocer las coordenadas de los puntos A y B. Las coordenadas del punto A se pueden obtener directamente del gráfico de la función $f(-1; 0)$. Las coordenadas del punto B, se pueden determinar calculando el cero de la función g, ya que es conocida su ecuación que es $g(x) = -2x + 9$, $B(x; 0)$ se obtiene $x = 4{,}5$. Entonces las coordenadas de B es el par (4,5; 0). Para conocer la altura del triángulo es necesario tener una de las coordenadas de C, ya que $C(2; y)$ y para eso hay que evaluar en 2 la ecuación de la función g. Al realizar los cálculos correspondientes se obtiene como resultado 5, por tanto, las coordenadas del punto C son (2; 5). Una vez conocidas las coordenadas de estos puntos se procede entonces a calcular el área de dicho triángulo, donde la base es $\overline{AB} = 5{,}5$ u y la altura $h = 5$ u.

b) $f(x) = \frac{5}{3}x + \frac{5}{3}$.

Para escribir la ecuación de la función f, se conocen las coordenadas de los puntos A y C, las cuales son (–1; 0) y (2; 5) respectivamente y a partir de estos puntos se calcula el valor de la pendiente m y luego n y así, finalmente, se escribe la ecuación de la función f.

c) $x = \frac{1}{2}$.

Para obtener el valor de x se procede de la siguiente manera: $g(x + 1) - 2x = 5$ pero como $g(x) = -2x + 9$, entonces resulta la ecuación: $-2(x + 1) + 9 - 2x = 5$ y resolviendo esta ecuación, se obtiene el valor de x.

14. a) $N(5; 0)$.

Para determinar las coordenadas del punto N se calcula el cero de la función f que da como resultado $x_0 = 5$ y, por supuesto, el valor de la ordenada es cero, pues este punto está sobre el eje de las abscisas.

b) El área del triángulo MNL es igual a 9 u^2.

Una vez obtenida las coordenadas del punto N, se conoce la longitud de la base del triángulo MNL, $\overline{MN} = 6\,\text{u}$, pero se desconoce la altura (h) del triángulo, ya que para conocerla hay que determinar la ordenada del par que corresponde al punto L (1; y). Partiendo de la ecuación de la función f, se calcula la ordenada de L, porque el punto L pertenece al gráfico de la función f y se evalúa la ecuación de la función para $x = 1$, obteniendo como resultado 3, luego las coordenadas del punto L son (1; 3), por tanto, la altura del triángulo es $h = 3$ u.

Finalmente se calcula el área del triángulo.

c) Las coordenadas del punto K pueden ser entre otras (–1; –6), (0; –6), (3; –6), etcétera.

Para que el área del cuadrilátero $MKNL$ triplique al área del triángulo MNL ($A_{\text{cuadrilátero}} = 3\,A_{\text{triángulo}}$), las coordenadas del punto K tiene que tener como ordenada –6 y la abscisa puede tomar cualquier valor real x tal que $-1 \leq x \leq 5$ de esta forma se garantiza que el área del triángulo MKN sea 18 u^2 y el $A(MKNL)$ = 27 u^2 lo cual triplica al área del triángulo MNL.

15. a) $A(-6; 0)$.

Para determinar las coordenadas del punto A se calcula el cero de la función f el cual da como resultado $x_0 = -6$.

b) $g(x) = x + 3$.

Se sabe de la ecuación de la función g, es de la forma $g(x) = mx + n$, de ella se conoce el valor de $n = 3$, luego $g(x) = mx + 3$. Como el triángulo BOC es rectángulo en O por ser los ejes de coordenadas perpendiculares entre sí, se tiene entonces que $\angle\, BOC = 90°$ y $\angle\, OBC = 45°$ por datos, luego el $< BCO = 45°$ por suma de ángulos interiores de un triángulo, por tanto, el triángulo BOC es isósceles de base $\overline{BC}$, por lo que resulta que $\overline{BO} = \overline{OC} = 3\,\text{u}$ y así, se llega entonces a determinar las coordenadas del punto B (–3; 0) y se está en condiciones de comenzar a escribir la ecuación de la función g, al calcular el valor de la pendiente, se obtiene como resultado $m = 1$ y con este valor y uno de los puntos de la gráfica se determina la ecuación de la función.

c) El triángulo BOC es isorrectángulo.

d) Este ejercicio debe ser modificado y en lugar de estar igualada a 0,5 debe ser igualada a 3,5.

Para la resolución del ejercicio debe evaluarse la función f en $(2x - 1)$ y resolver las operaciones indicadas.

e) $A_{\Delta ABC} = 4{,}5\ \text{cm}^2$.

Nota: Para el cálculo del perímetro se debe aplicar el teorema de Pitágoras el cual se introduce en el Capítulo 3, por lo que se debe proponer en otro momento.

$P_{\Delta ABC} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$, pero $\overline{AB} = 3{,}0\,\text{cm}; \overline{AC} = 6{,}71\,\text{cm}$ y se desconoce la longitud del lado $\overline{BC}$, lo que conlleva a calcularlo aplicando el teorema de Pitágoras, ya que el triángulo BOC es rectángulo en O y $\overline{BC}$, su hipotenusa y como se conoce que $\overline{BO} = \overline{OC} = 3\ \text{cm}$ al calcular el lado $\overline{BC}$ da un resultado aproximadamente igual a 4,24 cm, luego el perímetro del triángulo ABC es 13,95 cm.

16. $A_{\text{trapecio}} \approx 9{,}6\ u^2$.

$A_{\text{trapecio}} = \dfrac{B+b}{2}\cdot h$. Para hallar el área del trapecio es necesario conocer las longitudes de las bases por lo que hay que determinar las coordenadas del punto B y las coordenadas del punto D para conocer las longitudes de las bases mayor y menor. Para las coordenadas del punto B se calcula el cero de la función g el cual da como resultado $x_0 = -\dfrac{2}{3}$, por lo que $B\left(-\dfrac{2}{3}; 0\right)$, pero como las coordenadas del punto A son (0; 2), las coordenadas del punto D serán (4; 2). Luego $\overline{AD} = 4\,\text{u}, \overline{BC} = 5{,}6\,\text{u}$ y la altura $\overline{OA} = 2\,\text{u}$.

17. $\dfrac{A_{\text{triángulo}}}{A_{\text{cuadrilátero}}} = \dfrac{13{,}5}{7{,}5} = 1{,}8.$

Para probar que la razón entre las áreas del triángulo ABC y el cuadrilátero $DECB$ es igual a 1,8, primeramente hay que determinar sus áreas. Para eso es necesario determinar las coordenadas de cada uno de los puntos A, B, C, D y E para determinar la longitud de los elementos necesarios para calcular las áreas.

