0UP-019.qxp 9/3/10 17:23 Página I

Matemática 8vo. grado

Cuaderno Complementario
Soluciones y Respuestas

Matemática 8vo. grado

Cuaderno Complementario
Soluciones y Respuestas

M. Sc. Aurelio Quintana Valdés
M. Sc. Mayra Rodríguez Aruca
Lic. Armando Sandoval Torres
Lic. Javier García Rusindo
Dra. Juana Lamanier Ramos
Dra. Martha Álvarez Pérez
Dr. Eduardo Villegas Jiménez

Editorial
Pueblo y Educación

Edición: Lic. Laura Herrera Caseiro
Diseño de cubierta: Olga L. Domínguez Sánchez
Diseño: Airam Expósito Fernández
Ilustración: José C. Chateloín Soto
Corrección: Esmeralda Ruiz Rouco
Emplane: José Jorge Orges Gómez
María de los Ángeles Ramis Vázquez

ISBN 978-959-13-1938-8

EDITORIAL PUEBLO Y EDUCACIÓN
Ave. 3ra. A No. 4605 entre 46 y 60,
Playa, Ciudad de La Habana,
Cuba. CP 11300.

A los profesores

La observación de la práctica escolar demuestra constantemente la necesidad de incorporar nuevas ideas que permitan mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Precisamente esta publicación tiene como objetivo contribuir a facilitar el trabajo del profesor general integral de Secundaria Básica.

Por medio de este libro se pretende poner en sus manos un material que le sirve para verificar la corrección de las soluciones y respuestas obtenidas por sí mismo a los ejercicios propuestos en el *Cuaderno Complementario de Matemática de octavo grado* y obtener sugerencias valiosas en relación con algunas de sus posibles vías de resolución. Es, por tanto, un material que puede utilizar en el proceso de planificación de sus clases.

En algunos casos, se ofrecen explicaciones más detalladas acerca de las soluciones de los ejercicios y problemas que se consideran de mayor dificultad y complejidad; además, se incluye la fe de erratas de algunos ejercicios propuestos en el cuaderno.

El colectivo de autores agradece altamente cualquier sugerencia que se considere necesaria con vista a su ulterior reedición.

Los autores

0UP-019.qxp 9/3/10 17:23 Página VI

Índice

1
CAPÍTULO

Números con signos

1.1 Los números naturales y sus opuestos

1.

Animales	Mamíferos	Aves	Insectos
mariposa	$\notin$	$\notin$	$\in$
tigre	$\in$	$\notin$	$\notin$
serpiente	$\notin$	$\notin$	$\notin$
paloma	$\notin$	$\in$	$\notin$
tortuga	$\notin$	$\notin$	$\notin$
mosca	$\notin$	$\notin$	$\in$
anguila	$\notin$	$\notin$	$\notin$
hombre	$\in$	$\notin$	$\notin$

2. a) Falsa. $B \not\subset A$ (porque todos los elementos del conjunto B están incluidos en el conjunto A).
   b) Verdadera. $-2 \in B$.
   c) Verdadera. $A \cap C = \{-4; 7\}$ (porque son elementos comunes a los conjuntos A y B).
   d) Verdadera. $B \cap C = \phi$ (porque B y C no tienen elementos comunes).
   e) Verdadera. $A \cup B = A$ (porque todos los elementos del conjunto B están incluidos en el conjunto A).
3. $-1 \notin \mathbb{N}$; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; $0 \in \mathbb{Z}$; $-100 \notin \mathbb{N}$; $4 \in \mathbb{Q}_+$; $\frac{1}{8} \notin \mathbb{Z}$; $4 \in \mathbb{Z}$; $1{,}23 \in \mathbb{Q}_+$.
4. a) 15 –3 $\frac{3}{4}$ 1 –9 0 –1 2.
   b) El opuesto de –3 es 3 y el opuesto de 15 es –15.
   c) $|15| = 15$ y $|-9| = 9$.
   d) Se cumple para $x = \pm 15$.

e) Como $y - 3 > 0$, entonces la igualdad $|y - 3| = 1$ se transforma en la ecuación lineal $y - 3 = 1$ que al resolverla se obtiene $y = 4$.

5. a) Falsa, porque existen números negativos que no son números enteros: ejemplo $-\frac{1}{2}$.
   b) Falsa, porque en el conjunto de los números enteros se encuentran los enteros negativos que no son naturales.
   d) Falsa, porque el opuesto de –6 es 6.
6. Hace 3 meses, la estudiante pesaba 6 libras más (+6) y dentro de 2 meses pesará 4 libras menos (–4).
7. *Nota:* Por error, en el cuaderno no aparece señalado el rayo que se destaca.
   Ver figura 1.

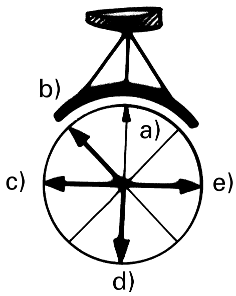


Fig. 1

8. *Nota:* En este ejercicio se deben cumplir las condiciones simultáneamente. Recuerda que si la variable a toma valores enteros, entonces estos pueden ser positivos, negativos o cero, según el caso.
   a) Si $-8 < a$ y $a < 6$, entonces se puede decir que los valores de a que cumplen la condición dada son: –7; –6; –5; –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4 y 5.
   b) Si $10 < a$ y $a < 11$, entonces a no toma ningún valor entero.
   c) *Nota:* En este ejercicio la condición debe ser $3 < a$ y $a \leqslant 5$, entonces los valores que puede tomar a son 4 y 5.
   d) Si $0 < a$ y $a < 2$, entonces el único valor que puede tomar a es 1.
   e) Si $a > 15$ y $a < 0$, entonces no existe ningún valor de a que cumpla estas condiciones.
   f) Si $|a| > 7$ y $a > -3$, entonces los valores de a pueden ser todos los números enteros mayores que 7.
9. La temperatura que marcaba la columna de mercurio al concluir el experimento era 30 ºC.
10. El pasajero se encuentra del pez a 11 m.
    El pasajero se encuentra de la ventana a 4 m.

El pasajero se encuentra del marinero a 8 m.
El pasajero se encuentra del submarino a 156 m.

11. Al horario le dio $-\frac{1}{4}$ de vuelta y al minutero –3 vueltas.

1.2 Los números fraccionarios y sus opuestos. Su utilización en el análisis e interpretación de datos cuantitativos

1. Ver figura 2.

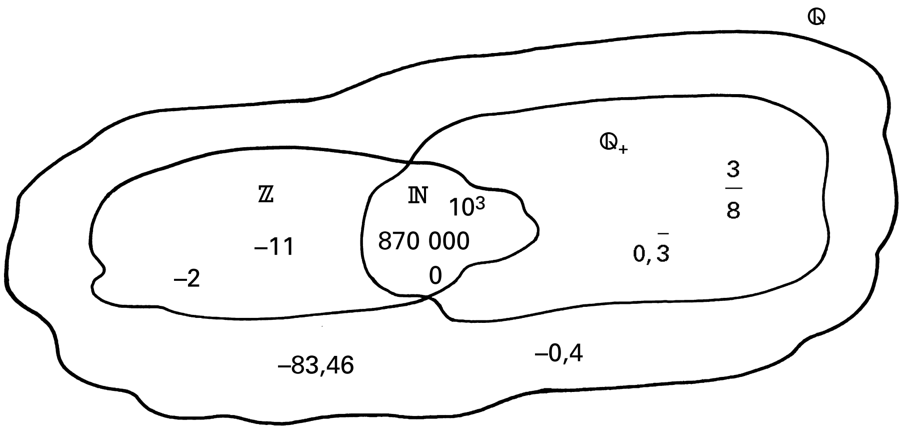


Fig. 2

2. Ver figura 3.

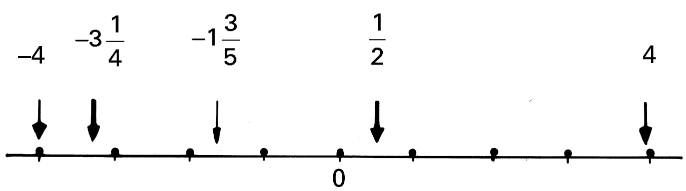


Fig. 3

El número mayor es 4 y el menor es –4.

Nota: Los valores de los números racionales que se corresponden con cada uno de los puntos señalizados se deben expresar lo más aproximados posible.

3. Las proposiciones verdaderas son: $\underline{a < e}$; $\underline{b > c}$; $\underline{c > e}$; $\underline{a < b}$.

4. *Nota:* Algunos ejercicios pueden analizarse utilizando una recta numérica. En algunos casos puedes encontrar otras frases igualmente válidas a las que se proponen a continuación para completar los espacios en blanco.

- $\frac{3}{4} > \frac{6}{5}$ porque $\frac{3}{4}$ está más a la izquierda en la recta numérica que $\frac{6}{5}$.
- El número –100 pertenece al conjunto de los números enteros.
- $-\frac{1}{21} \equiv -\frac{2}{42}$ porque el producto de los medios es igual al producto de los extremos.
- El conjunto de los números fraccionarios es un subconjunto del conjunto de los números racionales.
- $0 > -\frac{1}{2}$ porque 0 está más a la derecha en la recta numérica que $-\frac{1}{2}$ o porque el cero es mayor que todo número negativo.
- El módulo de –2,45 es 2,45.

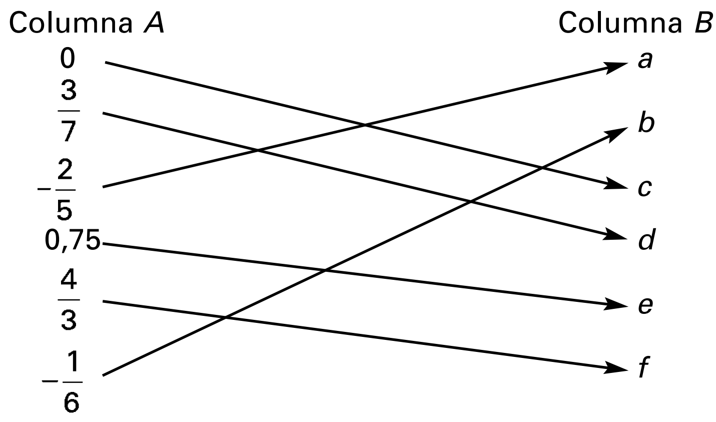
5. a) 0 está ubicado entre A y B $\left(-1 < 0 < \frac{1}{2}\right)$.

   b) $-\frac{1}{4}$ está situado entre A y B $\left(-1 < -\frac{1}{4} < \frac{1}{2}\right)$.

6. a) $-\frac{3}{2} = -1{,}5$ b) $-0{,}781 > -0{,}781\,6$ c) $\frac{1}{3} > 0{,}25$ d) $\frac{7}{3} > \frac{7}{5}$

   e) $0 > -10\,000$ f) $\sqrt[3]{83} < \sqrt{43}$ g) $-\frac{8}{9} < \frac{10}{9}$ h) $\frac{16}{64} > -\frac{4}{32}$

7.



8. $|-4|$; $\frac{1}{4}$; 0; $-\frac{5}{10}$; –1; –3,2.

9. –0,2 y $\frac{1}{100}$.

10. Un trío de números que cumple esta condición es, por ejemplo:

    $-\frac{8}{10}$; $-\frac{7}{10}$ y $-\frac{6}{10}$; donde $-\frac{8}{10}$ es el menor.

11. –0,600.

12. Menores que –0,4: $A = \{-0{,}5; -1; -1{,}8\}$

    Mayores que $-\frac{3}{2}$: $B = \{-\frac{1}{2}; -0{,}3; -0{,}1\}$

    Mayores que $-\frac{1}{2}$ y menores que 3: $C = \{-\frac{1}{4}; -0{,}23; 2\}$

13. *Nota:* Puedes utilizar una simbología similar a la siguiente: Arquímedes (A); Cantor (Cr); Cavalieri (Ci); Euclides (Es); Euler (Er); Pitágoras (P); Tales (T).
    Ver figura 4.

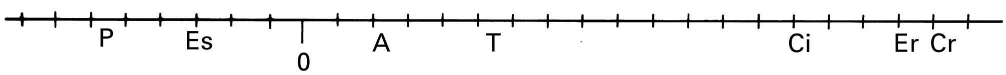


Fig. 4

Sistemas de coordenadas rectangulares

1. a) $M(-3; 0)$, $N(3; 0)$, $P(0; 2)$.
   b) Ver figura 5.

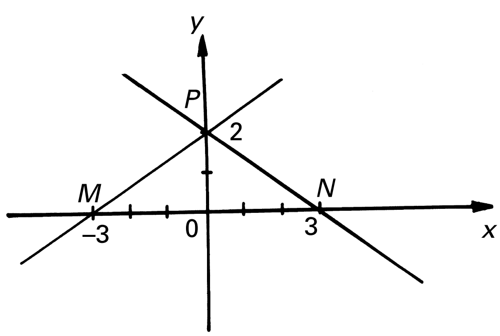


Fig. 5

   c) ΔMNP isósceles de base $\overline{MN}$. Si nombramos O al origen de coordenadas, entonces ΔPON es rectángulo en O.

$$A_{\Delta MNP} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\overline{MN} \cdot \overline{OP}}{2} = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6$$

$$A_{\Delta MNP} = 6{,}0\ u^2$$

2. a) Ver figura 6.

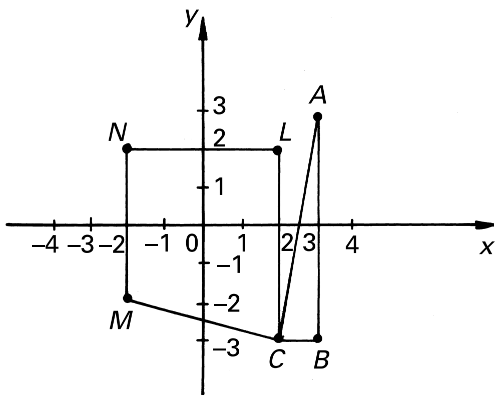


Fig. 6

b) *ABC* es un triángulo rectángulo en *B* y *LNMC* es un trapecio rectángulo.

$$A_{\text{Total}} = A_{\text{Triángulo}} + A_{\text{Trapecio}} = \frac{1 \cdot 6}{2} + \frac{(5+4)\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}} = 3 + 18 = 21$$

El $A_{\text{Total}} = 21\ u^2$.

3. a) Ver figura 7.

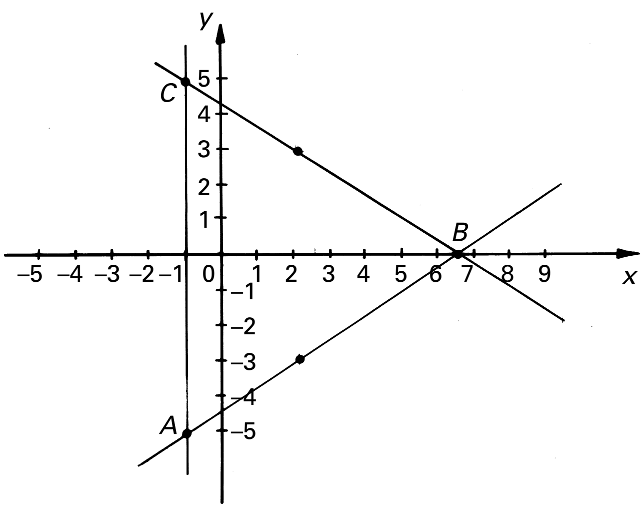


Fig. 7

b) Se formó un triángulo isósceles de base $\overline{AC}$.
c) B (6,5; 0); $A_{\triangle ABC} = 37{,}5\ u^2$.

4. a) A (–6; 0), B (6; 0), C (6; 12), D (–6; 12), E (–6; 4), F (0; 0), G (6; 4), H (0; 4).
   b) $A_{EGCD} = 96\ cm^2$; $P_{EGCD} = 40$ cm.

5. El disparo se realizó aproximadamente a 6,25 m de la superficie.

Análisis e interpretación de datos cuantitativos

a) Al conjunto de los números fraccionarios.
b) Un millón novecientos cincuenta y ocho mil doscientos uno y doscientas cuarenta centésimas.
c) 3 761 274 y 0,6.
d) $\frac{25\,278}{100}$ que se lee: veinticinco mil doscientos setenta y ocho centésimos.
e) El Salvador, Trinidad y Tobago, Cuba, México, Argentina.
f) En 1 847 281 km^2.
g) El promedio de esperanza de vida es aproximadamente de 72 años.
h) Ver figura 8.

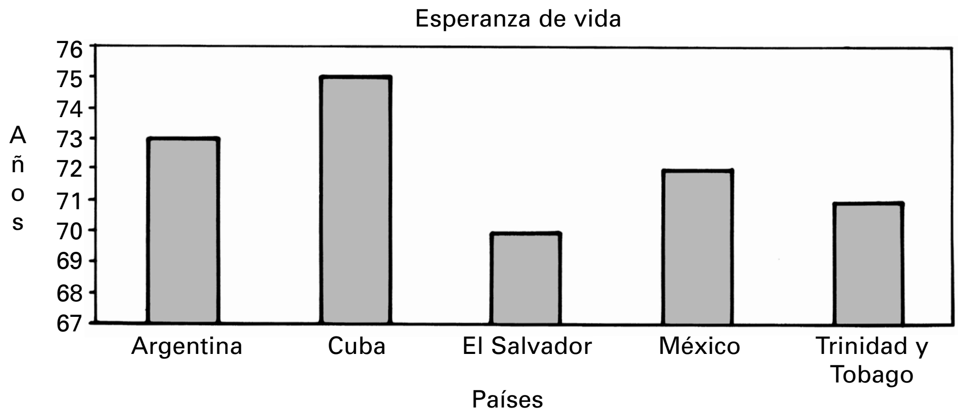


Fig. 8

En el comentario debes tener en cuenta aspectos fundamentales como: influencias económicas y sociales de la política de cada uno de los países.

2. a) La población se forma con todos los alumnos de la escuela que participaron en el concurso de Matemática y la muestra se constituye con los 20 alumnos seleccionados al azar para realizar el estudio.

b) Ver tabla 1.

Tabla 1

Notas	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Frecuencia absoluta	1	2	1	6	4	5	1
Frecuencia relativa	0,05	0,10	0,05	0,30	0,20	0,25	0,05

c) Ver figura 9.

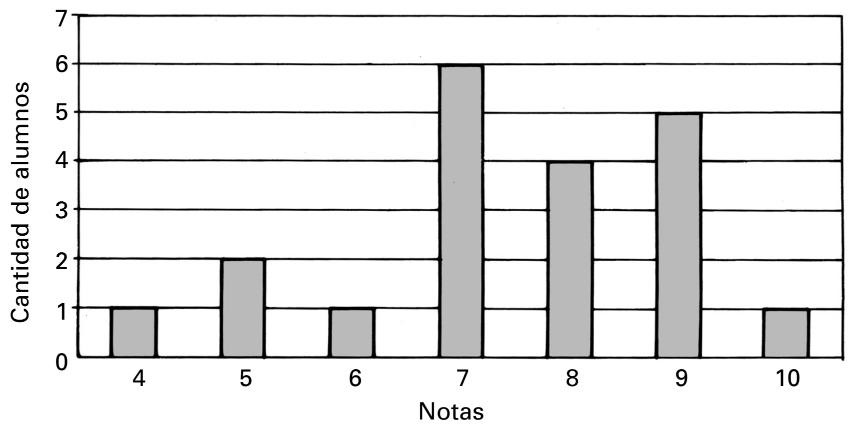


Fig. 9

d) La moda es 7 puntos y la media aritmética 7,45 puntos.
e) El 50 % de los alumnos obtuvo nota inferior a 8 puntos.

3. a) La media es 37,3.
   b) La moda es la asignatura Historia.
   c) En Matemática participaron el 37,5 % de los alumnos.

4. a) Ver figura 10.

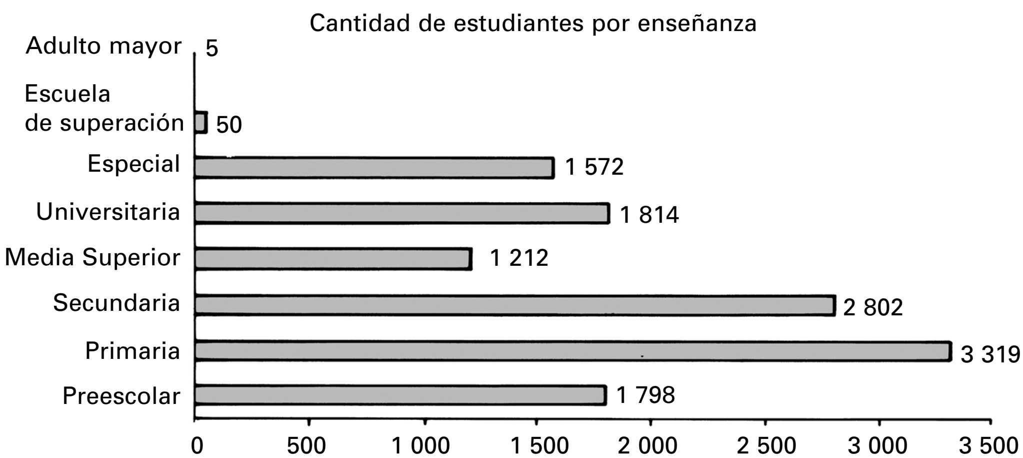


Fig. 10

b) La matrícula de primaria excede a la de secundaria en 517 estudiantes.

5. a) Ver figura 11.

Variación de temperatura en 10 horas

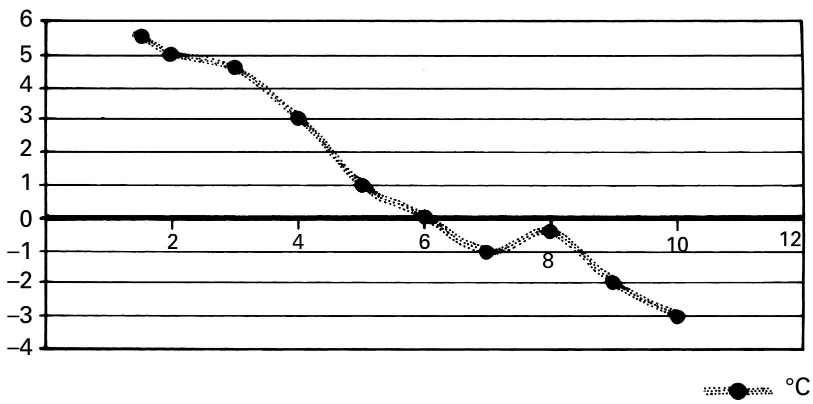


Fig. 11

b) Hubo más frío a las 10:00 p.m.
c) La temperatura descendió 8,5 °C.

6. Primer día: 15,08°;
segundo día: 2,08°;
tercer día: –2,08°;
cuarto día: –3,8°.

7. a) Ver tabla 2.

Tabla 2

Frecuencia tareas sin hacer	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Total**
Absoluta	4	2	5	1	6	10	10	1	1	40
Relativa	0,10	0,05	0,30	0,30	0,15	0,25	0,25	0,03	0,03	1

b) El promedio de tareas sin hacer en este grupo es aproximadamente de 4.
c) La mayor incidencia la tienen 20 alumnos, los cuales representan el 50 % de la matrícula de octavo grado.

8. a) Quedan agrupados en las categorías de excelente: 150; muy bien: 150; bien: 450; regular: 300 y mal: 150.
b) Los aprobados representan el 87,5 % del total y los desaprobados el 12,5 %.
c) La moda es la calificación de Bien, porque es el dato que más se repite.

d) Ver tabla 3.

Tabla 3

Frecuencia	**E**	**MB**	**B**	**R**	**M**
Absoluta	150	150	450	300	150
Relativa	0,13	0,13	0,38	0,25	0,13

e) Analiza los resultados y expresa tus propias conclusiones.

9. a) 175 677.
   b) 1 531 centenas.
   c) La cantidad de alemanes que nos visitaron en 2000 excede en 21 244 a los que nos visitaron en 1999.
   d) La media por año es 143 868,8 visitantes.
   e) Ver figura 12.

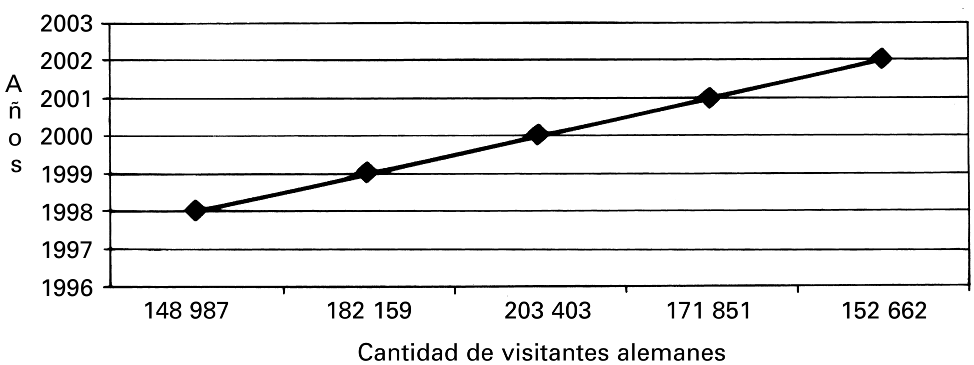


Fig.12

Nota: El análisis de la gráfica te ayudará en la elaboración de conclusiones.

f) En 1999 nos visitaron 276 346 canadienses.

10. a) Ver figura 13.
    b) Europa: seiscientos setenta y un millones.

    Asia: dos mil seiscientos dos millones.
    África: cuatrocientos treinta y siete millones.
    América: quinientos ochenta y ocho millones.
    Oceanía: diecisiete millones trescientos cuarenta y tres mil.

    c) Oceanía, Europa, África, América y Asia.
    d) La población de Asia supera a la de África en 2 165 000 000 de habitantes.

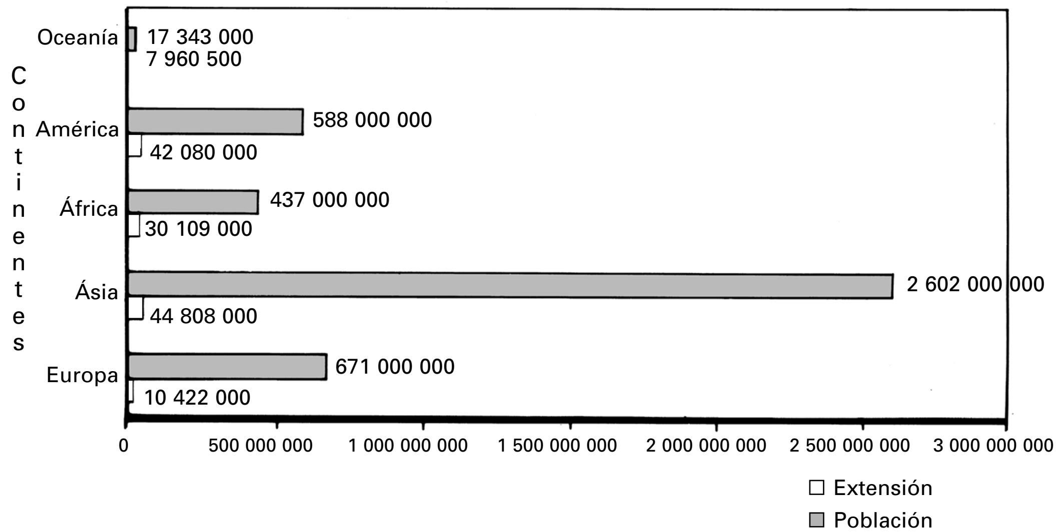


Fig.13

11. a) Ver tabla 4.

Tabla 4

Notas	**Frecuencia**		
	Séptimo	**Octavo**	**Noveno**
4	1	1	0
5	1	0	1
6	1	5	4
7	3	3	0
8	5	4	6
9	4	3	3
Total	15	15	15

b) Promedio de notas en séptimo 7,47 y en octavo 7,33.
c) La media de notas de noveno es 7,53.
d) 10 alumnos tienen calificaciones por encima de 6 puntos, lo cual representa aproximadamente el 67 % de la matrícula del grupo.
e) La nota más frecuente en séptimo grado es 8, en octavo es 6 y en noveno es 8.
f) La frecuencia relativa del dato de mayor frecuencia absoluta en noveno grado es 0,40.

g) Ver figura 14.

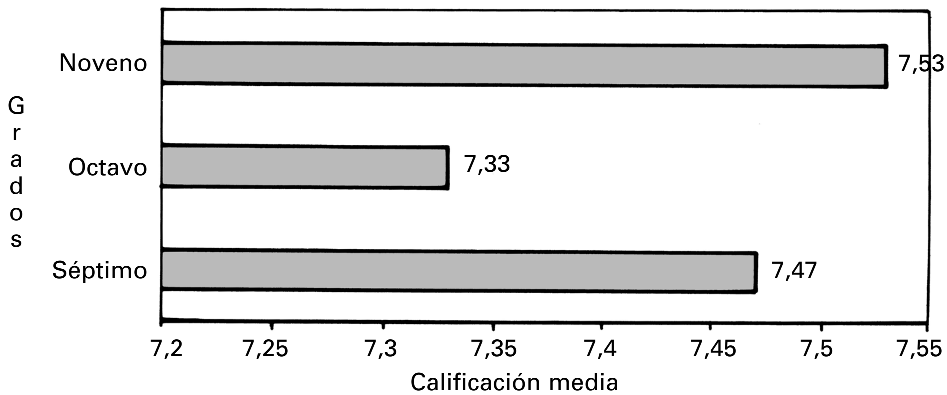


Fig. 14

12. a) El crecimiento medio es aproximadamente 33,46 cm.
    b) Alcanzaron crecimiento entre 20 y 30 cm solo 13 plantas.
    c) El valor que muestra el crecimiento más frecuente es 30 cm.

13. a) En el día (tabla 5).

Tabla 5

Frecuencia	**Hombres**	**Mujeres**	**Niños**	**Total**
Absoluta	171	325	463	959
Relativa	0,18	0,34	0,48	1

b) 171 < 325 < 463.

c) La cantidad de mujeres comensales supera a la cantidad de hombres, con igual condición, en 154 unidades.

d) Ver figura 15.

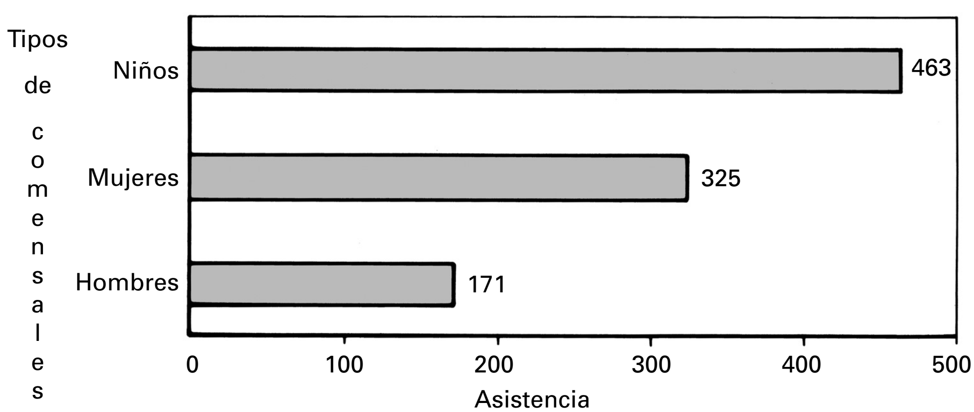


Fig. 15

Esta situación puede representarse también mediante una gráfica circular o de pastel (fig. 16).

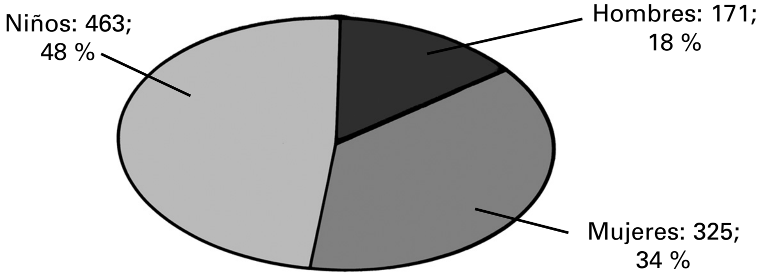


Fig. 16

14. a) Gráfica poligonal o de líneas.
    b) Con la finalidad de analizar la tendencia en el comportamiento de la asistencia de alumnos.
    c) El segundo día.
    d) La media aritmética de la cantidad de alumnos que asisten diariamente es 27.
    e) El noveno día se alcanzó un 97 % de asistencia.
15. a) La media aritmética es aproximadamente 488 horas. No hay moda. La medida más representativa es la media aritmética, ya que indica el valor alrededor del cual se encuentran los datos que se analizan.
    b) Puede realizarse la divulgación, ya que $\frac{2}{3}$ de las baterías (aproximadamente el 67 %) tienen una duración de más de 400 horas.
16. a) *Nota:* Para construir el gráfico es necesario calcular la población del 2000. Observa los datos correspondientes al quinquenio 1987-1992. Ver figura 17.

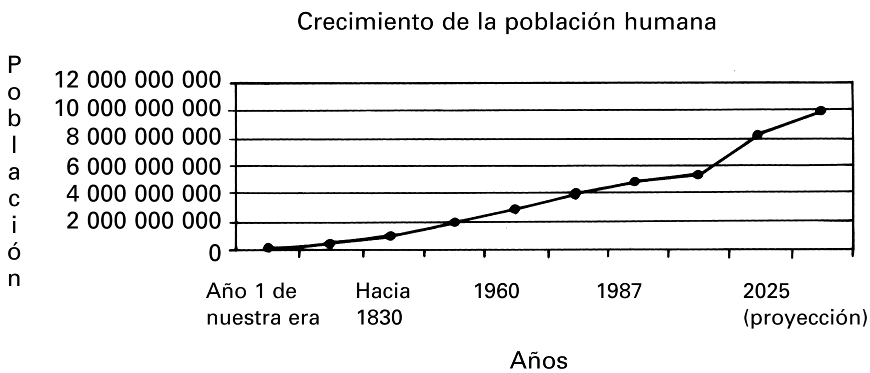


Fig. 17

b) La población tardó en duplicarse 1 100 años.
c) Se ha duplicado 4 veces.
d) Bajo las condiciones que se consideran, cuando tengas 70 años habitarán el planeta aproximadamente 12 305 000 000 de personas.