Por la ecuación de la función f se conoce que $n = -4$, por lo que $A(0; -4)$, las coordenadas del punto E se determinan calculando el cero de la función f por lo que $E(5; 0)$. Se conoce que el punto C tiene por coordenadas el par $(x; 2)$, ya que $h(x) = 2$ (función constante), basta entonces hallar el valor de x en ese punto, el cual se obtiene a partir de la ecuación de la función f y da como resultado 7,5; luego $C(7{,}5; 2)$. Para determinar las coordenadas del punto B hay que determinar la ecuación de g, conociendo que $g(2) = 0$ y como el valor de n en la función g es -4, porque coincide con la ordenada del punto A, se obtiene la ecuación $g(x) = 2x - 4$. Del punto B se conoce una de sus coordenadas $(x; 2)$, como el punto B pertenece a la representación gráfica de la función g basta sustituir $y = 2$ en la ecuación de la función g para obtener el valor de x, obteniendo de esta forma que $x = 3$ por lo que $B(3; 2)$.

Una vez determinadas las coordenadas de los puntos, se procede a calcular el área del triángulo ABC y la del cuadrilátero $DECB$, conociendo que $\overline{BC} = 4{,}5$ u, $\overline{DE} = 3{,}0$ u, la altura del triángulo ABC es $h = 6{,}0$ u y la altura del cuadrilátero $DECB$ es igual a 2,0 u.

Luego $A_{\Delta ABC} = 13{,}5$ u^2 y el $A_{\text{cuadrilátero}} = 7{,}5$ u^2. Observa que el cuadrilátero es un trapecio porque $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$, ya que al ser h una función constante, su representación gráfica es una recta paralela al eje de las abscisas.

Interpretación geométrica de la solución de los sistemas de ecuaciones lineales

1. a) Tiene una única solución.
   b) No tiene solución.
   c) Tiene infinitas soluciones.
   d) Son coincidentes.
   e) $5x - y = 15$.
   f) (8; 7).
   g) No tiene solución.

2. Ver figura 20.

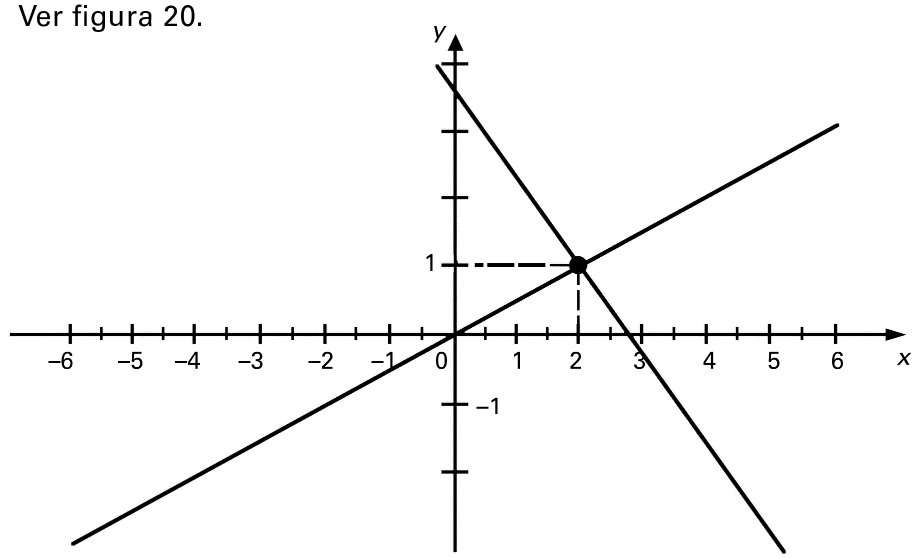


Fig. 20

3. Ver figura 21.

a) b)

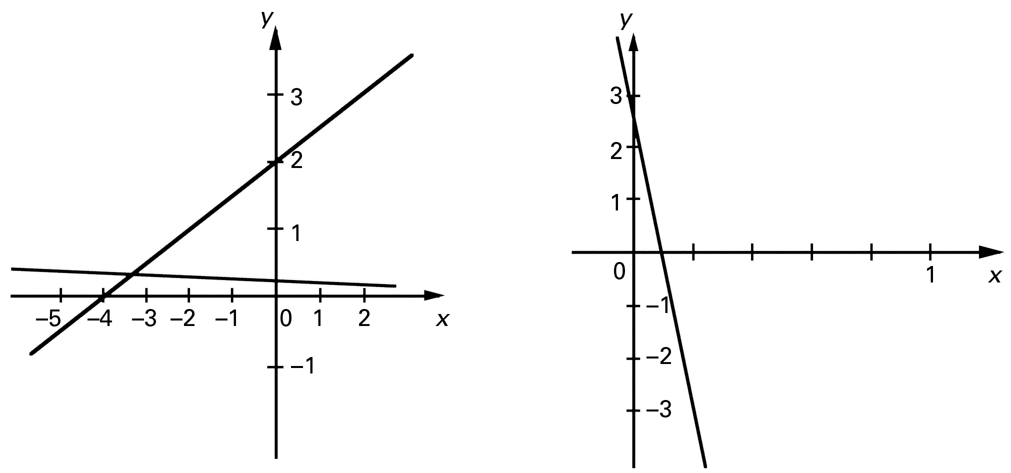


Fig. 21

4. Para que el sistema tenga una solución basta que $a \neq -4$ y para que no tenga solución debe cumplirse que $a = -4$.

5. a) Ver figura 22.

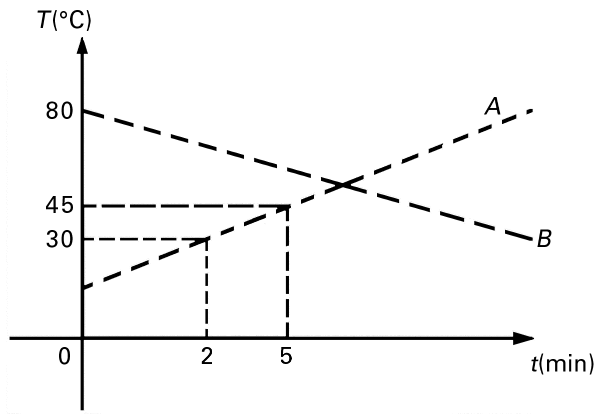


Fig. 22

b) La sustancia A se calienta porque a medida que transcurre el tiempo la temperatura aumenta, además, porque la función es creciente en todo su dominio.

c) La sustancia B porque a medida que transcurre el tiempo la temperatura disminuye, además, porque la función es decreciente en su dominio.
Alcanzará la temperatura de 0 °C aproximadamente a los 16 minutos. (Para responder la pregunta basta calcular el cero de la función.)

d) Ambas sustancias alcanzarán la misma temperatura a los 6 minutos y será de 50 °C. (Para responder la pregunta debe resolver el sistema de ecuaciones determinado por las ecuaciones de las dos funciones.)

e) A los 16 min la sustancia B tendrá una temperatura de 16 °C y la sustancia A de 110 °C por lo que la diferencia de temperatura será de 94 °C.