17. a) Están destinadas al cultivo de lechuga y ajo el 20 %.
b) La siembra de papa supera al resto de los cultivos en 288 ha.

1.3 Operaciones con números racionales

1. Ver tabla 6.

Tabla 6

A + B	***B – C***	***|C – B – A|***
2	–2	5
0,2	4,1	3,7
–0,775	3,85	3,225
2,64	2,59	289

2. a) 47 b) 207,5 c) –95,1 d) 3 e) –45,8
3. a) Ver tabla 7.

Tabla 7

Países	**Diferencia**
Cuba	12
España	8
Italia	3
Rusia	4
Francia	8

b) De Cuba: Ciudad de La Habana (Continente Americano)
De España. Madrid (Continente Europeo)
De Italia: Roma (Continente Europeo)
De Rusia: Moscú (Continente Europeo)
De Francia: París (Continente Europeo).

4. La suma es menor que 10.
Nota: Existen diferentes vías de solución para este ejercicio. Intenta realizar el cálculo al menos por dos vías diferentes.

5. a) Falsa.
   b) Verdadera.
   c) Falsa.
6. a) 65,1 m b) 6,20 m c) 27,9 m d) 71,3 m
7. Ver tabla 8.

Tabla 8

Horario	**Saldos**
9:00 - 10:00	–11 237,35
10.00 - 11:00	–7 722,38
11:00 - 12:00	8 099,70
Total	–10 860,03

8. Para llegar a la cumbre el alpinista debe recorrer 800 metros más.
9. *Nota:* Realiza los cálculos comenzando por el nivel inferior.
   Ver figura 18.

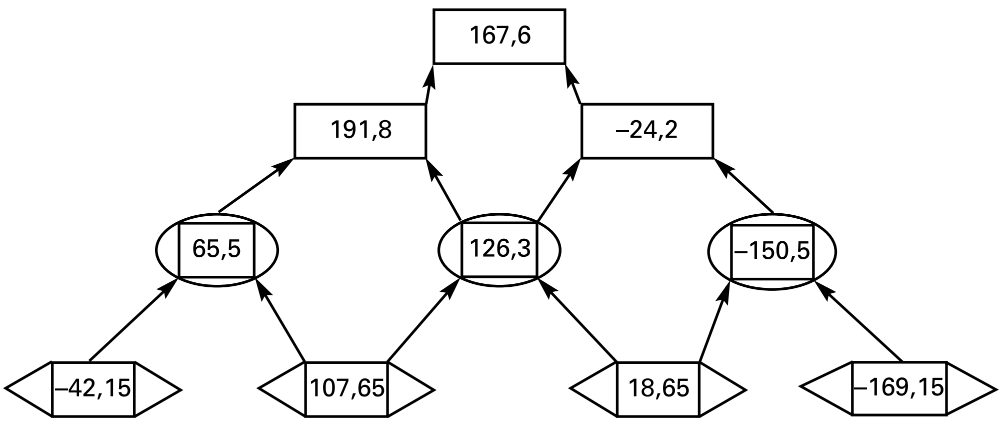


Fig. 18

10. El cuadrado es mágico.
11. Porque estos resultados tienen una significación negativa en las valoraciones que pueden realizarse de cada uno de los grupos.
    Las casillas en blanco de la tabla representan a los grupos que no tuvieron ausentes. Hay tres grupos que tienen el 100 % de asistencia (casillas en blanco), un grupo con 90 % (–3), y dos grupos tienen más del 90 % y menos del 100 % (–1 y –2).
12. *Nota:* Recuerda que un cuadrado es mágico si las sumas de los números de las casillas horizontales, verticales y diagonales son iguales.

4,2	3,5	4
3,7	3,9	4,1
3,8	4,3	3,6

4,5		2,5
	1,5	
0,5		–2,5

El segundo cuadrado no es mágico, porque las diagonales no suman lo mismo, una suma 3,5 y la otra 4,5.

54	*A*	–24	36
–12	*B*	*C*	6
E	0	–6	*F*
G	42	*H*	–36

Este cuadrado para que sea mágico y, como se indica, la suma sea 36, $A = –30$, $B = 24$, $C = 18$, $E = 12$, $F = 30$, $G = –18$ y $H = 48$.

13. *Nota:* En este ejercicio se consideró que cada uno de los primeros 100 kWh que se consumen tiene un costo de $ 0,09 y a partir de 101 el costo de cada kWh, asciende a $ 0,20. En el importe de Cristian Daniel que aparece en la tabla hay un error, en realidad es $ 12,60 y no $ 12, como aparece.

a) Ver tabla 9.

Tabla 9

Pioneros	**Consumo (en kWh)**	**Plan (en kWh)**	**Diferencia (en kWh)**	**Importe ($)**
Sergio Ariel	186	140	46	26,20
Cristian Daniel	118	120	–2	12,60
Ricardo Viere	142	142	0	17,40
Lisbet	108	122	–14	10,60
Lismary	126	100	26	14,20

b) Cristian Daniel y Lisbet.

Multiplicación, división, potenciación y operaciones combinadas

1. Ver tabla 10.

Tabla 10

A · C	***C : B***	***B – C : A***	***C – 3A : 2B***
–21	0,6	$-\frac{32}{7}$	–0,9
1,4	$-\frac{35}{6}$	–8,15	–2,5
2,5	$\frac{400}{15}$	–6,55	–10,25
$-\frac{3}{40}$	$-\frac{25}{234}$	$\frac{238}{75}$	$-\frac{137}{308}$

2. Ver tabla 11.

Tabla 11

1/2	·	–4	**–2**
–	//////	·	:
0,9	//////	$\frac{24}{10}$	$\mathbf{\frac{1}{5}}$
–0,4	+	**–9,6**	–10

3. 3.
4. a) Incorrecto, porque da como resultado –14,5.
   c) Incorrecto, porque da como resultado 237,6.
5. 0,48.
6. –5,4.
7. $a = -29$, $a \in \mathbb{Z}$ y $b = \frac{343}{110}$, $b \in \mathbb{Q}_+$.
8. –1.
9. 1.
10. *Nota:* El análisis que debes realizar puede ser el siguiente:
    a) Si el resultado debe ser positivo, significa que es mayor que cero.

Luego analizando cada expresión:

1) Si $-2x > 0$, entonces para todas las $x < 0$ el valor de la expresión siempre va a ser positivo.

   Ejemplo: tomando $x = -\frac{1}{2}$, quedaría: $-2\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.

2) Si $\frac{-x-1}{2} > 0$, entonces para todas las $x < -1$ el valor de la expresión va a ser siempre positivo.

   Ejemplo: tomando $x = -2$ quedaría: $\frac{-(-2)-1}{2} = \frac{1}{2}$.

3) Si $\frac{x}{2} - \frac{1}{3} > 0$, entonces para todas las $x > \frac{2}{3}$, el valor de la expresión va a ser siempre positivo.

   Ejemplo: tomando $x = \frac{4}{3}$, tenemos que $\frac{\frac{4}{3}}{2} - \frac{1}{3} = \frac{4}{6} - \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

b) Si el resultado debe ser negativo, significa que es menor que cero, luego analizando cada expresión:

1) Si $-2x < 0$, entonces para todas las $x > 0$ el valor de la expresión siempre va a ser negativo.

   Ejemplo: tomando $x = \frac{1}{2}$, quedaría: $-2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$.

2) Si $\frac{-x-1}{2} < 0$, entonces para todas las $x > -1$ el valor de la expresión va a ser siempre negativo.

   Ejemplo: tomando $x = 0$, quedaría: $\frac{-(0)-1}{2} = -\frac{1}{2}$.

3) Si $\frac{x}{2} - \frac{1}{3} > 0$, entonces para todas las $x < \frac{2}{3}$, el valor de la expresión va a ser siempre negativo.

   Ejemplo: tomando $x = \frac{1}{3}$ tenemos que $\frac{\frac{1}{3}}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$.

c) A continuación el análisis que se debe realizar en cada expresión para que el resultado sea cero.

1) Si $-2x = 0$, entonces $x = 0$ se cumple que el valor de la expresión va a ser cero.

2) Si $\frac{-x-1}{2}=0$, entonces para $x = -1$ el valor de la expresión va a ser cero.

3) Si $\frac{x}{2}-\frac{1}{3}=0$, entonces para $x=\frac{2}{3}$, el valor de la expresión va a ser cero.

11. a) 45. b) –48. c) –4. d) 14. e) 11,64. f) $\frac{1}{12}$.

12. a) 3 888. b) 67 228. c) 289. d) 4 608. e) 397. f) 5.
g) 15. h) 1. i) –3. j) $-\frac{3}{16}$. k) $\sqrt{164}\approx 12,8$.

13. Verdaderas: b); d); g) y h).

14. a) $E = \{9\}$. b) $E = \phi$. c) $E = \{212\}$.
d) $E = \phi$. e) $E = \{1\}$. f) $E = \{2\}$.

15. $A = -999{,}63$.

16. a) $(-3{,}42)^{15} : (-3{,}42)^{12} \approx 40{,}0$. b) $\frac{1{,}52^3\cdot 1{,}52^4}{1{,}52^5}\approx 2{,}31$.
c) No tiene solución en los dominios estudiados.
d) $\sqrt{18{,}71}+\sqrt[3]{22{,}43}\approx 6{,}25$. e) $\frac{6{,}75^2+8{,}37}{-\sqrt{8{,}585}}\approx -18{,}4$.
f) $\frac{5{,}25^8 : 5{,}25^6-2{,}32^2\cdot 2{,}32^3}{\sqrt{904{,}6}-7{,}436^3}\approx -0{,}104$. g) $\left(\frac{\frac{1}{4}+15{,}38}{10}\right)^2\approx 2{,}43$.
h) $\sqrt[3]{\frac{(-3)^3+10}{1{,}2^2}}\approx -2{,}28$.

17. Aproximadamente 0,007 8.
18. –689,78.
19. *Nota:* En el cuaderno aparece como capacidad del depósito 360 L, se debe cambiar este dato por 350 L.
La respuesta correcta es 315 000 mL.
20. Se comercializan 78 200 000 toronjas.
21. Descendió 15 metros.

22. Se perdieron 1,7 libras de café aproximadamente.
23. La primera vez la pelota cayó desde una altura de 324 cm.
24. Debo comprar al menos 14,3 metros más de tela.
25. La mitad de 2^{20} sería $\frac{2^{20}}{2}$. Aplicando las propiedades de las potencias, se obtiene que $\frac{2^{20}}{2} = 2^{19}$. Hallando este valor, obtenemos 524 288.

    La novena parte de 3^{20} sería $\frac{3^{20}}{9}$. Transformando el denominador, llegamos a $\frac{3^{20}}{3^2}$. Aplicando las propiedades de las potencias, se obtiene 3^{18}, que es igual a 387 420 489.
26. Existen diversas formas de expresar el 96 utilizando diferencias entre cuadrados perfectos, tres de ellas son: 100 – 4; 121 – 25; 196 – 100.
27. Al final del recorrido bajan 48 pasajeros.
28. a) Se pueden formar 120 números.
    Nota: A continuación una orientación que te ayudará a encontrar todos los números. Observa el gráfico de formación (figura 19).

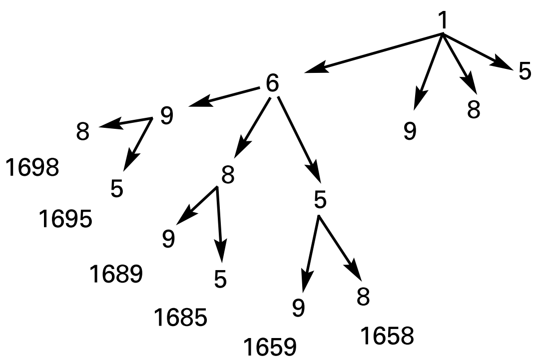


Fig. 19

29. No se puede, porque el diámetro del espejo sería de 3,0 m y es mayor que el largo y el ancho de la ventana.
30. a) Como se deben formar números de tres cifras con los cinco elementos del conjunto *X*, en total hay 60 posibilidades. Por ejemplo, con los elementos 1, 3 y 5 se forman los números 135, 153, 351, 315, 531, 513. Análogamente se obtienen los restantes.

b) El opuesto de cada número mayor que 350 y menor que 500 sería:

351 –351
352 –352

Y así, sucesivamente hasta el 499 que su opuesto sería –499.

c) Para calcular la suma de los números puedes utilizar cualquier medio electrónico. La suma es igual a 63 325 (sesenta y tres mil trescientos veinticinco).

d) $C = \{1; 9; 25; 49; 81\}$

e) $2n + 1$ con $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq n \leq 4$.

f) a) Falsa. b) Falsa. c) Verdadera.

h) Ver figura 20.

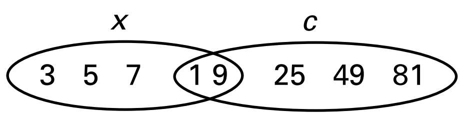


Fig. 20

31. Sus opuestos serían –9; 4; –2; 6 y 7.

a) El mayor valor es 305 y se obtiene de la manera siguiente:

$$\boxed{7}\boxed{4} \cdot \left(\boxed{6} + \boxed{-2} \right) - \boxed{-9}$$

b) El menor resultado es –1 220 y se obtiene de la manera siguiente:

$$\boxed{-9}\boxed{4} \cdot \left(\boxed{6} + \boxed{7} \right) - \boxed{-2}$$

32. a) $2{,}463 \cdot 10^{13}$ (tomando 1 kg ≈ 2,2 lb).

2
CAPÍTULO

Igualdades que contienen variables

2.1 Situaciones que se resuelven con ecuaciones lineales

1. a) $\frac{x}{8}$ o $\frac{1}{8}x$. b) $\frac{x}{4}$ o $\frac{1}{4}x$. c) $5x-6$.

   d) $x^2+\frac{x}{2}$. e) $3x+\frac{y}{2}$. f) $x-\frac{x}{10}$.

   g) $\frac{6x}{5}+\frac{4}{5}x$. h) $4x+3=20$.

   i) $\frac{x}{3}-15=2$; $\frac{x}{3}-2=15$ o $\frac{x}{3}=2+15$

   j) $x+(x+12)=45$ (x representa la cantidad de varones).

   k) $3t-2$.

   l) $\frac{x}{5}-10=30$ (x representa la cantidad de jóvenes).

2. a) La séptima parte de un número.
   b) Un número aumentado en 3.
   c) El quíntuplo de un número disminuido en 2 es igual a 3.
   d) Un número excede a otro en 4 unidades.

3. a) $\frac{n}{3}-2$. b) $2\left(\frac{6}{5}x+16\right)$. c) $1{,}8x-6$.

   d) $P=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}$ (definición de perímetro).

   $\overline{CD}=x$ dm, luego $\overline{AB}=(x+4{,}0)$ dm, ya que $\overline{AB}$ excede a $\overline{CD}$ en 4,0 dm al dividir la longitud de $\overline{CD}$, por la longitud de $\overline{BC}$, se obtiene como cociente 1 y resto 2:

   $$\begin{array}{l|l} x & \overline{BC} \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

Apliquemos la propiedad euclidiana de la división $x = \overline{BC} \cdot 1 + 2$.

(El dividendo es igual al producto del cociente por el divisor más el resto).

Luego $\overline{BC} = x - 2$, entonces:

$$P = (x + 4{,}0)\ \text{dm} + (x - 2)\ \text{dm} + x\ \text{dm} + 3{,}0\ \text{dm}$$

$$P = (3x + 5)\ \text{dm}$$

4. El 75 % de un número *n*, disminuido en su duplo más cinco.
5. La situación práctica no es única, solo presentamos una posible.
   a) La edad de Juan excede en 3 años a la edad de Osvaldo. Siendo *x* la edad de Juan y *y* la edad de Osvaldo.
   b) El cuadrado de la edad de Luis disminuido en su cuádruplo (*x* representa la edad de Luis) o también: La diferencia numérica entre el área de un cuadrado y su perímetro (*x* representa la longitud del lado del cuadrado).
   c) La suma del 20 % y el 25 % de un número disminuida en el duplo del número (*x* representa el número).
   d) La suma del triplo de la cantidad de donaciones de sangre del CDR 1 y el cuádruplo de la cantidad de donaciones de sangre del CDR 2 (*a* es la cantidad de donaciones de sangre del CDR 1 y *b,* la cantidad de donaciones de sangre del CDR 2).
   e) El duplo de la suma del cuádruplo de un número y el número (*x* representa el número).
   f) La mitad de la diferencia entre el triplo de un número y su tercera parte (*z* representa el número).
6. a) 2 y 1,6. b) 1,7 y $\frac{2}{5} = 0{,}4$. c) 9 y $-3\frac{43}{45}$.
   d) –2,502 5 y –1,5. e) –28,2.
7. Ver tabla 12.

Tabla 12

x	–5	$-1\frac{1}{2}$	0	$\frac{7}{4}$	2,5
$-2x + \frac{1}{3}$	$10\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{6}$	$-4\frac{2}{3}$
$\frac{1}{4}x - 4{,}5$	–5,75	–4,875	–4,5	$-\frac{65}{16}$	–3,875

8. Ver tabla 13.

Tabla 13

x	y	$x + y - 3$	$x - y + 2$
10	–3	4	15
$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	–2	$\frac{7}{2}$
–2,7	–0,8	–6,5	$\frac{1}{10}$
–1	6	2	–5

Resolución de ecuaciones

Las respuestas de los ejercicios que aparecen en la página 44 del cuaderno complementario se encuentran en el libro de texto *Matemática* octavo grado en las páginas siguientes: ejercicios 3 y 4, página 183; ejercicio 1, página 184 y ejercicio 1, página 185.

1. Las respuestas son infinitas, solo presentamos tres en cada inciso.

   a) $6x + 1,8 = 0$; $\quad 2x + \frac{5}{2} = 0$; $\quad x + 1\frac{2}{5} = 0$.

   b) $-2x - 1,62 = 0$; $\quad -x - \frac{4}{3} = 0$; $\quad -10x - 0,1 = 0$.

   c) $\frac{2}{3}x + 7 = 0$; $\quad 3\frac{2}{5}x + 1 = 0$; $\quad \frac{10}{7}x = 0$.

2. a) Falsa, porque la solución de la ecuación es $x = \frac{3}{2}$.

   b) Falsa, porque las ecuaciones lineales en una variable admiten una solución, ninguna o infinitas soluciones.
   c) Verdadera.
   d) Falsa, porque tiene solución $x = 250$ y $250 \in \mathbb{N}$.
   e) Falsa, porque $x = -2$.
   f) Verdadera.
   g) Falsa, porque se representa por la expresión $[3\,(55 - x) + 10]$ años.
   h) Verdadera.

3. a) Sea $ax + b = c$ $(a \neq 0)$, $x = -\frac{2}{3}$, asignemos valores a los parámetros a y b, por ejemplo: $a = 1$ y $b = -2$, resulta:

   $1\left(-\frac{2}{3}\right) - 2 = c$; $\quad c = -\frac{8}{3}$.

La ecuación es $x - 2 = -\frac{8}{3}$, como a y b pueden tomar infinitos valores, entonces c puede tomar también infinitos valores. Solo hemos mostrado una posible solución.

b) $ax + b = c$; si $S = \{-4\}$, entonces $x = -4$ y se tiene:

$-4a + b = c$; tomando $a = 2$ y $b = 3$, resulta $c = -4\ (2) + 3 = -5$. Luego se tiene la ecuación $2x + 3 = -5$.

c) $3x - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

d) Resolviendo la ecuación dada, resulta que $x = 2$; una ecuación de la forma $ax + b = c$ ($a \neq 0$), equivalente a la dada, debe tener la misma solución, luego $2a + b = c$.

Tomemos $a = \frac{1}{2}$ y $b = -10$, resulta:

$c = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 10 = 1 - 10 = -9$; la ecuación es $\frac{1}{2}x - 10 = -9$

e) $6x - \frac{11}{3} = \frac{2}{9}$.

f) $2x + 4 = 4 \quad (x \in \mathbb{N}^*)$

g) No existe, porque si es una ecuación lineal de la forma $ax + b = c$, no admite dos soluciones.

4. a) $6x - 7 = 2x + 5$

$6x - 2x = 5 + 7$ (sumando a ambos miembros $-2x + 7$)

$4x = 12$ (reduciendo términos semejantes)

$x = \frac{12}{4}$ (dividiendo ambos miembros por 4)

$x = 3$ (efectuando)

b) $z = 5$.

c) $1{,}5x - 0{,}7 = 4\ (3 - 5x)$.

$1{,}5x - 0{,}7 = 12 - 20x$ (aplicando propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición)

$1{,}5x + 20x = 12 + 0{,}7$ (sumando a ambos miembros $20x + 0{,}7$)

$21{,}5x = 12{,}7$ (reduciendo términos semejantes)

$x = \frac{12{,}7}{21{,}5}$ (dividiendo ambos miembros por 21,5)

$x = \frac{127}{215}$ o $0{,}590\,69\overline{7}$ (efectuando)

d) $y = \dfrac{11}{6}$ o $1,8\overline{3}$

e) $x = -\dfrac{26}{15}$ o $-1,7\overline{3}$

f) $\dfrac{3+5x}{5} = \dfrac{4x}{7}$ mcm $(5;7) = 35$

$\left(\dfrac{3+5x}{5}\right) \cdot 35 = \left(\dfrac{4-x}{7}\right) \cdot 35$	(multiplicando ambos miembros de la ecuación por 35)
$7(3+5x) = 5(4-x)$	(simplificando)
$21 + 35x = 20 - 5x$	(aplicando propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición)
$35x + 5x = 20 - 21$	(sumando a ambos miembros $5x - 21$ y calculando)
$40x = -1$	(reduciendo términos semejantes)
$x = -\dfrac{1}{40}$	(dividiendo ambos miembros por 40)

g) $x = \dfrac{19}{35}$

h) $x = 16{,}25$

i) $(2x+9)(4x-3) = 4(2x^2 - 3)$

$8x^2 - 6x + 36x - 27 = 8x^2 - 12$	(calculando los productos indicados)
$-6x + 36 = 27 - 12$	(sumando a ambos miembros $-8x^2 + 27$)
$30x = 15$	(reduciendo términos semejantes)
$x = \dfrac{15}{30}$	(dividiendo ambos miembros por 30)
$x = \dfrac{1}{2}$	

j) $x = -\dfrac{3}{2}$

k) $x = 1$

l) $(x-a)(x+b) - a(b+c) = x^2 + bx + 2ac \quad (a \neq 0)$

$$x^2+bx+ax+ab-ab-ac=x^2+bx+2ac$$
$$ax=ac+2ac$$
$$ax=3ac$$
$$x=\frac{3ac}{a}$$
$$x=3c$$

m) $0\cdot x=0$; no es posible determinar el valor de x.

n) No tiene solución, ya que la división por cero no es posible.

ñ) $t=-27$

o) Si $a\cdot b=0$, entonces $a=0$ o $b=0$, luego resulta el par de ecuaciones siguientes:

$$\frac{x-7}{5}-\frac{x+2}{5}=0 \quad \text{o} \quad 4x-6+\frac{x+1}{2}=0$$

La primera ecuación no tiene solución y la solución de la segunda ecuación es $x=\frac{11}{9}$.

p) No tiene solución.

5. a) $\frac{x}{3}-6=30$ b) $\frac{x+2}{3}=x-2$ c) $3x-1\,193=2\,(5\,746-x)$

d) $S=\{-1;6\}$ e) $2\,(x-7)=x+1$ f) 23 semanas

g) Como el triángulo es equilátero, el perímetro de la figura dada es $P=3l+2a$, siendo l el largo y a el ancho del rectángulo, $l=\left(\frac{3x}{4}+8\right)\text{cm}$ y $a=x$ cm, luego:

$$P=\left[3\left(\frac{3}{4}x+8\right)+2x\right]\text{cm}=\left(\frac{17}{4}x+24\right)\text{cm}.$$

Nota: Observa que en el cuaderno no aparece la unidad de medida la cual debe colocarse.

6. Al resolver la ecuación, obtenemos $x=-\frac{1}{2}$, si tomamos como conjuntos numéricos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Q}_+$, entonces la ecuación dada carece de solución, ya que $-\frac{1}{2}$ no es un elemento de ninguno de estos conjuntos.

7. Para $b = -6{,}25$.

8. *Nota:* La referencia hecha en el cuaderno complementario es un error. Se trata del ejercicio 15 de la página 96 del libro de texto *Matemática 8,* y cuyas respuestas aparecen en el referido libro página 191.

9. La temperatura es de 200 °C a los 9,8 km de profundidad.

10. a) $°C = 5\left(\dfrac{°F - 32}{9}\right)$

    b) La temperatura en grados Celsius será aproximadamente igual a 4,4 °C.

    c) La temperatura de ebullición es 212 °F; la temperatura de congelación es 32 °F.

11. La temperatura de ebullición del líquido que satisface la ecuación dada es $T = 120$ °C.

12. a) Para $x = \dfrac{4}{3}$ b) Para $x = 3\dfrac{1}{13}$

13. a) Para todo valor de la variable x tal que $x \neq 28$.

    b) Para todo valor de la variable x tal que $x \neq 2$.

14. a) $-\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{3} = 2x - \dfrac{26}{3}$, su solución es $x = 4$.

    $-\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} = 2x - \dfrac{26}{3} - \dfrac{1}{3}$ (restando $\dfrac{1}{3}$ a ambos miembros de la ecuación)

    $-\dfrac{x}{4} = 2x - 9$

    $-\dfrac{9x}{4} = -9$

    $x = \dfrac{-9}{-\dfrac{9}{4}} = -9\left(-\dfrac{4}{9}\right) = 4$

    Se obtuvo igual solución $x = 4$, luego las ecuaciones son equivalentes.

    b) Calculemos primero la solución de la ecuación:

    $\dfrac{4}{5}z - \dfrac{3}{10} = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{4}{5}z = \frac{3}{10} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{5}z = \frac{4}{5}$$

$z = 1$ (solución)

Comprobemos que se obtiene una ecuación equivalente:

$$\frac{5}{12}\left(\frac{4}{5}z - \frac{3}{10}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12}$$

(multiplicando ambos miembros de la ecuación por $\frac{5}{12}$)

$$\frac{1}{3}z - \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$$

$$\frac{1}{3}z = \frac{1}{8} + \frac{5}{24}$$

$$\frac{1}{3}z = \frac{8}{24}; \quad \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}; \quad z = 1$$

Se obtuvo igual solución $z = 1$, luego las ecuaciones son equivalentes.

c) $2x - 1 = 3$; su solución es $x = 2$.

Al multiplicar ambos miembros por $(x - 1)$, se tiene:

$(2x - 1)(x - 1) = 3(x - 1)$
$2x^2 - 2x - x + 1 = 3x - 3$
$2x^2 - 3x + 1 = 3x - 3$
$2x^2 - 3x + 1 - 3x + 3 = 0$
$2x^2 - 6x + 4 = 0$
$x^2 - 3x + 2 = 0$ (dividiendo por 2 ambos miembros de la ecuación)

La ecuación obtenida no es de primer grado o lineal, pues no responde a la forma $ax + b = 0$.

Comprobemos que la ecuación obtenida mediante la transformación descrita se satisface no solo para $x = 2$, sino también para $x = 1$:

$2^2 - 2(3) + 2 = 4 + 6 + 2 = 0$ $(x = 2)$
$1^2 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$ $(x = 1)$

La solución $x = 1$ no satisface a la ecuación original, esta solución se denomina extraña o inadmisible. Debes tener en cuenta que si se multiplican o dividen ambos miembros de una ecuación por una expresión en la que aparezca la variable, la ecuación resultante puede tener soluciones que no satisfagan a la ecuación original. Luego, $2x - 1 = 3$ y $x^2 - 3x + 2 = 0$, no son ecuaciones equivalentes.

15. Al resolver la ecuación (1), se obtiene $x = 2$, que sustituida en la ecuación (2) da lugar a la ecuación $2k + 3 = \frac{4}{3} + \frac{8}{3}$, cuya solución es $k = \frac{1}{2}$.

16. Para que las ecuaciones sean equivalentes se debe cumplir que $a = \frac{3}{8} = 0{,}375$.

17. $2(p - 1)\,x - p\,(x - 1) = 2p + 3 \quad (p \in \mathbb{Q})$

a) $(2p - 2)\,x - px + p = 2p + 3$

$$px - 2x = p + 3$$
$$x(p - 2) = p + 3$$
$$x = \frac{p + 3}{p - 2} \qquad (p \neq 2)$$

No tiene solución posible para $p = 2$.

b) Sea $x = 0$ ($0 \in \mathbb{N}$) entonces:

$\frac{p + 3}{p - 2} = 0$ de donde $p = -3$.

Tomemos $x = 2$ ($2 \in \mathbb{N}$), entonces $\frac{p + 3}{p - 2} = 2$, resulta $p = 7$ y, finalmente, tomemos $x = 4$ ($4 \in \mathbb{N}$), resulta $\frac{p + 3}{p - 2} = 4$, de donde $p = \frac{11}{3}$.

Los valores de p aparecen en la tabla siguiente:

p	-3	7	$\frac{11}{3}$
x	0	2	4

Los valores de p dependerán de los números naturales que se elijan como solución de la ecuación dada.

c) Si el conjunto solución es $S = \left\{\frac{-3}{4}\right\}$, entonces $x = -\frac{3}{4}$ y como $x = \frac{p + 3}{p - 2}$, resulta:

$$-\frac{3}{4} = \frac{p + 3}{p - 2}$$

$$-3p + 6 = 4p + 12$$

$$p = -\frac{6}{7}$$

18. a) Si el perímetro del cuadrado *ABCD* de lado *l* es *x* cm ($x > 0$), entonces $l = \frac{x}{4}$ cm y *BGFE* es un rectángulo. Como *E* y *B* son puntos medios respectivamente de $\overline{BC}$ y $\overline{AG}$, el perímetro de la figura es:

$$P = \overline{AB} + \overline{BG} + \overline{GF} + \overline{EF} + \overline{EC} + \overline{CD} + \overline{DA}$$

$$P = 5\,\overline{AB} + 2\,\overline{GF}$$

$$P = 5\left(\frac{x}{4}\right) + 2\left(\frac{x}{8}\right) = \frac{5x}{4} + \frac{x}{4} = \frac{6x}{4} = \frac{3x}{2}$$

La expresión que permite calcular el perímetro de la figura es $\frac{3x}{2}$.

b) $P = \frac{3x}{2}$; Si $x = 48$ cm, entonces $P = \frac{3 \cdot 48}{2}\text{ cm} = 72\text{ cm}$

$$A = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{x}{4} \cdot \frac{x}{8} = \frac{x^2}{16} + \frac{x^2}{32} = \frac{3x^2}{32}$$

$$A = \frac{3 \cdot (48\text{ cm})^2}{32} = 216\text{ cm}^2$$

19. Las respuestas aparecen en el libro de texto *Matemática* 8vo. grado en la página 187.

Problemas que conducen a ecuaciones lineales con una variable

Nota: Se exigirá que los problemas propuestos sean resueltos mediante la vía aritmética o mediante ecuaciones lineales, aunque no se excluye cualquier otra forma de razonamiento, siempre que el alumno sea capaz de explicar con rigor sus planteamientos.

1. Los números son 67 y 35.
2. Los números son 14 y 15.
3. La persona tenía \$100.00.
4. Ver tabla 14.

Tabla 14

	Edades actuales	**Edades dentro de x años**
Padre	40 años	$40 + x$
Hijo	15 años	$15 + x$

$40 + x = 2\ (15 + x)$
$40 + x = 30 + 2x$
$x = 10$

Respuesta: La edad del padre será el doble de la edad del hijo, dentro de 10 años.

Comprobamos: 40 + 10 = 50 y 15 + 10 = 25.

5. Total de billetes: 52
   Cantidad de billetes de \$ 20,00: x
   Cantidad de billetes de \$ 10,00: $52 - x$
   $20x + 10\ (52 - x) = 700$
   Respuesta: Se pagaría la deuda con 18 billetes de \$ 20,00 y 34 billetes de \$ 10,00.
6. Ancho: x dm
   Largo: $(3x - 9)$ dm
   Perímetro = 460 cm = 46 dm
   $P = 2\ (l + a)$ (perímetro del rectángulo)
   $2\ (4x - 9) = 46$
   $x = 8$
   largo: 15 dm y ancho: 8 dm
   $A = l \cdot a = 15 \text{ dm} \cdot 8 \text{ dm} = 120 \text{ dm}^2$
   Respuesta: El área del rectángulo es de 120 dm^2.
7. José Martí nació en 1853.
8. Amplitud del ángulo mediano: x
   Amplitud del ángulo menor: 75 % de x. Luego será $\frac{3}{4}x$.
   Diferencia: $\left(x - \frac{3}{4}x\right)$
   Mayor: $\left(x - \frac{3}{4}x\right) + 100$
   $$x + \frac{3}{4}x + \left(x - \frac{3}{4}x\right) + 100 = 180$$
   $2x = 180 - 100$
   $x = 40$
   Respuesta: El ángulo mediano mide 40°, el menor, 30° y el mayor, 110°.
9. Presentemos una figura (fig. 21).