2.3 Trabajo con variables

1. a) $2x + 3$. b) $a^2 - 5$. c) $4b^2 - 4$.
d) $x^2 - 2x = 3$. e) $n(n + 1)$ $n \in \mathbb{Z}$. f) $(a + b)^2$.
g) $(a + b)(a - b)$. h) $(x + y)^2$. i) $a^2 + b^2$.

j) $P = 2(a + b)$. k) $n^2 + (n + 1)^2 = n + 1 + 10n$. l) $x + \frac{1}{x} = \frac{25}{6}$.
m) $m^2 = \frac{1}{4}m$. n) $x^2 - 25$.

2. $x^2 - 20 = x$.

3. No, ya que al introducir el paréntesis precedido del signo – debía haber escrito:
$2x^3 - (6x^2 - 3x + 9)$, pues todo signo de agrupación precedido del signo – cambia el signo de los términos que se encuentran dentro del signo de agrupación.

4. a) $-1{,}5xy + 1{,}8xz$. b) $1{,}75ab - 1{,}84a^3 + 0{,}44a^2b$. c) $-\frac{7}{2}p - 5s$.
d) $4b + 8$. e) $-7y^2z - 2yz - 2yz^2$.

5. a) $B - C = 2a - 3x$. b) $C - B = -2a + 3x$.
c) $B + C + D = \frac{7}{2}a + 2x + 2$. d) $A \cdot B - 4D = 9a^2 - 3ax - 2a + 4x + 8$.

6. a) $4M - NP = 9x - 7$.
b) El valor de x es 3. Para llegar a la respuesta, basta igualar la expresión obtenida a 20 y resolver la ecuación.

7. *Nota*: Los incisos b; f; y g tienen la limitante que para su solución los estudiantes deben conocer las propiedades de los radicales y este no es contenido del grado.
a) $16\,y^2 - 25$ b) $m^2 - 3$ c) $d^2 + 2de + e^2$
d) $x^2 - 2xy + y^2$. e) $4r^2 - 8re + e^2$. f) $m^2 + 2\sqrt{3}\,m + 3$.
g) $a^2 + 2a\sqrt{-44}$. h) $\frac{x^2}{4} + xy^3 + y^6$. i) $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 4\frac{a^2}{b} + 4a^2$.
j) $s^2 + s - 42$. k) $6x^2 - 3x - 3$. l) $x^4 + 5x^2 - 24$.
m) $0{,}01t^2 + 0{,}4t + 4$. n) $\frac{9}{25}x^4 - \frac{6}{5}x^2y + y^2$. p) $\frac{1}{4}x^4 - 1$.

8. a) 40.
   b) $30y - 28$.

9. a) $3x^4 + y^2$. b) $\frac{13}{4}$.

10. a) $-3x + 2$. b) 5.

11. $-4x + 25$.

12. $m + 4$.

13. $2x - 4$.

14. a) 722 árboles.
    b) Puede dedicarse a otros cultivos aproximadamente el 0,1 %.

Ejercicios páginas 64 a 66

1. $a(2a + 3)$.

2. $2a(a^2 - 2a + 1)$.

3. *Nota*: Con este ejercicio hay que tener precaución, pues la única de las respuestas propuestas es $2a^2b^2\left(\frac{2}{b} - 1 + \frac{3b}{a^2}\right)$ la cual es correcta, pero en este caso para obtenerla se tuvo que extraer como factor a^2b^2 lo cual no es lo usual al realizar este tipo de descomposición en factores teniendo en cuenta los conocimientos sobre descomposición factorial que tienen.

4. No, ya que $(5x - 2y)^2 = 25x^2 \underline{- 20xy} + 4y^2$ y en la expresión dada aparece $-10xy$.

5. a) $14x^2(y^2 - 2x + 4x^2)$. b) $55m^2(n^3x + 2n^3x^2 - 4g^2)$.
   c) $(a - b)(m + r)$. d) $(m - n)(4x - 1)$.
   e) $(x - 5)^2$. f) $\left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2$.
   g) $a(y - 5)^2$. h) $(m + 33)(m - 5)$.
   i) $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)(x + 7)$.
   j) No se puede descomponer con los conocimientos dados.
   k) $(3x - 7a)(2x + a)$.
   l) $a\left(\frac{2}{3}h^2 - \frac{2}{3}h - 1\right)$.
   m) $\frac{3}{4}(a - b)^2$.
   n) $(9 - y)(9 + y)$.
   ñ) $(x - 6)(x + 6)$.
   o) No se puede descomponer con los conocimientos dados.
   p) $(p - 7q)(p + 7q)$.
   q) $\left(\frac{1}{6}u + v^2\right)\left(\frac{1}{6}u - v^2\right)$.
   r) $2(a + 2)(a - 2)$.
   s) $4t(5 + a)(5 - a)$.
   t) $(p - q)(3a + 2)$.
   u) $m(x + 5)(x + 4)$.
   v) $(x - 5y)(x - 2y)$.
   w) $\left(y + \sqrt{3}\right)^2$.
   x) $2xy(2x - 3y)(x + 4y)$.
   y) $\frac{2}{5}x(3y^2 + 1)(y^2 - 1)$.

6. a) $(2x + 5)^2$. b) El resultado es 36 que es múltiplo de 12.

7. a) $5m^2 - 16m + 3$. b) $(5m - 1)(m - 3)$. c) 55.

8. a) $9x^2 + 6xy + y^2$. b) $(3x + y)^2$.
   c) 36 es el m.c.m. entre 12 y 18.

9. $x(x + 4)(x - 4)$.

10. a) Sugerencia: Sea n un número natural. Si consideramos $2n + 1$ como la forma general de expresar un número natural impar, su cuadrado es:

    $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2n(2n + 2) + 1$.

    Haciendo $n(2n + 2) = t$, obtenemos $2t + 1$ que es la forma general de representar un número natural impar.

    b) Sugerencia: Tomar n y $n + 1$ como la forma de expresar dos números naturales consecutivos y hallar la diferencia de $(n + 1)^2 - n^2$.

    c) Sugerencia: Expresar el número de dos lugares como $10m + n$ y el otro número sería $10n + m$, su diferencia da $9(m - n)$ que es divisible por 9.