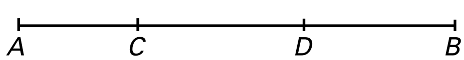


Fig. 21

Representemos los segmentos: $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DB}$

$\overline{AC}$ = 2x dm; $\overline{CD}$ = (x + 1) dm y $\overline{DB}$ = 2(x + 2) dm

$2x + 2(x + 1) + 2(x + 2) = 48$
$2x + 2x + 2 + 2x + 4 = 48$
$6x + 6 = 48$
$6x = 42$
$x = \dfrac{42}{6}$
$x = 7$
$\overline{AC} = 14\text{ dm}$; $\overline{CD} = 16\text{ dm}$ y $\overline{DB} = 18\text{ dm}$

$\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = 14\text{ dm} + 16\text{ dm} = 30\text{ dm}$

$\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AD} = 48\text{ dm} - 30\text{ dm} = 18\text{ dm}$.

10. La cantidad de estudiantes recogiendo papas es 11.

11. Tengo: x pesos.
Costo del estuche: (x + 3) pesos.
Costo rebajado: $\left[(x+3) - \dfrac{x+3}{3}\right]$ pesos

$$x - \left[(x+3) - \frac{x+3}{3}\right] = 16$$

$$x - \frac{2}{3}(x+3) = 16$$

$$3x - 2(x+3) = 48$$

$$3x - 2x - 6 = 48$$

$x = 54$
Costo del estuche: \$ 54 + \$ 3 = \$ 57.
El estuche vale 57 pesos.

12. *x:* número que hay que sumarle a cada factor para que los productos sean iguales.
$P = (72 + x)(43 + x)$; $P' = (124 + x)(27 + x)$
$(72 + x)(43 + x) = (124 + x)(27 + x)$
$3\,096 + 72x + 43x + x^2 = 3\,348 + 124x + 27x + x^2$
$x = -7$
Debe sumarse –7 a cada factor para que los productos sean iguales.

13. $\alpha = \beta$ por ser ángulos opuestos por el vértice.

$$2x^\circ + \frac{2}{3}\left(x^\circ + 10^\circ\right) = \frac{1}{4}x^\circ + \frac{5}{8}\left(3x^\circ - 36^\circ\right) + 40^\circ$$

$$x^\circ = 20^\circ$$

$$\alpha = 2\left(20^\circ\right) + \frac{2}{3}\left(20^\circ + 10^\circ\right) = 60^\circ$$

$\angle 1 + \angle \alpha = 180^\circ$ (por ser ángulos adyacentes)

$$\angle 1 + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\angle 1 = 120^\circ$$

14. Sea x el número.
Se puede plantear la ecuación $x + \frac{1}{6}x + 10 - \frac{1}{2}x = 2\left(\frac{100}{3}x + x + 5\right)$.

Al resolverla se obtiene que $x = 0$.
El número es 0.

15. a) Cuba conquistó en estas competencias, 14 medallas de oro, 4 de plata y 19 de bronce.
b) *Nota:* Dice medallas ganadas respecto al año 2001. Debe decir medallas ganadas en 2001 respecto a 1997.
Aumentó en un 23,3 %.

16. Fueron destinadas al consumo de hospitales 100 000 t de papa.

17. Tiene mayor profundidad el océano Pacífico.

18. Total de defunciones en el año 2001: 79 395.
Cantidad de mujeres fallecidas en el año 2001: x.
Cantidad de hombres fallecidos en el año 2001: 79 395 – x.

$$\frac{1}{4}\left(79\,395 - x\right) - 1\,197 = \frac{5}{19}x$$

$39x = 1\,417\,533$
$x = 36\,347$

Cantidad de mujeres fallecidas en el año 2001: 36 347.
Cantidad de hombres fallecidos en el año 2001: 43 048.
En el año 2000, murieron 38 288 mujeres y 44 039 hombres.

19. Tiempo máximo para resolver el problema: x min.
Tiempo utilizado para la lectura: $\frac{1}{15}x$ min.

Tiempo utilizado para hacer el planteo: 2 min.

Resto: $\left[x-\left(\frac{1}{15}x+2\right)\right]$ min

Tiempo utilizado para las restantes operaciones:

75 % de $\left[x-\left(\frac{1}{15}x+2\right)\right]=\frac{3}{4}\left[x-\left(\frac{1}{15}x+2\right)\right]$

Tiempo utilizado para la comprobación: $\frac{1}{15}x+2$

$$\frac{1}{15}x+2+\frac{3}{4}\left[x-\left(\frac{1}{15}x+2\right)\right]+\frac{1}{15}x+2=x$$

$x = 15$

Tiempo disponible para hacer la comprobación 3 min.

20. Capacidad del depósito *A:* x.
Capacidad del depósito *B:* $x + 60$.
Volumen de agua en el depósito *A:* $\frac{2}{3}x$.

Volumen de agua en el depósito *B*: $\frac{7}{12}(x+60)$.

$\frac{2}{3}x+\frac{7}{12}(x+60)=860$; de donde $x = 660$.

El depósito *A* contiene 440 L de agua y el *B* contiene 420 L.
Al depósito *A* le faltan 220 L para llenarse.

21. Año: 18du (siglo XIX) unidades: x, decenas: $x + 1$ o unidades: $x + 1$, decenas: x.
$1 + 8 + x + 1 + x = 24$; $x = 7$. El año puede ser 1887 o 1878. Este hecho aconteció el 15 de marzo de 1878 y se trata de la Protesta de Baraguá.

22. Se emplearon al cultivo de caña $16\frac{2}{3}$ cab y al cultivo de viandas, 6 cab.

23. Se sacaron en la segunda extracción 4 litros de refresco.

24. Sea x el número de hijos de Armando. Él tuvo que comprar $(x + 1)$ entradas, se incluye la de él, a $ 1,50, luego le costaron $ 1,50 $(x + 1)$. La cantidad de dinero disponible era lo exacto para adquirir $(x + 1) - 3 = x - 2$ entradas de $ 3,00, o sea, $ 3,00 $(x - 2)$, luego:

$(x + 1)\ 1{,}50 + 3 = 3{,}00\ (x - 2)$
$x = 7$

Armando tiene 7 hijos.

25. Los números en que se puede descomponer son 300 y 140.

26. Cantidad total de tubos: x.

Venta 1: $\frac{3}{5}x$.

Resto: $\frac{2}{5}x$.

Pedido: $\frac{7}{8}\frac{2}{5}x = \frac{7}{20}x$.

Resto real: $\frac{2}{5}x - 240$.

Pedido real entregado: $\frac{4}{5}\frac{7}{20}x = \frac{7}{25}x$.

$$\frac{2}{5}x - 240 = \frac{7}{25}x$$

$$x = 2\,000.$$

Se vendieron 1 760 tubos.

27. Cantidad de bancos: x.
Cantidad de alumnos: $8x + 4$ y $9x + 2$

$$9x + 2 = 8x + 4$$

$$x = 2$$

Son 20 alumnos y 2 bancos.

28. Sea x la cantidad de solución que debe agregarse de anticongelante puro:

Mezcla original	Anticongelante puro	Nueva mezcla, al 40 %
↓	↓	↓
12 L de solución al 30 % = 0,30 (12) = 3,6 L de anticongelante puro	x L	$(12 + x)$ L de solución 40 % de $(12 + x)$ $[0,40\,(12 + x)]$ L

Resulta la ecuación: $3,6 + x = 0,40\,(12 + x)$, de donde $x = 2$.
Se necesita agregar 2 L de anticongelante puro.

29. Cantidad de plátano fruta: x.

Cantidad de plátano burro: $160 - x$.

$$x + \frac{250 - 3x}{2} = 2x + 25$$

$$x = 64$$

La empresa compró 16 qq de plátano fruta y 48 qq de plátano burro.

30. a) El que quedó en primer lugar recogió 9 cajas, el que quedó en segundo lugar, 8 cajas y el que quedó en tercero, 7 cajas.
    b) El ganador recogió el 37,5 % del total.

31. Cantidad de reses en el primer potrero: $2x$.
    Cantidad de reses en el segundo potrero: x.
    Cantidad de reses en el tercer potrero: $250 - 3x$.

$$x + \frac{250 - 3x}{2} = 2x + 25$$

$$x = 40.$$

En el tercer potrero hay 130 reses.

32. El saco más pesado contiene 116 kg de arroz y el menos pesado, 58 kg.

33. Cantidad de cajas recolectadas por la primera brigada: x.
    Cantidad de cajas recolectadas por la segunda brigada: $555 - x$.
    La primera brigada recolectó 45 cajas menos que la segunda, luego:

    $x + 45 = 555 - x$ de donde $x = 255$, por tanto, la primera brigada recogió 255 cajas y la segunda $555 - 255 = 300$ cajas. La primera brigada tiene $\frac{255}{15} = 17$ alumnos y la segunda brigada $\frac{300}{20} = 15$ alumnos.

34. Cantidad de gotas a preparar: 15 mL. Las gotas tienen 2 % de ingrediente activo, o sea, $0{,}02 \cdot 15$ mL $= 0{,}30$ mL. La solución 1) tiene el 10 % de ingrediente activo, o sea, 0,10 de la solución y la 2) contiene el 1 %. Tomemos de la solución 1) x mL, esto contiene $0{,}1x$ mL de ingrediente activo, de la 2) habrá que tomar $15 - x$ mL, ya que hay que preparar 15 mL de gotas, en la cantidad de solución tomada de la solución 2), hay $0{,}01\ (15 - x)$ mL de ingrediente activo. Resulta la ecuación lineal:

    $0{,}10x + 0{,}01\ (15 - x) = 0{,}30.$
    $0{,}10x + 0{,}15 - 0{,}01x = 0{,}30.$

    Multipliquemos por 100 ambos miembros de la ecuación anterior, se obtiene:

$$10x + 15 - x = 30$$

$$9x = 15$$

$$x = \frac{15}{9}$$

$$x = \frac{5}{3}$$

De la solución 1) se toma $\frac{5}{3}$ mL ≈ 1,7 mL y de la solución 2) $15 - \frac{5}{3}$ mL ≈ ≈ 13,3 mL.

Comprobación:

Al tomar $\frac{5}{3}$ mL de solución, se obtiene el 10 % de $\frac{5}{3}$ mL de ingrediente activo, o sea, $\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{10}\text{ mL} = \frac{1}{6}\text{ mL}$ y al tomar $\frac{40}{3}$ mL de la solución 2, se obtiene $\frac{40}{3} \cdot \frac{1}{100}\text{ mL} = \frac{2}{15}\text{ mL}$ de ingrediente activo.

Cantidad total extraída: $\left(\frac{5}{3} + \frac{40}{3}\right)\text{mL} = 15\text{ mL}$.

Cantidad total de ingrediente activo: $\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{15}\right)\text{mL} = \frac{3}{10}\text{ mL} = 0{,}30\text{ mL}$

De la solución de concentración del 10 % debe extraerse $\frac{5}{3}$ mL ≈ 1,7 mL y de la solución de concentración del 1 %; $\frac{40}{3}\text{ mL} \approx 13{,}3\text{ mL}$.

35. *Nota:* Falta en el texto la palabra igual, debe decir: ... representa el 30 % del total, después se añade otra cantidad igual de agua y entonces el alcohol representa $\frac{1}{5}$ del total.

La masa de alcohol en la solución es constante, lo que varía es la cantidad de agua, representamos por el parámetro *a* la masa de alcohol presente y sea *x* la cantidad de agua añadida cada vez:

1) $\frac{a}{10 + x} = \frac{3}{10}$ (concentración de alcohol la primera vez)

2) $\frac{a}{10 + 2x} = \frac{1}{5}$ (concentración de alcohol la segunda vez)

De 1 se obtiene $a = \frac{3\left(10 + x\right)}{10}$ (3)

De 2: $a = \frac{10 + 2x}{5}$ (4)

$\frac{3(10 + x)}{10} = \frac{10 + 2x}{5}$ (igualando 3 y 4)

De donde $x = 10$. Entonces se añadió en total 20 kg de agua.

36. a) Incapacitados: 1 833. Fallecidos: 2 354.
 b) Las personas incapacitadas representan el 43,8 %.

37. Cantidad de pimientos por cada planta: x.
 Cantidad de tomates por cada planta: $x + 15$.
 Cantidad total de pimientos: $600x$.
 Cantidad total de tomates: $600(x + 15)$.

$$600x + 600(x + 15) = 39\,000$$
$$x = 25$$

Cada planta de pimiento produce 25 y cada planta de tomate, 40.
mcd (40; 25) = 5
a) Se envasaron 5 bolsas.
b) $\dfrac{40 + 25}{5} = 13$

Se envasaron en cada bolsa 13 u en total, 8 tomates y 5 pimientos.

38. La matrícula del grupo es de 50 alumnos.

39. Sea el número N de tres cifras, que representamos así: $N = cdu$, siendo u la cifra de las unidades, d la de las decenas y c la de las centenas. Expresemos las cifras de N en términos de una sola variable. Para eso expresemos con variables las condiciones dadas en el problema:

(1) $d = \dfrac{c}{2}$

(2) $u = (c + d) - 1$

De 1 obtenemos: $c = 2\,d$ (3)

Sustituyendo (3) en (2), resulta:

$u = (2d + d) - 1$
$u = 3d - 1$ (4)

Las cifras de las unidades del número es $(3d - 1)$, la de las decenas (d) y la de las centenas es $2d$, luego:

$N = 100 \cdot 2d + 10d + 3d - 1 = 213d - 1$

Al dividir a N por la suma de sus cifras, o sea, $(3d - 1) + d + 2d = 6d - 1$, el cociente es 38 y el resto 7.

$$\begin{array}{r|l} 213d - 1 & 6d - 1 \\ \hline 7 & 38 \end{array}$$

De donde se obtiene la ecuación: $213d - 1 = 38\,(6d - 1) + 7$ (el dividendo es igual al producto del cociente más el resto) cuya solución es $d = 2$, luego el número N es 425.

40. Fueron encuestados 188 mujeres y 132 hombres.

42. a)
- La longitud del largo de un rectángulo es el triplo de la longitud de su ancho aumentado en 5,0 cm. Si el perímetro del rectángulo mide 58 cm, calcula sus dimensiones.
- Se tiene un trapecio cuya altura mide 5,0 dm. La longitud de la base mayor excede en 8,0 dm al duplo de la longitud de la base menor. Si el área del trapecio es igual a 65 dm^2, ¿cuántos dm es más larga la base mayor que la menor?
- Un número más sus $\frac{2}{3}$ disminuido en el 80 % es igual al triplo del número disminuido en 32. ¿Cuál es el número?
- En un número natural de dos cifras, las cifras de las decenas es el cuádruplo de las cifras de las unidades. Si invertimos el orden de sus cifras se obtiene otro número que es excedido en 54 por el primer número. ¿Cuál es este número?
- En una jornada de trabajo agrícola una brigada estudiantil recoge en 2 horas la tercera parte de las cajas de tomate planificadas. Después de un receso, recolectan el 20 % de las cajas restantes, si a la hora quedan en el campo 210 cajas, ¿a cuánto ascienden las cajas que deben ser recogidas ese día?

b) 1) Sus dimensiones son: l = 23 cm, a = 6,0 cm.
2) La base mayor es 14 dm más larga que la menor.
3) El número es 15.
4) El número es 82.
5) Las cajas que deben ser recogidas ascienden a 525.

43. Sea x la cantidad usada de solución al 45 %.

$$\overbrace{\text{Solución al 45 \%} + \text{Solución al 80 \%}}^{\text{Antes de mezclar}} \qquad \overbrace{\text{Solución al 60 \%}}^{\text{Después de mezclar}}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x\text{ L} & 15\text{ L} & (x+15)\text{L} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0{,}45x + 0{,}80\,(15) &= 0{,}60(x + 15) \\ 0{,}45x + 12{,}0 &= 0{,}60 + 9{,}00 \\ 0{,}45x - 0{,}60x &= 9{,}00 - 12{,}0 \\ -0{,}15x &= -3{,}00 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Deben mezclarse 20 L de solución alcohólica.

44. La solución requiere de dos variables. Sean x el número de ponencias premiadas ($x < 250$), y el número de menciones, el número de

trabajos destacados es $88 - y$ ($y < 88$), y finalmente el número de trabajos relevantes es ($x - 88$), luego resulta la ecuación:

$x - 88 = \frac{5}{12}y - \frac{88 - y}{5}$, la cual se reduce a la ecuación: $60x - 37y = 4\,224$,

de donde $y = \frac{60x - 4\,224}{37}$, de las que nos interesan las soluciones

enteras positivas, las que podríamos obtener por tanteo, $x = 100$ y $y = 48$, las respuestas serían:

a) 28 trabajos. b) 40 %.

Nota: El profesor debe proponer este problema cuando trate los sistemas de ecuaciones, pues aquí la ubicación del problema no es la adecuada.

45. El gasto de energía del apartamento *A* es 180 kWh y del apartamento *B,* 246 kWh.

46. *Nota:* En la pregunta del problema debe decir: ¿Cuántos quintales de tomate debe recolectar cada escuela este curso?
La primera escuela recogió 529 qq y la segunda 286 qq.

47. Longitud de la base mayor: $B = x$.
Longitud de la base menor: $b = 1{,}5$ m.
Longitud de la altura: $h = 80$ cm $= 0{,}80$ m.
Área de la sección transversal: $A = 2$ m^2.

$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

$$2 = \frac{(x + 1{,}5)\,0{,}80}{2}$$

$x = 3{,}5$

La base mayor debe tener una longitud de 3,5 m.

48. Hagamos un gráfico de la situación planteada (fig. 22):

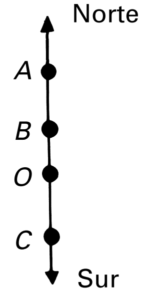


Fig. 22

Debes recordar que en el MRU, la velocidad es (v), el cociente de la distancia (d) y el tiempo (t): $v = \dfrac{d}{t}$ de donde $d = v \cdot t$.

El hombre que sale de O a la 1:00 p.m. tiene una velocidad de 4 km/h. A la 1:15 p.m., o sea, 15 minutos = $\dfrac{1}{4}$h, después sale de O otro hombre a una velocidad de 6 km/h, en este tiempo el primer hombre recorre una distancia $d = 4\text{ km/h} \cdot \dfrac{1}{4}\text{h} = 1\text{ km}.$ En este instante, a la 1:15 p.m., sale del mismo punto O el segundo hombre, sean A y C las posiciones alcanzadas por los dos hombres en el instante en que no existe comunicación entre ellos, o sea, $\overline{AC} = 2\text{ km}$. La distancia $\overline{BA}$ recorrida por el primer hombre es igual a $4t$ y la distancia $\overline{OC}$ recorrida por el segundo hombre es $6t$, siendo t el tiempo (en hora) que transcurre al alcanzar los hombres las posiciones A y C, partiendo de los puntos B y O respectivamente. Luego:

$\overline{CO} + \overline{OB} + \overline{BA} = \overline{CA}$, o sea,

$6t + 1 + 4t = 2$; de donde $t = \dfrac{1}{10}\text{ h} = 6\text{ min}$.

Dejarán de comunicarse después de la 1:21 min.

49. $P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA}$ (perímetro del pentágono $ABCDE$).

Altura del rectángulo: $h = x$

Base del rectángulo: $b = 3x + \dfrac{2}{5}x$

$b = \overline{AB} = \overline{CD} = \overline{DE} = 3x + \dfrac{2}{5}x$ $(\Delta CDE$ equilátero$)$

$h = \overline{EA} = \overline{BC}$ (lados opuestos de un rectángulo)

$P = 3b + 2h$

$$97{,}6 = 3\left(3x + \frac{2}{5}x\right) + 2x$$

De donde $x = 8{,}0$

Entonces $h = 8{,}0$ cm y $b = 3\,(8{,}0\text{ cm}) + \dfrac{2}{5}(8\text{ cm}) = 27{,}2$ cm

$P_{ABCE} = 2(b + h) = 2(27{,}2\text{ cm} + 8{,}0\text{ cm}) = 70{,}4$ cm

$A_{ABCE} = bh = 27{,}2\text{ cm} \cdot 8{,}0\text{ cm} = 217{,}6\text{ cm}^2 \approx 218\text{ cm}^2$

2.2 Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales

1. a) $2x - y = 3$, $0{,}2\ I_1 + 1{,}28\ I_2 = 6{,}50$
   b) (5; 1)
   c) (2; –3)
   d) $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$
   e) Las respuestas aparecen en el libro de texto de octavo grado página 198.
   f) $k = 1$
   g) $a = 1$, $b = 2$
   h) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$
   i) $\begin{cases} 3x - y = 8 \\ x + y = 0 \end{cases}$
   j) $\begin{cases} 3x - \frac{1}{2}y = 8 \\ y - x = -6 \end{cases}$
   k) $\begin{cases} 3(x - 2) + 2(y - 3) = 0 \\ 6x + 6y = 30 \end{cases}$

   Nota: Las respuestas de los incisos a, h, i y j, no son únicas.

2. a) Falsa, porque tiene infinitas soluciones.
   b) Verdadera.
   c) Falsa, porque no satisface a la segunda ecuación.
   d) Falsa, porque el par (–2; 4) es solución del sistema.
   e) Verdadera.
   f) Falsa, porque si el sistema tiene solución, esta es única.

3. a) (80; 236) b) (2; –3) c) 3 d) $\frac{1}{2}$
   e) $\begin{cases} x - 2 = 3y \\ 2(x + y) = 36 \end{cases}$ $(x > 0;\ y > 0;\ x > y)$

4. Las respuestas de los ejercicios 1, 2 y 3 de las páginas 143 a 145 se encuentran en las páginas 198 y 199 del libro de texto *Matemática* octavo grado.

   a) (4; –3) b) $\left(5; -\frac{1}{2}\right)$ c) (0,5; 0,2) d) (1; 1)

e) (1,3; 1,7) f) (3; 8) g) $(a - 3;\ a + 2)$

h) *Nota:* La segunda ecuación del sistema debe ser $6(x - 2) - 7(y + 1) = 0$.
(8,3; 6,4)

i) (–3; 5) j) (2,4; 3; 8) k) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$

5. a) $a = \frac{9}{4}$; $b = -\frac{1}{2}$ b) $y = 25$

6. $\begin{cases} x + y = \frac{3}{4}x \\ x - 1{,}5 = 2y \end{cases} \sim \begin{cases} \frac{x}{4} + y = 0 \\ x - 2y = 1{,}5 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 4y = 0 \\ x - 2y = 1{,}5 \end{cases}$

$x = 1$ y $y = -0{,}25$.

Como los sistemas dados son equivalentes, tienen la misma solución, se sustituye en el otro sistema $x = 1$ y $y = -0{,}25$, resultando el sistema:

$$\begin{cases} 2m\left(4 - 1\right) = 4n + \frac{2}{3} \\ m\left(1\right) - \frac{1}{2} = 2n\left(-0{,}25\right) \end{cases} \sim \begin{matrix} 6m - 4n = \frac{2}{3} \\ m + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

De donde $m = \frac{1}{3}$ y $n = \frac{1}{3}$.

7. $x - 4 = y$ (1).

Sustituyendo (1) en el sistema

$\begin{cases} 7x - m = 4(x - 4) \\ 3x + 2(x - 4) = m \end{cases} \sim \begin{cases} 3x - m = -16 \\ 5x + 2(x - 4) = m \end{cases}$

De donde el valor de $m = 52$, siendo $x = 12$ y $y = 8$.

Problemas que conducen a un sistema de dos ecuaciones con dos variables

1. Los números son 5 y 2.
2. Los números son 173 y 42.
3. La brigada *A* aportó 1 256,25 @ de azúcar y la brigada *B*, 1 243, 75 @.
4. $N_1 = \overline{du} = 10d + u$ (número de dos cifras)

$N_2 = \overline{ud} = 10u + d$ (número que resulta al intercambiar las cifras de N_1)

$$\begin{cases} u + d = 9 \\ 10u + d - 45 = 10d + u \\ u = 7;\ d = 2. \qquad \text{El número es 27.} \end{cases}$$

5. Ver tabla 15.

Tabla 15

Capacidad	Primera acción	Segunda acción
Recipiente $A = x$ L Recipiente $B = y$ L	$(x + 2)$ L $(y - 2)$ L	$(x - 3)$ L $(y + 3)$ L

Resulta el sistema: $\begin{cases} x + 2 - 6 = y - 2 \\ y + 3 - 4 = x - 3 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y = 2 \\ x - y = 2, \end{cases}$

el que se reduce a la ecuación $x - y = 2$, la cual tiene infinitas soluciones; luego no es posible calcular cuántos litros de leche tiene cada recipiente, pues el problema es indeterminado, o sea, tiene infinitas soluciones.

6. Ver tabla 16.

Tabla 16

Cereal	Cantidad	Proteínas	Carbohidratos
Avena	x onzas	4 g/onza	18 g/onza
Maíz	y onzas	3 g/onza	24 g/onza
Necesidades nutritivas	—	200 g/ración	1 320 g/ración
Totales	—	$4x + 3y$	$18x + 24y$

Resulta el sistema:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 200 \\ 18x + 24y = 1\,320 \end{cases}$$

de donde $x = 20$ y $y = 40$.
Se necesitan aproximadamente 0,7 onzas de avena y 1,43 onzas de maíz.

7. Ver tabla 17.

Tabla 17

Edad t (años)	Peso W (libras)
0	7
3	21

$W = at + b \qquad (1)$

Sustituyendo en (1) los pares de valores de la tabla anterior, resulta el sistema:

$$\begin{cases} b = 7 \\ 3a + b = 21 \end{cases}$$

cuya solución es $a = 4\frac{2}{3}$ y $b = 7$.

b) $W = 4\frac{2}{3}t + 7$

$$W(6) = 4\frac{2}{3} \cdot 6 + 7 = \frac{14}{3} \cdot 6 + 7 = 35 \text{ lb}$$

c) $W = 4\frac{2}{7}t + 7$; $50 = \frac{14}{3}t + 7$;

$t \approx 9{,}2$ años, o sea, 9 años, 2 meses y 12 días.

8. a) $\begin{cases} a + 200b = 49 \\ a + 500b = 85 \end{cases}$ b) $a = 25$; $b = 0{,}12$

c) $C = 25 + 0{,}12\ n$; $C = 25 + 0{,}12 \cdot 100$

El costo que origina el uso de 100 unidades de tiempo es $ 37,00.

9. Cantidad de votos a favor: *x*.
Cantidad de votos en contra: *y*.

$$\begin{cases} x - \frac{1}{4}y = y \\ x - 12 - (y + 12) = 2 \end{cases}$$

$y = 104$; $x = 130$.

En la asamblea hubo 130 votos a favor y 104 en contra.

10. Cantidad de atletas hembras: *x*.
Cantidad de atletas varones: *y*.

$$\begin{cases} x - y = 400 \\ \frac{3}{10}x + 100 = \frac{3}{4}y \end{cases}$$

$x = 840$; $y = 440$.

Quedaron en el centro 352 hembras y 252 varones.

11. Había a principios 72 piezas del tipo *A* y 48 piezas del tipo *B*.

12. *Nota:* Este problema es el mismo que el número 32 de la página 64, solo se pretende resolverlo aplicando sistema de ecuaciones.
Cantidad de kilogramos contenidos en el saco más pesado: *x.*
Cantidad de kilogramos contenidos en el saco menos pesado: *y.*

$$\begin{cases} x + y = 174 \\ \dfrac{3}{4}x = y + \dfrac{1}{4}x \end{cases}$$

$x = 116;\ y = 58$

El saco más pesado contiene 116 kg y el menos pesado 58 kg.

13. El número es 94.

14. *Nota:* En la tercera línea dice: ... y ganando en la mesa el 25 % de lo que pagó. Debe decir: ...y ganando en la mesa el 250 % de lo que pagó.
Cantidad de dinero que invirtió en el reloj: *x.*
Cantidad de dinero que invirtió en la mesa: *y.*

$$\begin{cases} x + y = 210 \\ \dfrac{4}{5}x + \dfrac{7}{2}y = 330 \end{cases}$$

$x = 150;\ y = 60$

Vendió el reloj en 120 pesos y la mesa en 210 pesos.

15. *Nota:* En la primera línea dice: Durante el primer semestre..., debe decir: durante el trimestre...
Asistieron en marzo 373 personas más que en febrero.

16. Cantidad de preguntas que contestó Amanda: *x.*
Cantidad de preguntas que contestó Alejandro: *y.*

$$\begin{cases} 2x - 8 = x + y \\ \dfrac{1}{3}x = \dfrac{1}{2}y \end{cases}$$

$x = 24;\ y = 16$

La colección tenía 40 preguntas.

17. Están sembradas 225 ha de malanga y 231 ha de boniato.

18. El precio original del primer artículo es de $ 50,00 y del segundo artículo, $ 1 700,00.

19. Del frasco *A* debe tomar 50 g y del frasco *B*, 30 g.

20. Son 4 hembras y 3 varones.

21. Cantidad de tornillos defectuosos de la máquina *A: x.*
    Cantidad de tornillos defectuosos de la máquina *B: y.*

$$\begin{cases} x + y = 315 \\ \dfrac{3}{4}x - 45 = \dfrac{2}{3}y \end{cases}$$

$x = 180;\ y = 135$

La máquina *A* produjo 180 tornillos y la *B* 135 tornillos.

22. La libra de malanga cuesta \$ 2,50 y la de arroz, \$ 4,00.

23. *Nota:* Dice: …están en la razón de 2 : 3, debe decir: están en la razón de 3 : 2.
    El ángulo *B* mide 90° y el ángulo *C* mide 60°.

24. Longitud del lado *a: x.*
    Longitud del lado *b: y.*

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{11}{7} \\ (x + 3)\ (y + 3) = xy + 117 \end{cases}$$

$x = 22;\ y = 14$

El perímetro del rectángulo es 72 cm.

25. Por una pieza pagó \$1 500,00 y por la otra \$ 600,00.

26. *Nota:* Este problema no debe proponerse en el grado, pues conduce a un sistema de ecuaciones no lineales, por tanto, no es posible resolverlo en este grado.
    La ley de Ohm establece la siguiente relación entre el voltaje (V), la resistencia (R) y la intensidad (I) de una corriente eléctrica:

$V = I \cdot R.$

La modelación del presente problema conduce al sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} I \cdot R = 15 \\ (I + 2)\ (R - 1) = 20 \end{cases}$$

27. $\angle A = 45^\circ$ y $\angle DBC = 120^\circ$

28. *Nota:* En la penúltima línea dice: …para utilizar exactamente 560 kg de nitrógeno. Debe decir: …para utilizar exactamente 360 kg de nitrógeno…
    La empresa debe usar 30 sacos de fertilizante *A* y 80 sacos de fertilizante *B.*

29. El albañil *A* coloca 9 ladrillos por minuto y el *B,* 7 ladrillos por minuto.

30. *Nota:* Este problema nos conduce a un sistema de ecuaciones lineales con tres variables que se estudiarán en décimo grado, no obstante puede proponerse su resolución para alumnos con posibilidades en la asignatura.

31. Se necesitan para cumplir los requisitos de la dieta 0,4 kg del producto *P* y 0,2 kg del producto *Q.*

32. Del envase del tipo *A* se vendieron 40 y del *B,* 35.

33. Los números son 69 y 34.

34. Velocidad del bote en aguas tranquilas: x km/min.

    Velocidad de la corriente: y km/min.

    Estas velocidades son con respecto a la orilla. La velocidad del bote cuando navega a favor de la corriente es la suma de la velocidad en el agua tranquila y la velocidad de la corriente. La velocidad del bote contra la corriente es igual a la diferencia entre la velocidad del bote en aguas tranquilas y de la velocidad de la corriente (tabla 18).

Tabla 18

	Velocidad (en km/min)	**Distancia (en km)**	**Tiempo (en min)**
A favor de la corriente	$(x + y)$	4	12
En contra de la corriente	$(x - y)$	4	15

Es necesario aplicar la ecuación del movimiento uniforme, que el alumno conoce de la Física $v = \frac{d}{t}$ (*v:* velocidad, *d:* distancia y *t:* tiempo), de donde:

$d = v \cdot t$, entonces resulta el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} 12\,(x + y) = 4 \\ 15\,(x - y) = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = \dfrac{1}{3} \\ x - y = \dfrac{4}{15} \end{cases} \quad \text{de donde}$$

$$x = \frac{3}{10} \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{30}$$

La velocidad de la corriente es de $\frac{1}{30}$ km/min que equivale a 2 km/h.
La velocidad del bote en aguas tranquilas es de $\frac{3}{10}$ km/min que equivale a 18 km/h.

35. Los ángulos interiores del triángulo miden 50°, 50° y 80°.

36. Pago por el alquiler del local más caro: \$ x mensuales.
Pago por el alquiler del local menos caro: \$ y mensuales.

$$\begin{cases} 9x + 12y = 306\,000 \\ x = 6\,000 + y \end{cases}$$

de donde $x = 18\,000$ y $y = 12\,000$.
El alquiler mensual del local más caro es de \$ 18 000,00 y del más barato \$ 12 000,00.

37. El litro de vino blanco vale \$ 24,00 y el de vino tinto, \$ 20,00.

38. *Nota:* En la última línea dice: ...es igual a 15,8 m². Debe decir: ...es igual a 15,6 m².

a) Perímetro del triángulo *AEB:* 18 m.
b) Área del rectángulo *DCEB:* 48 m².
c) Área del pentágono *ABDCE:* 63,6 m².

39. *x:* huella, *y:* contra huella.

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{3} \\ 6x + 6y = 300 \end{cases} \sim \begin{cases} y = \dfrac{2x}{3} & (1) \\ x + y = 50 & (2) \end{cases}$$

Sustituyendo (1) en (2)

$$x + \frac{2x}{3} = 50; \quad \frac{5x}{3} = 50; \quad x = 30$$

$$A = 3\,x\,y + 2\,x\,y + x\,y = 6\,x\,y$$

$$y = \frac{2}{3} \cdot 30 = 20$$

$A = 3xy + 2xy + xy = 6xy$

$A = 6 \cdot 30 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} = 3\,600 \text{ cm}^2 = 36 \text{ dm}^2.$

El área de la figura es 36,0 dm².

40. Se forman un círculo con 18 alumnos y una estrella con 22 alumnos.

41. *x:* precio fijo por las dos primeras horas.
y: pago adicional por cada hora adicional.