    Nota: En todos los casos se considera m y n como números naturales.

2.4 La ecuación cuadrática

1. a) $x_1 = 0$ o $x_2 = 2$.

   b) $z_1 = 0$ o $z_2 = \frac{8}{5}$

   c) $m_1 = -11$ o $m_2 = 4$.

   d) No tiene solución en $\mathbb{R}$, porque el cuadrado de todo número real es no negativo, luego no existe un número real x tal que su cuadrado sea -16.

   e) $x_1 \approx 0{,}62$ o $x_2 \approx -1{,}62$.

   f) $x_1 = 7$ o $x_2 = -1$.

   g) $x = 3$.

   h) $x_1 \approx \frac{5}{2}$ o $x_2 = 4$.

   i) $x_1 \approx 1{,}63$ o $x_2 \approx -24{,}63$.

   j) No tiene solución en $\mathbb{R}$, porque ningún número real satisface la ecuación $x^2 = -4$.

   k) $x_1 = 9$ o $x_2 = -1$.

   l) $x_1 \approx 0{,}43$ o $x_2 \approx -0{,}76$.

   m) $x_1 = \frac{m+n}{m-n}$ o $x_2 = \frac{m-n}{m+n}$.

   n) No tiene solución en $\mathbb{R}$, porque el discriminante es menor que cero ($D < 0$).

2. La otra solución es $x_2 = -\frac{3}{4}$, con $m = -12$. Para resolver el ejercicio basta sustituir la x por 4 en la ecuación dada y hallar el valor de m. Luego se sustituye el valor de m hallado y se resuelve la ecuación.

3. *Nota*: Las alternativas para la selección de la respuesta correcta no incluyen simultáneamente los dos valores que puede tomar q que son 24 y -24, por lo tanto, tiene que seleccionar dos respuestas. La ecuación tiene una sola solución cuando el discriminante es cero, luego $D = q^2 - 4 \cdot 144 = q^2 - 576 = 0$, de donde $q = 24$ o $q = -24$.

4. Existen infinitas ecuaciones que tienen como solución las dadas. Se puede dar como ejemplo:

   a) $x(x + 3) = 0$ de donde se obtiene $x^2 + 3x = 0$ u otra equivalente a esta.
   b) $(x - 1{,}05)(x + 0{,}3) = 0$ de donde se obtiene $x^2 - 0{,}75x + 0{,}315 = 0$ u otra equivalente a esta.

5. a) Para $k > 6$ o $k < -6$.

   b) Para $k = 6$ o $k = -6$.

   c) Para $-6 < k < 6$.

   Nota: Para la realización de este ejercicio basta hacer el análisis por las condiciones del discriminante.

6. $x^2 = (5 - x)(3 - x)$.

7. Isósceles, ya que la longitud de los lados son 9 cm y 5 cm.

   Nota: Se plantea la ecuación $x^2 + 2x + 3 + x + 2 = 23$ a partir de la fórmula para calcular el perímetro del triángulo, se resuelve la ecuación obteniendo el valor de $x = 3$, luego se sustituye en las expresiones dadas y de acuerdo con los valores obtenidos se clasifica el triángulo.

8. El número es 93. Recuerde que un número de dos cifras se representa como $10d + u$, siendo d la cifra de las decenas y u la cifra de las unidades. Tomando en consideración las condiciones que se dan en el problema, se establece la ecuación $10u^2 + u - 54 = 10u + u^2$ obteniéndose el valor de $u = 3$ y en consecuencia $d = 9$.

9. En este ejercicio falta el dato $x + 8$ para el otro lado del rectángulo B, el cual no aparece en la figura.
Para su solución debe igualar las expresiones que permiten calcular el área de cada rectángulo y resolver la ecuación formada.
De esta forma la respuesta es:

   a) $x = 2$.

   b) La razón es $\frac{11}{7}$.

10. Cambiar todo el piso costará $579,60.

    Nota: De acuerdo con las condiciones del problema se plantea la ecuación $x\,(x + 4) = 4\left[x(x+2)\right]$, ya que el área de L_3 es la cuarta parte del área de L_1.

11. Son necesarios 58 galones de pintura.

12. Los números consecutivos son –11 y –10 o 10 y 11.

13. a) Las dimensiones de la parcela son ancho 47 m y largo 82 m.

    b) El 30 % de las dimensiones son 14,1 m y 24,6 m, luego el área de la parcela será 346,86 m².

14. En este ejercicio en vez de 5 m debe ser 6 m el lado del cuadrado que representa al estanque para que se cumplan las condiciones del problema, entonces la respuesta sería que el valor del área del terreno de Juan sería 144 m², que es igual a 36,4.

3 CAPÍTULO

Circunferencia y círculo

3.1 La longitud de la circunferencia

1. a) radios: $\overline{OA}$, $\overline{OE}$ y $\overline{OB}$,

   diámetro: $\overline{EB}$,

   cuerdas: $\overline{EB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$.

   b) A y B determinan los $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{ACB}$.
   A y C determinan los $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{ABC}$.
   A y D determinan los $\overset{\frown}{AD}$ y $\overset{\frown}{ACD}$.
   A y E determinan los $\overset{\frown}{AE}$ y $\overset{\frown}{ABE}$.
   B y C determinan los $\overset{\frown}{BC}$ y $\overset{\frown}{BAC}$.
   B y D determinan los $\overset{\frown}{BD}$ y $\overset{\frown}{BCD}$.
   B y E determinan los $\overset{\frown}{BCE}$ y $\overset{\frown}{BAE}$ (semicircunferencias).
   C y D determinan los $\overset{\frown}{CD}$ y $\overset{\frown}{CBD}$.
   C y E determinan los $\overset{\frown}{CE}$ y $\overset{\frown}{CBE}$.
   D y E determinan los $\overset{\frown}{DE}$ y $\overset{\frown}{DBE}$.

   c) Miden 180º: los $\overset{\frown}{BAE}$ y $\overset{\frown}{BCE}$.

   Miden menos de 180º: los $\overset{\frown}{AB}$; $\overset{\frown}{AC}$; $\overset{\frown}{AD}$; $\overset{\frown}{AE}$; $\overset{\frown}{BC}$; $\overset{\frown}{BD}$; $\overset{\frown}{CD}$; $\overset{\frown}{CE}$; $\overset{\frown}{DE}$.