Resulta el sistema lineal siguiente:

$$\begin{cases} 2x + y = 500 \\ 2x + 3y = 700 \end{cases}$$

De donde $x = 2$ y $y = 1$.

8 horas = 2 horas + 6 horas

\$ 4,00 + \$ 6,00 = \$ 10,00.

Tendrá que pagar \$ 10,00.

42. Se necesitan de un recipiente 62,5 L de leche y del otro 37,5 L.

43. a) Contiene el 40 % de proteínas y el 25 % de glúcidos.
    b) Hay 1 kg de proteínas.

44. *x:* velocidad del avión en km/h.
    y: velocidad del viento en km/h.

    Ver tabla 19.

Tabla 19

	Distancia	**Tiempo**	**Velocidad**
Viento a favor	750 km	3 h	$(x + y)$ km/h
Viento en contra	750 km	3 h, 45 min = 3,75 h	$(x - y)$ km/h

$$\begin{cases} 3(x + y) = 750 \\ 3{,}75(x - y) = 750 \end{cases}$$

La velocidad del avión es de 225 km/h y la del viento 25 km/h.

45. a) $m = 13$; $c = 17$
    b) $W = 113$
    c) $E \approx 8{,}61$

46. L_1: Longitud de la circunferencia mayor de radio r_1.
    L_2: Longitud de la circunferencia menor de radio r_2.

    $L_1 = 2\ L_2$ (1)

    $L_1 = 2\pi r_1$ y $L_2 = 2\pi r_2$

    Sustituyendo en (1) $2\pi r_1 = 4\pi r_2$, de donde $r_1 = 2r_2$, por otra parte $r_1 + r_2 = 15$, resulta el sistema lineal:

$$\begin{cases} r_1 = 2r_2 \\ r_1 + r_2 = 15 \end{cases}$$

donde $r_1 = 10$ y $r_2 = 5$.

El radio de la circunferencia mayor es 10 cm y el de la menor, 5 cm.

47. *Nota:* En la penúltima línea dice: observa la columna de la siguiente tabla… Debe decir: completa la columna en blanco de la siguiente tabla…
En 2004 votaron a favor 179 países, en contra, 4 y hubo 1 abstención.

48. $a = \frac{73}{30} \approx 2{,}43$; $b = \frac{1}{75} \approx 0{,}013$; $T = 192{,}5$ °C.

3
CAPÍTULO

Igualdad y proporciones en las figuras

3.1 Igualdad de figuras geométricas

1. 1.1 a) 16 b) 9 c) 4
   1.2 a) 6 b) 4 c) 2
   1.3 a) En la figura se observan <u>4</u> conjuntos formados por rectángulos iguales y <u>3</u> conjuntos formados por cuadrados iguales.
   b) Ver tabla 20.

Tabla 20

Rectángulos de dimensiones	Cuadrados de lados
1 cm y 2 cm	1 cm
1 cm y 3 cm	2 cm
1 cm y 5 cm	3 cm
2 cm y 3 cm	

2. Existen 6 triángulos iguales entre sí, así como 2 más iguales entre sí.

3. a) Aparecen 8 triángulos.
   b) Existen tres parejas de triángulos iguales:
   $\Delta AED = \Delta DEC$; $\Delta ABE = \Delta BCE$; $\Delta ABD = \Delta BCD$

Ejercicios página 98

1. a) Traslación.
   b) Simetría central.
   c) Traslación y reflexión o viceversa.
   d) Reflexión.

2. Mediante la simetría central y la reflexión.

3. a) Reflexión.
   b) Reflexión.
   c) Simetría central con centro en el centro de la circunferencia.
   d) Rotación de centro en el centro de la circunferencia y ángulo de rotación igual a 90°.
   e) Por la composición de una simetría central con centro en el centro de la circunferencia y una reflexión o viceversa.
   f) Reflexión o mediante la composición de una simetría central con centro en el centro de la circunferencia que transforma el sector circular 2 en el 5 y de la reflexión que transforma a este último en el sector circular 4.

4. Mediante la reflexión cuyo eje contiene al segmento $\overline{CD}$. Como el triángulo *ABC* es isósceles de base $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es la altura relativa a la base, entonces se cumple que *D* es el punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es la bisectriz del ángulo *ACB.*

5. a) El triángulo *ADE* se transforma en el triángulo *DEF* por reflexión de eje *DE.*
   b) El triángulo *DEF* se transforma en el triángulo *CEF* por reflexión de eje *EF.*
   c) El triángulo *ADE* se transforma en el triángulo *BCE* por reflexión de eje *EF.*
   d) El triángulo *ADE* se transforma en el triángulo *CEF* por la composición de las reflexiones de ejes *DE* y *EF* respectivamente o mediante la composición de las reflexiones de ejes *EF* y *CE* respectivamente.
   e) El triángulo *DEF* se transforma en el triángulo *BCE* por la composición de las reflexiones de ejes *EF* y *CE* respectivamente o mediante la composición de las reflexiones de ejes *DE* y *EF* respectivamente.

6. $\triangle$*BOC.*

7. El vértice *A* se superpone con el vértice *C.*

8. Existen cuatro cuartetas de triángulos iguales entre sí dos a dos. Por ejemplo, si nombramos al cuadrado por *ABCD* y su centro por *O* (fig. 23), se obtiene para la cuarteta de triángulos iguales *AOD, DOC, BOC* y *AOB* que (tabla 21):

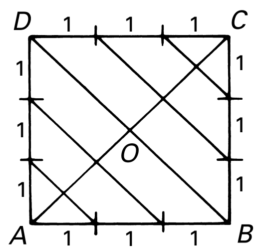


Fig. 23

Tabla 21

Parejas de triángulos iguales	**Movimiento mediante el cual uno de los triángulos se transforma en el otro**
$\Delta AOD = \Delta DOC$	Reflexión de eje *BD*
$\Delta AOD = \Delta AOB$	Reflexión de eje *AC*
$\Delta AOD = \Delta BOC$	Simetría central de centro *O*
$\Delta DOC = \Delta AOB$	Simetría central de centro *O*
$\Delta DOC = \Delta BOC$	Reflexión de eje *AC*
$\Delta BOC = \Delta AOB$	Reflexión de eje *BD*

9. Ver figura 24.

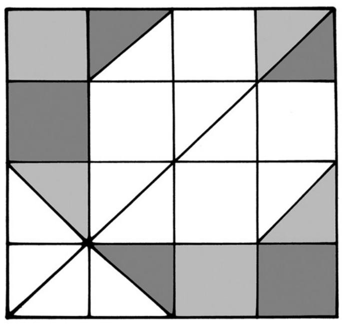


Fig. 24

10. a) Falso, la imagen del rectángulo es el propio rectángulo.
    b) Verdadero, como *R* es el punto medio de $\overline{MN}$, *R* equidista de los puntos *M* y *N*.
    c) Falso, el ángulo recto que forman las rectas *a* y *b* se conserva por cualquier movimiento del plano.
    d) Falso, la altura relativa al lado $\overline{BC}$ es a la vez bisectriz del ángulo *BAC* y mediana relativa al lado $\overline{BC}$. Por consiguiente, la reflexión que tiene por eje a la recta que contiene a la altura relativa al lado $\overline{BC}$, transforma al vértice *A* en sí mismo y al vértice *B*, en el *C*, y viceversa.
    e) Verdadero, como todos los puntos que pertenecen a la circunferencia equidistan del centro *O* de esta, entonces la imagen de cualquiera de sus puntos por una simetría central de centro *O* está en la circunferencia. (Cada punto y su imagen por tal simetría central son los extremos de un diámetro de la circunferencia.)

Ejercicios página 102

1. a) *Nota:* En el ejercicio dice comparar 5 y 6 y debe ser 3 y 6.

   1 y 4 (los ángulos comprendidos entre los lados iguales no tienen la misma amplitud, ya que la marca que los identifica es diferente).

   2 y 7 (tienen dos ángulos respectivamente iguales, pero no hay ninguna información sobre los lados).

   3 y 6 (tienen un lado y un ángulo respectivamente iguales, pero las marcas que identifican al segundo lado son diferentes).

   b) 5 y 8 por tener sus tres lados respectivamente iguales.

2. a) $\Delta ADE = \Delta BCF$; $\Delta ABE = \Delta CDF$ y $\Delta ABD = \Delta BCD$.

   b)
   - El lado homólogo al lado $\overline{DE}$ es el lado $\overline{FB}$ en los triángulos $\underline{ADE}$ y $\underline{BCF}$.
   - El lado homólogo al lado $\overline{CD}$ es el lado $\overline{AB}$ en los triángulos $\underline{ABE}$ y $\underline{CDF}$ o en los triángulos $\underline{ABD}$ y $\underline{BCD}$.
   - El ángulo correspondiente al ángulo *DAE* es $\underline{\angle BCF}$ en los triángulos $\underline{ADE}$ y $\underline{BCF}$.
   - El lado homólogo al lado $\overline{AE}$ es el lado $\overline{CF}$ en los triángulos $\underline{AED}$ y $\underline{BCF}$.
   - El lado homólogo al lado $\overline{DF}$ es el lado $\overline{BE}$ en los triángulos $\underline{DFC}$ y $\underline{ABE}$.
   - El lado homólogo al lado $\overline{AD}$ es el lado $\overline{CB}$ en los triángulos $\underline{ADE}$ y $\underline{BCF}$ o en los triángulos $\underline{ABD}$ y $\underline{BCD}$.
   - El ángulo correspondiente al ángulo *FCD* es $\underline{\angle BAE}$ en los triángulos $\underline{ABE}$ y $\underline{CDF}$.

3.

	Pasos	**Fundamentación**
(1)	$\overline{AD} = \overline{EB}$	<u>por datos</u>
(2)	$\overline{AC} = \overline{BC}$	por ser el triángulo *ABC* isósceles de base $\overline{AB}$,
(3)	$\angle CAD = \angle CBE$	<u>por ser ángulos base del triángulo isósceles *ABC* de base $\overline{AB}$</u>.
	Conclusión:	
	$\Delta ACD = \Delta BCE$	<u>por tener dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales.</u>

4. a) En los triángulos *ABD* y *ACD:*

$\overline{AB} = \overline{AC}$ por ser lados no base del triángulo isósceles *ABC*.

$\overline{AD}$ lado común.

$\overline{BD} = \overline{DC}$ por ser $\overline{AD}$ mediana relativa al lado $\overline{BC}$ del triángulo *ABC,* ya que por datos $\overline{AD}$ es la altura relativa al lado $\overline{BC}$ en el triángulo isorrectángulo *ABC.*

Luego, $\Delta ABD = \Delta ACD$ por tener respectivamente iguales los tres lados.

Nota: Pueden utilizarse otras relaciones y aplicar otras propiedades, así como otros de los criterios de igualdad de triángulos.

b) *Nota:* Considerar $\overline{AD}$ = 42,5 mm.

P_{ABD} = 14,5 cm (≈ 15 cm).

c) Representa el 70,73 % (≈ 71 %).

5. a) Estos triángulos tienen un lado en común $\overline{NP}$ y los lados $\overline{NR}$ y $\overline{PQ}$ son iguales por ser *R* y *Q* puntos medios de lados iguales $\overline{MN}$ y $\overline{MP}$ respectivamente. Además, los ángulos $\angle MNP$ y $\angle MPN$ son iguales por ser ángulos base de un triángulo isósceles. Finalmente se demuestra la igualdad de los triángulos *PRN* y *PQN* al aplicar el criterio de igualdad de triángulos (l.a.l.).

b) No es difícil probar que los triángulos *RNT* y *PQT* tienen sus tres ángulos respectivamente iguales: los de vértices en *T* por opuestos por el vértice, los ángulos $\angle NRP$ y $\angle NQP$ son iguales por elementos homólogos en los triángulos iguales *PRN* y *PQN,* demostrado en el inciso a) y los ángulos $\angle RNT$ y $\angle QPT$ son iguales por la diferencia de ángulos respectivamente iguales (ángulos base de los dos triángulos isósceles). Como $\overline{NR} = \overline{PQ}$ (ver inciso a), entonces se obtiene la igualdad de los triángulos aplicando el criterio de igualdad de triángulos (a.l.a.).

c) Trabajando en el triángulo *TNP* isósceles de base $\overline{NP}$:

$\angle NTP + \angle TNP + \angle NPT = 180°$ (por el teorema que plantea que la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°).

Sustituyendo en $\angle NTP + \angle TNP + \angle NPT = 180°$, se tiene,

$\angle NTP + 48° + 48° = 180°$, ya que $\angle TNP$ y $\angle NPT$ son iguales por ser ángulos base del triángulo isósceles *TNP.*

$\angle NTP + 96° = 180°$
$\angle NTP = 180° - 96°$
$\angle NTP = 84°$

Como el triángulo *MNP* es isósceles de base $\overline{NP}$ y $\angle PMN = 50°$, entonces aplicando el teorema que plantea que la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°, se obtiene que $\angle QPN = 65°$.

Los ángulos $\angle NTR$ y $\angle NTP$ son adyacentes, es decir,

$\angle NTR + \angle NTP = 180°$; de donde, $\angle NTR + 84° = 180°$.
$\angle NTR = 180° - 84°$
$\angle NTR = 96°$

Trabajando en el triángulo *QNP* se tiene que:

$\angle NQP + \angle QNP + \angle NPQ = 180°$ (por el teorema que plantea que la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°).

Sustituyendo en $\angle NQP + 48° + 65° = 180°$

$\angle NQP + 48° + 65° = 180°$
$\angle NQP + 113° = 180°$
$\angle NQP = 180° - 113°$
$\angle NQP = 67°$

6. a) Es fácil reconocer que los triángulos *ACD* y *BCE* tienen dos lados respectivamente iguales (los lados no base de los triángulos isósceles). Como los $\angle ACB$ y $\angle DCE$ son iguales (por datos), se verifica que $\angle ACD = \angle ACB - \angle DCM$ y que $\angle BCE = \angle DCE - \angle DCM$, y con eso los triángulos *ACD* y *BCE* son iguales por tener dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales.
   b) Los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ del cuadrilátero *ABED* son iguales por ser lados homólogos en los triángulos iguales *ACD* y *BCE.*

7. a) Se puede probar que $\angle AEB = \angle DFC$ considerando convenientemente ángulos alternos y correspondientes entre las rectas paralelas *AD* y *BC* (*BE* y *DF*) y las secantes *BE* y *BC* respectivamente.
   Los ángulos con vértices en *A* y en *C* son rectos y como la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°, se llega a la conclusión que los $\angle ABE$ y $\angle CDF$ son también iguales. Como los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son iguales por ser lados opuestos de un rectángulo, se demuestra la igualdad de los triángulos *ABE* y *CDF* según el criterio de igualdad de triángulos (a.l.a.)

b) $A_{ABCD} = \overline{BC} \cdot \overline{CD}$

$A_{BFDE} = \overline{BC} \cdot \overline{CD}$, ya que el cuadrilátero *BFDE* es un paralelogramo.

De $\frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3}$, resulta que $\overline{BF} = \frac{2\,\overline{BC}}{3}$, entonces $A_{BFDE} = \frac{2\,\overline{BC}}{3} \cdot \overline{CD}$.

$$\frac{A_{ABCD}}{A_{BFDE}} = \frac{\cancel{\overline{BC}} \cdot \cancel{\overline{CD}}}{\frac{2\,\cancel{\overline{BC}} \cdot \cancel{\overline{CD}}}{3}} = \frac{3}{2}$$

8. a) Primeramente hay que probar la igualdad entre los triángulos *TQY* y *PTX.* Para eso se demuestra sin dificultad que los tres ángulos de estos triángulos son respectivamente iguales (dos son rectos, dos coinciden con los ángulos base del triángulo isósceles *PQR* y los otros dos son iguales según el teorema sobre la suma de las amplitudes de los tres ángulos interiores de un triángulo). Además, como *T* es punto medio de $\overline{PQ}$ se cumple que $\overline{PT} = \overline{QT}$ y aplicando el criterio de igualdad de triángulos (a.l.a.) se demuestra que los triángulos *TQY* y *PTX* son iguales.

   Por elementos homólogos en los triángulos iguales *TQY* y *PTX,* se obtiene que $\overline{PX} = \overline{YQ}$, y como $\overline{PR} = RQ$ entonces $\overline{PR} - \overline{PX} = \overline{RQ} - \overline{YQ}$ de donde $\overline{XR} = \overline{YR}$.

   b) $\angle YRX = 64°$; $\angle TYR = \angle TXR = 90°$; $\angle XTY = 116°$.

   c) Trapezoide simétrico.

9. a) En los triángulos *ADE* y *BFG* se cumple que:

   $\angle DAE = \angle GBF$ por ser ángulos base del triángulo isósceles *ABC* de base $\overline{AB}$.

   (1) $\overline{DE} = \overline{FG}$ por ser lados opuestos del rectángulo *EDGB.*

   $\angle AED = 90°$ por ser adyacente al ángulo $\angle DEF$ (que es recto por ser un ángulo interior del rectángulo *EDGF*).
   $\angle GFB = 90°$ por ser adyacente al ángulo $\angle EFG$.

   Entonces:

   (2) $\angle AED = \angle GFB = 90°$.