   Miden más de 180º: los $\overset{\frown}{ACB}$; $\overset{\frown}{ABC}$; $\overset{\frown}{ACD}$; $\overset{\frown}{ABE}$; $\overset{\frown}{BAC}$; $\overset{\frown}{BCD}$; $\overset{\frown}{CBD}$; $\overset{\frown}{CBE}$; $\overset{\frown}{DBE}$.

2. a) Ver figura 23.
   Nota: Para el inciso d) debe modificarse el dato que aparece de 2 mm por 20 mm.

   Considera: M como el punto que está a 0,28 dm del centro, N como el punto que está a 15 mm del centro, P como el

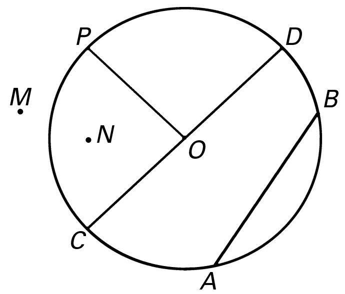


Fig. 23

punto que está a 20 mm del centro, d como la distancia del centro al punto y r como la longitud del radio.

b) M, no está situado dentro de la circunferencia, porque $d > r$.
c) N, es un punto interior de la circunferencia, porque $r > d$.
d) P, es un punto de la circunferencia, porque $r = d$.

Nota: Se considera d como la distancia del centro al punto.

3. a) Falsa, porque pueden tener el mismo centro pero radios diferentes.
b) Verdadera.
c) Verdadera.
d) Falsa, porque la cuerda no tiene que pasar necesariamente por el centro.
e) Falsa, ya que las distancias del centro a los extremos de las cuerdas coinciden con las longitudes de los radios.

Otros elementos de la circunferencia: ángulos centrales e inscritos

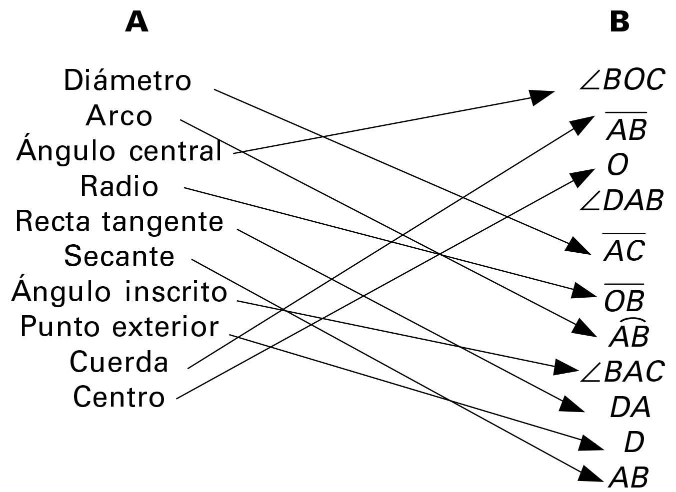
1. 1. $\angle B$, $\angle BAC$, $\angle BAD$, $\angle CAD$, $\angle E$, $\angle D$, $\angle DCE$, $\angle DCA$, $\angle ACE$.

2. $\angle B$ y $\angle ACE$; $\angle BAC$ y $\angle BEC$.

4. Si el $\angle 1 = 60°$, su arco correspondiente mide 60°. Los ángulos 2, 3 y 4 miden 30° por estar inscritos sobre el mismo arco.

5. $\angle 1 = \angle 3$, por estar inscritos sobre el mismo arco.
$\angle 2 < \angle 1$, porque al ángulo 2 le corresponde un arco de menor amplitud.

2.



3. Las respuestas están en el libro de texto de octavo grado (p. 178).

4. d) $\angle BAC = 25°$, porque es un ángulo inscrito sobre el $\widehat{CB}$.
(Observa que el inciso a) no puede ser, ya que no declara en los datos que A, B y C son puntos alineados, ni se declara que $\overline{AB}$ es diámetro, por tanto, no se puede asumir por la figura.)

5. a) Rectángulo. b) 50°.

6. $\angle B = 55°$.

7. a) Ángulos centrales: $\angle AOC$, $\angle COB$, $\angle AOB$, $\angle AOD$, $\angle DOC$.
Ángulos inscritos: $\angle ABC$, $\angle OCB$, $\angle OAB$, $\angle ABD$, $\angle CBD$, $\angle DCE$, $\angle BCE$, $\angle OAE$, $\angle BAE$.

b) 250°. c) $x \approx 4{,}8°$.

8. a) Para calcular la amplitud del $\widehat{NP}$ es necesario calcular la amplitud del $\angle PMN$, para esto basta calcular el valor de x a partir de la ecuación $3x + 15° + 5x - 5° = 90°$ de donde se obtiene que $x = 10°$ y, por tanto, $\widehat{NP} = 90°$.
b) Isósceles de base $\overline{MN}$ porque los ángulos base miden 45°.

9. a) $\angle OAB = 30°$ (se puede determinar la amplitud del ángulo AOB por adyacente con el ángulo COB y después calcular la amplitud del ángulo pedido a partir de identificar que el triángulo ABO es isósceles de base $\overline{AB}$).
$\angle ABC = 120°$ (se puede determinar adicionando la amplitud del $\angle ABO$ con el $\angle BOC$ que es recto).
b) $CB = 4{,}0$ cm (se puede deducir que el triángulo ABC es isósceles de base $\overline{AC}$, para esto basta calcular la amplitud del ángulo BCO y comprobar que mide 30°).

10. $\angle ABE = 40°$ (se puede determinar a partir de la obtención de la amplitud del $\widehat{AE}$, y la relación del ángulo inscrito con el arco correspondiente).
$\angle ABC = 90°$ por el teorema de Tales.
$\widehat{BC} = 100°$ (se puede calcular la amplitud del ángulo BAC y estableciendo la relación de la amplitud del ángulo inscrito con su arco correspondiente se puede determinar.)

11. $\overset{\frown}{PR} = 145°$ (se puede obtener determinando la amplitud del $\overset{\frown}{SR}$ que es igual a 35°. Se calcula también la amplitud del $\overset{\frown}{SP}$ que es de 110° y luego se adicionan las amplitudes de los arcos que forman el $\overset{\frown}{PR}$.

12. En el cuaderno aparece como dato $\overline{AB} = 60°$ y debe ser $\overset{\frown}{AB} = 60°$.
    a) $\overset{\frown}{CD} = 60°$ (se puede calcular determinando la amplitud del ángulo central *AOB*, luego por opuesto por el vértice se determina la amplitud del $\angle COD$ y estableciendo la relación ángulo central y arco correspondiente se determina la amplitud del $\overset{\frown}{CD}$).
    $\overset{\frown}{DB} = 120°$ (se puede calcular sustrayéndole a la amplitud de la semicircunferencia, la amplitud del $\overset{\frown}{CD}$).
    b) El perímetro del $\Delta AOB = 6{,}3$ cm (se determina a partir de calcular la longitud del radio *AO* que es igual a 2,1 cm y verificando que el ΔAOB es equilátero).

13. a) $\angle BAC = 60°$ (se puede calcular la amplitud del ángulo *B* a partir de la relación arco-ángulo inscrito, después se puede calcular la amplitud del ángulo *BAC* y aplicando la propiedad de la bisectriz se puede llegar a la amplitud del ángulo pedido).
    $\overset{\frown}{BAC} = 240°$ (se puede determinar la amplitud del $\overset{\frown}{AC}$ por la relación ángulo inscrito-arco correspondiente y después adicionando las amplitudes de $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{AB}$ obtener la amplitud del arco pedido).
    $\overset{\frown}{AD} = 160°$ (se puede calcular determinando la amplitud del $\overset{\frown}{BD}$ por la relación ángulo inscrito-arco correspondiente y luego adicionándole la amplitud del $\overset{\frown}{AB}$ calculado en el inciso anterior).
    b) No, porque $\overset{\frown}{ABD}$ es de 160° y no de 180°.

14. El perímetro del cuadrilátero *MNPQ* es igual a 25 cm (se puede determinar la longitud de los radios que es igual a 5 cm y como se forman los triángulos equiláteros *MOQ*, *OPQ* y *ONP* queda determinado que $\overline{MQ} = \overline{QP} = \overline{PN} = 5$ cm.

Teorema de Pitágoras

Ejercicios página 81

1. a) $NP = 25$ cm. b) $MP = 20$ dm.
   c) $\overline{NP} \approx 5{,}9$ cm. d) $\overline{MN} = \overline{PM} \approx 7{,}1$ mm.

2. $A = 7{,}5$ dm^2 y $P = 15$ dm.
3. En este ejercicio se debe agregar como dato que $\overline{QO} \perp \overline{MN}$.
   a) Según sus ángulos el triángulo es rectángulo en *P* y según sus lados es escaleno.
   b) Representa aproximadamente el 42 %.
   c) El perímetro del pentágono *MPNQO* es aproximadamente 47 cm.

Ejercicios página 82

1. Las repuestas están en el libro de texto de octavo grado (p. 179).
2. a) $L \approx 13$ cm. b) $L \approx 28$ mm. c) $L \approx 31$ dm. d) $L \approx 3{,}1$ km.
3. a) $r = 15$ cm. b) $r = 0{,}5$ m. c) $r = 2{,}5$ dm.
4. Las respuestas están en el libro de texto de octavo grado (p. 179).
5. a) Rectángulo. (Para la clasificación es necesario primero calcular la amplitud de los ángulos interiores del triángulo. Note que por simple inspección no es posible, ya que el ejercicio no ofrece ningún dato que permita la clasificación directamente.)
   b) Diámetro, ya que como el $\angle C = 90°$ y está inscrito en la semicircunferencia, se puede garantizar que $\overline{AB}$ es diámetro.
   c) $L \approx 7{,}5$ cm.
6. Recorrerá al dar las 100 vueltas aproximadamente 63 m.
7. El diámetro de la rueda es de 28 cm.
8. a) En triángulos *AON* y *DMO*.
   (1) $\angle DAB = \angle ADC$ por estar inscritos en los arcos iguales *BD* y *AC*.
   (2) $\overline{OA} = OD$ por ser radios de la circunferencia.
   (3) $\angle EOA = \angle FOD$ por ser opuestos por el vértice.
   Luego $\Delta AON = \Delta DMO$ por tener respectivamente iguales un lado y los ángulos adyacentes a este.
   b) $\overset{\frown}{AC} = 94°$ porque la amplitud del ángulo inscrito es igual a la mitad de la amplitud de su arco correspondiente.
   c) 68° (se sustrae a 180° que es la amplitud de la semicircunferencia, la suma de las amplitudes de los arcos *AC* y *CF*).

d) $\angle AOE$ es un ángulo central y su amplitud es 68°, porque le corresponde el arco *AE* y la amplitud del ángulo central es igual a la amplitud del arco correspondiente.

e) $\angle$EDF = 90°, por ser un ángulo inscrito sobre el diámetro $\overline{EF}$.

f) La longitud de la circunferencia es aproximadamente igual a 13 cm.

9. a) b = 8,0 cm. b) L = 15 cm. c) α = 45°.

10. Recorre aproximadamente 13 cm. (Se debe determinar la amplitud del ángulo al cual le corresponde el arco, que tiene una amplitud de 120°, luego se determina la longitud de la circunferencia cuyo radio es 6,0 cm y, por último, se aplica la proporción que permite calcular la longitud del arco.)

3.2 El área del círculo

1. Las respuestas están en el libro de texto de octavo grado (p. 180).

2. a) 20 cm². b) 55 mm². c) 314 dm².

3. a) r = 10 cm. b) d = 5,00 dm. c) r = 0,500 mm. d) d = 12 m.

4. Las respuestas están en el libro de texto de octavo grado (p. 180).

5. a) $\angle ABC$ = 150° (por los datos se llega a la conclusión que el triángulo *AOB* es equilátero, por tanto, sus ángulos interiores miden 60°, como *BC* es tangente a la circunferencia en *B*, el ángulo *OBC* mide 90° luego basta adicionar las amplitudes de los ángulos *ABO* y *OBC*).

   b) 27 cm (se despeja el radio en la fórmula del área del círculo y luego como el triángulo es equilátero se multiplica por tres la longitud del radio).

6. Las respuestas están en el libro de texto de octavo grado (p. 180).

7. a) En el punto de intersección de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, porque las diagonales de un rectángulo se cortan en su punto medio.

   b) El área sombreada es aproximadamente igual a 31 cm². (Se calcula la longitud del diámetro aplicando el teorema de Pitágoras, de ahí, se calcula el área del círculo a la cual se le sustrae el área del rectángulo.)

8. No, porque 20 vasos ocupan 502 cm² de superficie y la superficie de la bandeja es de 314 cm².

9. En el texto del problema debe modificarse la palabra espesor por ancho y la respuesta será:

   Se podrán fabricar 30 monedas.

   Para resolverlo, se debe calcular el largo de la placa rectangular y el diámetro de la moneda para saber cuántas veces está contenido el diámetro de la moneda en el largo de la placa. Existe otra vía dividiendo el área de la placa por el área de la moneda, pero el resultado sería aproximado, ya que por esta vía se suman los pequeños espacios que quedan entre monedas y nos da una cantidad mayor que no es real.

10. El área sombreada es aproximadamente igual a 8,4 dm² (se calcula la longitud del radio dividiendo por 2 la longitud de $\overline{DB}$, lo cual permite calcular el área del círculo. Se determina la longitud de $\overline{EB}$ que es la altura del triángulo *ABC*, la cual es la tercera parte de la longitud de $\overline{DB}$, luego aplicando el teorema de Pitágoras se calcula $\overline{CE}$ lo cual permite calcular la base $\overline{CA}$ del triángulo y poder calcular su área. Por último se sustrae al área del círculo el área del triángulo).

11. a) El perímetro del triángulo es aproximadamente igual a 48 mm (se calcula la longitud del cuadrado a partir de su área, luego aplicando el teorema de Pitágoras se calcula la longitud de la diagonal $\overline{AC}$ lo cual permite calcular el perímetro).

    b) El área del cuadrado representa aproximadamente el 62 % del área del círculo.

12. a) Para demostrar que los ángulos son iguales puedes demostrar primero que los triángulos *ACP* y *PDB* son iguales y por elementos homólogos probar que los ángulos son iguales.

    b) $A_S \approx$ 29 cm².

    Para calcular el área sombreada se debe sustraer al área del círculo el área de los triángulos. Para hallar el área del triángulo *ACP* debemos calcular $\overline{AC}$ aplicando el teorema de Pitágoras y como *P* es punto medio de $\overline{AB}$ se puede calcular. Para calcular el radio del círculo, también debemos aplicar este teorema para calcular la longitud del diámetro $\overline{CB}$ (ya que por los datos al declararse que *C, O* y *B* son alineados se garantiza que $\overline{CB}$ es diámetro) en el triángulo *ABC* rectángulo en *A*. Luego como los triángulos son iguales demostrado en el inciso anterior es fácil determinar el área de los triángulos.

13. a) En los triángulos *ABM* y *CDM*:

$\overline{BM} = \overline{MD}$ por datos.

$\angle ABM = \angle ACD$ por ser ángulos inscritos en el mismo arco.

$\angle AMB = \angle CMD$ por ser opuestos por el vértice.

Luego $\Delta AMB = \Delta CDM$ por tener respectivamente iguales un lado y los ángulos adyacentes a él.

b) El arco *AD* mide 104° porque la amplitud del arco es el doble de la amplitud del ángulo inscrito correspondiente.

c) En el ejercicio no es $\angle AOB$, debe decir: Traza el $\angle AOD$. $\angle AOD = 104°$.

d) En este inciso debe decir $\overset{\frown}{AB}$ y no $\overline{AB}$ como aparece en el cuaderno. $\overset{\frown}{AB} = 98°$ (se calcula por resta de arcos).

e) La longitud de la circunferencia es aproximadamente igual a 35 cm.

14. a) En los triángulos *AOC* y *COB*:

$\overline{CO} = \overline{CO}$ por lado común a los dos triángulos.

$\overline{AC} = \overline{BC}$ porque a arcos iguales se oponen cuerdas iguales.

$\overline{AO} = \overline{BO}$ por ser radios de la circunferencia.

Luego $\Delta AOC = \Delta COB$ por tener respectivamente iguales sus tres lados.

b) En este inciso debe decir $\overset{\frown}{AB}$ y no $\overline{AB}$ como aparece en el cuaderno. *AB* = 124° porque la amplitud del ángulo central es igual a la amplitud de su arco correspondiente.

c) $\angle \overset{\frown}{ADB} = 62°$, por inscrito sobre $\overset{\frown}{AB}$.

d) *DB* = 48° por resta de arcos.

e) El área del círculo es aproximadamente igual a 28 cm² (se calcula el radio del círculo a partir del perímetro del triángulo, es importante darse cuenta que dos de los lados del triángulo son radios. Luego se calcula el área aplicando la fórmula del área del círculo.

15. a) $A_s = 10$ cm². b) $A_c \approx 94$ mm². c) 90°.

16. La razón entre sus superficies es 0,9.

17. Es mayor 2,25 veces.

18. a) La pizza se cortó en 8 pedazos.
b) La longitud aproximada de la pizza es 94,2 cm.
Como se tiene el área de un trozo y en el inciso a) se obtuvo que se podía cortar en 8 pedazos, multiplicando 8 por el área de un trozo se obtiene el área de la pizza. Luego aplicando la fórmula del área del círculo, se determina su radio y aplicando la fórmula para calcular la longitud de la circunferencia se llega a calcular la longitud aproximada de la pizza.

Construcción de gráficos circulares o de pastel

1. a) • Mujeres.
• La cuarta parte son niños.
b) Niños: 60; mujeres: 96 y hombres: 84.

2. a) Cuba obtuvo 7 medallas de plata.

b) Oro: $\frac{9}{26} = 0{,}35.$

Plata: $\frac{7}{26} = 0{,}27.$

Bronce: $\frac{10}{26} = 0{,}38.$

c)

Amplitud del sector:

$\alpha_1 = \frac{9}{26} \cdot 360° = 125°.$

$\alpha_2 = \frac{7}{26} \cdot 360° = 97°.$

$\alpha_3 = \frac{10}{26} \cdot 360° = 138°.$

Actuación cubana en Atenas (fig. 24).

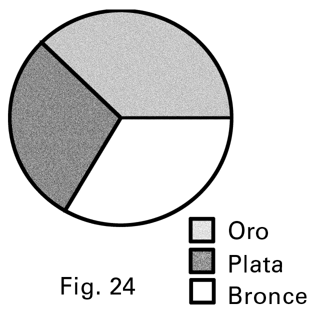


Fig. 24

3. a) Están aún sin incorporarse el 20 % de la matrícula.
   b) Prefieren el círculo de interés de Gastronomía 104 alumnos.
   c) Incorporados a círculos de interés (fig. 25).

   Amplitud del sector:

$$\alpha_1 = \frac{20}{100} \cdot 360^\circ = 72^\circ.$$

$$\alpha_2 = \frac{33}{100} \cdot 360^\circ = 119^\circ.$$

$$\alpha_3 = \frac{27}{100} \cdot 360^\circ = 97^\circ.$$

$$\alpha_4 = 360^\circ - (72^\circ + 119^\circ + 97^\circ) = 72^\circ.$$

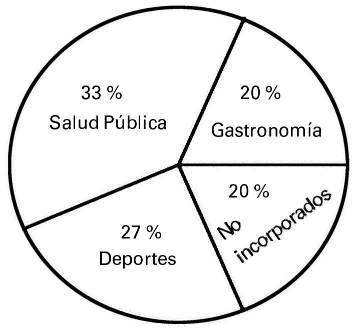


Fig. 25

4 CAPÍTULO

Los cuerpos y sus magnitudes

4.1 El prisma y la pirámide

Ejercicios página 93

1. (Ejercicio 2, p. 177 del libro de texto de séptimo grado.)
   a) Prisma recto de base rectangular.
   b) Pirámide recta de base triangular.
   c) Prisma recto de base triangular.
   d) Pirámide recta de base hexagonal.

3. (Ejercicios del 2 al 8, p. 174 del libro de texto de séptimo grado.)
   2. a) Falso, porque es necesario contar también el vértice principal.
      b) Falso, porque son rectángulos si el prisma es recto.
      c) Falso, porque de cada vértice sale una arista lateral.
      d) Verdadero, porque todas las aristas laterales se unen a un vértice común.
   3. Tres, ya que en la base el menor polígono que puede haber es un triángulo.
   4. 18 aristas. Tiene 12 aristas de la base (seis en cada base) y 6 aristas laterales.
   5. Si tiene 5 caras, tendrá dos caras que son las bases y tres caras laterales. Luego las bases son triángulos con tres aristas cada una y tres laterales, serían 9 en total.
   6. Tendrá 7 caras, una es la base y 6 serían caras laterales.
   7. 8 vértices, ya que sus bases serían cuadriláteros con 4 vértices en la base inferior y 4 en la superior.
   8. Son prismas rectos por tener dos caras paralelas e iguales y sus caras laterales son rectángulos.

9U-44 Solucionario Tripa.pmd 50-51 17/12/2000, 12:39

Ejercicios página 94

Nota. Ten en cuenta que la respuesta debes darla con la menor cantidad de cifras esenciales, que aparecen en los datos, por eso en estos ejercicios hubo necesidad de hacer cambio de unidades de medida para ajustarse a las reglas del cálculo aproximado.

1. a) La tercera parte del área total es aproximadamente 2,7 dm^2.
   b) El 25 % de su volumen es aproximadamente 1,5 dm^3.

2. El volumen es aproximadamente 0,31 dm^3.

3. 216 cm^3.

4. a) Su capacidad en litro es 5 000 000 L.
   b) Se utilizaron 46 250 azulejos.

5. El área lateral de la pirámide es 168 mm^2.

6. El 80 % de su volumen es 0,5 dm^3.

7. El volumen del prisma es aproximadamente 0,11 dam^3.

8. El área total es aproximadamente 3,8 m^2 y el volumen 0,51 dm^3.

9. a) El volumen de la pirámide es aproximadamente 1,2 m^3.
   b) Las aristas laterales del rombo miden 13 dm y 20 dm.

10. Puede tener 60; 30; 20; 15; 12; 10; 6; 5; 4 o 3 lados.

11. El volumen de la pirámide es 0,96 dm^3.

12. a) La altura de la pecera mide 4,0 dm.
    b) Se ha utilizado 79 dm^2 de cristal.

4.2 El cilindro, el cono y la esfera

Las respuestas de los ejercicios que se indican en la página 97 aparecen en las páginas 202, 203 y 204 del libro de texto de octavo grado.

Ejercicios página 99

1. La longitud del radio es 3,0 cm y el área lateral es aproximadamente 1,9 dm^2.

2. a) $V \approx 0{,}11 dam^3$. b) $A_T \approx 1{,}3\ dam^2$.

3. a) La altura del tanque cilíndrico debe ser 50 dm.
   b) Se necesitan aproximadamente 38 m^2 de material.

4. a) Se necesitan aproximadamente 0,66 dm^2 de material. No alcanzará.

5. Se necesitan aproximadamente 57 dm^2 de material.

6. La longitud de su radio es igual a 8,0 cm y la de su generatriz 8,5 cm.

7. a) El volumen es aproximadamente 0,31 dm^3.
   b) El área total es aproximadamente 2,8 dm^2.

8. a) Se puede almacenar aproximadamente 0,38 dm^3 de líquido.
   b) Se necesitan aproximadamente 1,5 m^2 de cartón.

9. La altura del recipiente es 12 dm.

10. Es necesario utilizar aproximadamente 2,6 m^2 de cartulina.

11. Será mayor en 8,0 dm.

12. La superficie de la pelota esférica es aproximadamente igual a 18 dm^2.

13. El globo contiene aproximadamente 2,5 dm^3 de aire.

14. Se necesita aproximadamente 16 m^2 de plástico.

Las respuestas de los ejercicios que se indica resolver de los libros de texto de séptimo y octavo grados aparecen los de séptimo en la página 200 y los de octavo en las páginas 203, 204 y 205.

Ejercicios y problemas sobre cuerpos compuestos

1. El dato que se da de la altura de la pirámide no hay que utilizarlo para resolver el problema, pues se da como dato el área de las caras de la

pirámide y la longitud de la arista del cubo lo cual permite calcular las áreas de las caras de este.

El área total del cuerpo es 2,4 m^2.

Para resolverlo es necesario calcular el área lateral de la pirámide y adicionarla 5 veces al área de una de las caras del cubo. Observa que la superficie superior del cubo queda en el interior del cuerpo y no forma parte del área de este.

Nota: El problema resultaría más interesante si no se da como dato el área de las caras de la pirámide y sí la altura de la pirámide para que se tenga necesidad de calcular la altura de las caras laterales de esta y, por tanto, su área lateral.

2. En el texto del problema hay que agregar el dato que la altura del tornillo es de 12 cm. Se necesitarán aproximadamente 47 dm^3 de material.

   En este problema se debe calcular el volumen de la parte semiesférica y el volumen de la parte cilíndrica, después los adicionamos y obtenemos la cantidad de material necesario para un tornillo. Al final multiplicamos esa cantidad por 200.

3. Se extrajeron al dado aproximadamente 4,5 dm^3. Aquí es necesario tener en cuenta la cantidad de perforaciones que se realizan para marcar los números que son 21. Estas perforaciones son semiesféricas luego debemos calcular el volumen de una y multiplicarlo por 21. También es posible calcular el volumen de una esfera de radio 0,2 mm y multiplicarlo por 10,5, ya que 21 semiesferas forman 10 esferas y media.

4. a) La capacidad del recipiente es aproximadamente igual a 32,3 m^3. La capacidad total se calcula adicionando las capacidades de los tres cuerpos que componen el recipiente. De los datos se infiere que el radio del cono, del cilindro y la semiesfera es de 1 m y la altura del cono es de 2 m.
   Para determinar la altura del cilindro basta sustraerle al largo total del recipiente (que es su altura) las longitudes del radio de la semiesfera y de la altura del cono.
   b) Corresponde a la pieza cilíndrica aproximadamente el 87,5 % del total.