   De $\angle DAE = \angle GBF$ y $\angle AED = \angle GFB,$ se tiene que $\angle ADE = \angle BGF$ (3) por el teorema que plantea que la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.

De (1), (2) y (3) resulta que los triángulos *ADE* y *BFG* son iguales por tener un lado y los ángulos adyacentes a ese lado respectivamente iguales.

b) $\overline{AC} = \overline{BC}$ por ser el triángulo *ABC* isósceles de base $\overline{AB}$.

$\overline{AD} = \overline{BG}$ por lados homólogos en los triángulos iguales *ADE* y *BFG.*

De lo anterior resulta que:

$\overline{AC} - \overline{AD} = \overline{BC} - \overline{BG}$

$\overline{DC} = \overline{CG}$ (por la unicidad de la sustracción de segmentos); lo que significa que el triángulo *DGC* es isósceles de base $\overline{DG}$.

10. Inicialmente se debe demostrar que los triángulos *AFG* y *CGE* son iguales.
    a) Área sombreada = 36 cm^2 – 6,0 cm^2 = 30 cm^2
    b) $\overline{AG} =$ 3,0 cm; $\overline{AF} = 2{,}0$ cm ($A_{AFG} = \frac{1}{2}\overline{AF} \cdot \overline{AG}$ y $3 = \frac{1}{2}\overline{AF} \cdot 3$ de donde, $\overline{AF} = 2{,}0$ cm) y $\overline{EC} = 4{,}0$ cm.
    c) $P_{BCEGF} = 21{,}2$ cm ≈ 21 cm.

11. Inicialmente se debe probar la igualdad entre los triángulos *ABM* y *BRC* para posteriormente justificar la igualdad entre los segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{CR}$ (por elementos homólogos en los triángulos iguales *ABM* y *BRC*). Estos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales (que son lados respectivos de los dos rombos). Para probar la igualdad entre los $\angle ABM$ y $\angle CBR$ hay que considerar que estos ángulos se obtienen al sustraerle a los ángulos iguales $\angle ABC$ y $\angle MBR$ el $\angle MBC$ respectivamente. Finalmente, al aplicar el criterio de igualdad de triángulos (l.a.l.), se demuestra la igualdad entre los triángulos *ABM* y *BRC.*

12. Primeramente se debe demostrar la igualdad entre los triángulos *CND* y *ADM* para posteriormente justificar la igualdad entre los $\angle CDN$ y $\angle ADM$ (por elementos homólogos en los triángulos iguales *CND* y *ADM*). La demostración de la igualdad entre los triángulos *CND* y *ADM* se puede realizar aplicando el criterio de igualdad de triángulos (l.l.l.), pues estos triángulos tienen sus tres lados respectivamente iguales: $\overline{CD} = \overline{AD}$ por ser lados del cuadrado *ABCD,* $\overline{DN} = \overline{DM}$, por ser lados del triángulo isósceles *MND* de base $\overline{MN}$ y $\overline{AM} = \overline{CN}$ por datos.

13. a) El cuadrilátero *ABGH* es un paralelogramo. De los datos se puede afirmar que $\overline{AD} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{EH} \parallel \overline{FG}$. Del paralelismo entre $\overline{AD}$ y $\overline{EH}$ y por ser $\overline{AD}$ perpendicular a $\overline{AB}$, se cumple también que $\overline{DC} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{HG} \parallel \overline{EF}$. En particular, de $\overline{AB} \parallel \overline{HG}$ y $\overline{AB} = \overline{HG}$ se puede concluir que *ABGH* es un paralelogramo. (Se ha utilizado para la fundamentación una de las caracterizaciones del concepto paralelogramo.)

    b) Los rectángulos *ABCD* y *EFGH* son iguales y como $\overline{AD} \parallel \overline{EF}$, también se cumple que $\overline{DC} \parallel \overline{HG}$. Además, por ser *N* y *M* los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente se obtiene que:

    $\overline{AN} = \overline{NB} = \overline{HM} = \overline{MG}$ y $\overline{NH} = \overline{NE} = \overline{MC} = \overline{BM}$. También resulta que $\angle ANH = \angle BMG = 90°$.

    Finalmente de $\overline{AN} = \overline{MG}$; $\overline{NH} = \overline{MB}$ y $\angle ANH = \angle BMG$, resulta la igualdad de los triángulos *AHN* y *BGM* según el criterio de igualdad de triángulos l.a.l.

    c) $A_{ABGH} = 84\ cm^2$.

14. $\angle ABC = 76°$; $\angle BAE = 52°$; $\angle ACD = 64°$; $\angle ADC = 52°$.

15. Para responder este ejercicio se debe comenzar demostrando la igualdad entre los triángulos *AED* y *CFB.*

    a) $P_{EFCD} = 23{,}8\ cm \approx 24\ cm$

    $A_{EFCD} = 35{,}2\ cm^2 \approx 35\ cm^2$

    b) El cuadrilátero *DEBC* es un trapecio rectángulo, ya que el lado $\overline{EB}$ está contenido en el lado $\overline{AB}$ del trapecio isósceles *ABCD;* por tanto, los lados $\overline{DC}$ y $\overline{EB}$ del cuadrilátero *DEBC* son paralelos entre sí; lo que permite asegurar que este cuadrilátero es un trapecio de bases $\overline{DC}$ y $\overline{EB}$. Además, como el segmento $\overline{DE}$ es perpendicular (por datos) al lado $\overline{AB}$ del trapecio *ABCD;* se cumple que $\overline{DE}$ es también perpendicular al lado $\overline{DC}$ (si dos rectas son paralelas y una tercera recta es perpendicular una de ellas, también lo es a la otra recta). Del análisis anterior se tiene que en el trapecio *DEBC* los $\angle CDE$ y $\angle DEB$ son rectos.

    c) $A_{DEBC} = 40{,}15\ cm^2 \approx 40\ cm^2$.

    d) $\overline{AD} = 5{,}8$ cm (aquí se refiere al trapecio *ABCD*).

16. a) El cuadrilátero *BFDE* es un rectángulo. De los datos ($\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, y $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$), se puede afirmar que *BFDE* es un paralelogramo, pero como tiene un ángulo interior recto ($\angle ABC \equiv \angle EBF = 90°$), se puede concluir que el cuadrilátero *BFDE* más que un paralelogramo es un rectángulo.
    b) *F* es el punto medio de $\overline{BC}$ (resulta de demostrar la igualdad entre los triángulos *AED* y *CDF*).
    c) Las dimensiones son 4,2 cm y 7,0 cm.
    P_{BFDE} = 22,4 cm ≈ 22 cm
    A_{BFDE} = 29,4 cm^2 ≈ 29 cm^2

17. a) En los triángulos *AED* y *BCH* se cumple que $\overline{AD} = \overline{BC}$ y $\angle DAE = \angle BCH$ por ser respectivamente lados y ángulos opuestos del paralelogramo *ABCD.*
    Los $\angle AED$ y $\angle ABH$ son iguales por ser ángulos correspondientes entre las rectas paralelas *EG* y *BF* y la secante *AB.* Por otra parte, $\angle ABH = \angle BHC$ por ser ángulos alternos entre las paralelas $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ y la secante *BF.* Aplicando la propiedad transitiva se obtiene que $\angle AED = \angle BHC$. Los $\angle ADE$ y $\angle CBH$ son iguales según el teorema sobre la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo. Finalmente al aplicar el criterio de igualdad de triángulos (l.a.l.), se llega a probar que los triángulos *AED* y *BCH* son iguales entre sí.
    b) El cuadrilátero *DEBH* es un paralelogramo. El lado $\overline{DH}$ está contenido en el lado $\overline{DC}$ y el lado $\overline{EB}$ en el lado $\overline{AB}$ del paralelogramo *ABCD* por lo que se cumple que $\overline{DH} \parallel \overline{EB}$. Análogamente se prueba que $\overline{DE} \parallel \overline{BH}$, por lo que el cuadrilátero *DEBH* es un paralelogramo.
    c) El cuadrilátero *ABFG* es un trapecio rectángulo. Análogamente a como se procedió para justificar la respuesta del inciso anterior, se puede probar que $\overline{AB} \parallel \overline{GF}$ y como por datos $\overline{AG} \perp \overline{AB}$, se tiene que el cuadrilátero *ABFG* es un trapecio rectángulo.
    d) A_{EBFG} = 22,4 cm^2 ≈ 22 cm^2.
    A_{ABFG} = 28,7 cm^2 ≈ 29 cm^2.
    e) *Nota:* Considerar $\overline{EG}$ ≈ 0,723 dm.
    P_{ABFC} = 22,43 cm ≈ 22 cm.

18. a) Se debe demostrar inicialmente que los triángulos *ABF* y *FDE* son iguales.
    b) A_{BCDF} = 23,1 cm^2 ≈ 23 cm^2.

c) El triángulo *BCE* es rectángulo en *C* y escaleno.
d) 25 %.
e) Si se traza por el punto *F* el segmento perpendicular al lado $\overline{BC}$ y además, el segmento $\overline{FC}$, se puede probar sin dificultad que el rectángulo *ABCD* ha quedado dividido en cuatro triángulos iguales. Sobre la base de la demostración realizada en el inciso a), se puede concluir que A_{FDE} = 25 % A_{ABCD}.
f) $P = \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DF} + \overline{BF}$

$22{,}3 = 8{,}8 + 3{,}5 + 4{,}4 + \overline{BF}$

$\overline{BF} = (22{,}3 - 16{,}7)$ cm

$\overline{BF} = 5{,}6$ cm

19. Se debe comenzar demostrando la igualdad entre los triángulos *AED* y *BCE.* Posteriormente de la relación entre los lados homólogos en estos triángulos iguales, se obtiene que $\overline{AE} = \overline{BE}$ y esto último significa que el triángulo *ABE* es isósceles de base $\overline{AB}$.

20. Se debe probar que los triángulos *BFE, FCG, GDH* y *EHA* son iguales entre sí. Al establecer la relación entre sus lados homólogos se obtiene que $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{EH}$, lo que permite garantizar que el cuadrilátero *EFGH* es un rombo.

21. Se debe probar inicialmente que $\Delta ATD = \Delta RBC$ y del análisis de los lados homólogos en esos triángulos, resulta que $\overline{AT} = \overline{CR}$. Finalmente se demuestra que los triángulos *ART* y *TRC* son iguales.

22. a) Se puede probar que $\overline{ES} = \overline{FQ}$ demostrando la igualdad entre los triángulos *FQR* y *ERS.*
b) $\angle EMS = 45°$.

23. Se puede probar que los triángulos *BCS, CDQ, DAR* y *ABP* son iguales y con eso $\overline{BS} = \overline{CQ} = \overline{DR} = \overline{AP}$ (fig. 25); pero como también se cumple que $\overline{BP} = \overline{CS} = \overline{DQ} = \overline{AR}$. Se puede concluir que $\overline{PS} = \overline{SQ} = \overline{QR} = \overline{PR}$, por lo que *PSQR* es un rombo. Como por datos se cumple $\angle APB = 90°$, entonces *PSQR* más que un rombo es un cuadrado.

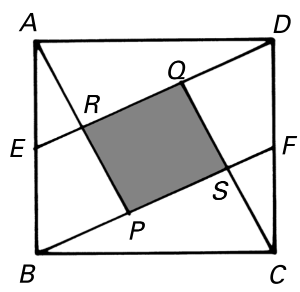


Fig. 25

24. La solución de este problema aparece en el *Cuaderno Complementario* en la página 109.

25. En este ejercicio se aplican los contenidos relativos a la igualdad de triángulos a la solución de un problema de la práctica. Para resolver el ejercicio se deben construir dos triángulos que sean iguales (fig. 26) de forma tal que al establecer la proporcionalidad entre sus lados homólogos se pueda determinar la distancia entre los puntos A y B mediante la medición del segmento $\overline{A'B'}$ que es el lado homólogo al lado $\overline{AB}$ en el otro triángulo. Aquí se han construido dos segmentos que se cortan en el punto O, siendo O el punto medio de estos. En este caso se verifica que los triángulos AOB y $A'OB'$ son iguales por tener dos lados y al ángulo comprendido respectivamente iguales.

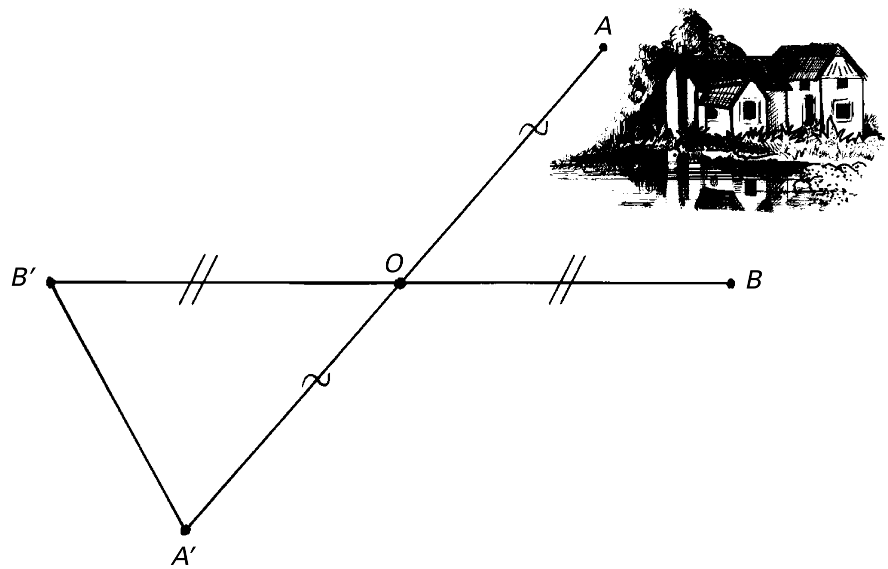


Fig. 26

26. La solución es análoga a la realizada en el ejercicio 25.

27. Por los puntos A y B se trazan dos semirrectas paralelas entre sí (fig. 27) y sobre estas se determinan los puntos C y D de forma tal que $\overline{AC} = \overline{BD}$. Los $\angle CAB$ y $\angle ABD$ son iguales por ser ángulos alternos entre dichas paralelas y la secante AB. De manera análoga los $\angle CDB$ y $\angle ACD$ son iguales por ser alternos entre las semirrectas paralelas y la secante CD.
Es fácil reconocer que los triángulos AMC y DBM son iguales por tener un lado y los ángulos adyacentes a ese lado respectivamente

iguales. En participar, se cumple $\overline{AM} = \overline{MB}$ por ser lados homólogos en los triángulos iguales *AMC* y *DBM.* De $\overline{AM} = \overline{MB}$ se puede concluir que *M* es el punto medio del segmento $\overline{AB}$; lo que significa que *M* divide al segmento $\overline{AB}$ en dos partes iguales.

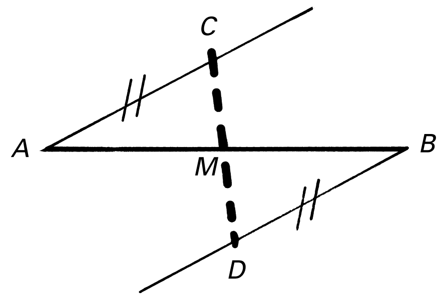


Fig. 27

3.2 Proporcionalidad entre segmentos

1. a) 4 b) 18 c) $\frac{2}{7}$ d) 2,5 e) 80

2. Como $\frac{180}{120} = \frac{60}{40} = \frac{3}{2}$ se puede afirmar que las razones entre las estaturas y sus sombras respectivas son iguales, lo que significa que son proporcionales.

3. a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

4. *Nota:* Considerar 108 latas y no 118.
   a) Ana recogió mayor cantidad de latas.
   b) Alexánder recogió 72 latas.

5. Raúl tiene 10 años.

Ejercicios página 115

1. La varilla *d* debe tener una longitud de 6,0 cm.

2. a) $\overline{EF} = 0,9$ cm.

   b) $\overline{RT} = 0,64$ dm.

   c) $\overline{MN} = 15$ cm.

   d) $\overline{PQ} = 0,6$ dm.

   e) La relación entre las longitudes de $\overline{MN}$ y de $\overline{EF}$ es $\overline{MN} \cdot \overline{EF} = 216$, por lo que existen infinitas soluciones. Una de esas soluciones es, por ejemplo, $\overline{MN} = 5,4$ cm y $\overline{EF} = 40$ cm.

   f) La relación entre las longitudes de $\overline{PQ}$ y de $\overline{RT}$ es $\overline{PQ} \cdot \overline{RT} = 525$, por lo que existen infinitas soluciones. Una de esas soluciones es, por ejemplo, $\overline{PQ} = 30$ cm y $\overline{RT} = 17,5$ cm.

3. *Nota:* Considerar $\overline{EF} = 5,0$ cm.

   a) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{PR}}$ b) $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{PR}}{\overline{QS}}$ c) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{MN}}{\overline{PR}}$ d) $\dfrac{\overline{QS}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{PR}}{\overline{CD}}$.

4. a) $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\overline{BG}}{\overline{CE}} = \dfrac{6}{2} = 3$; $\dfrac{\overline{AG}}{\overline{CD}} = \dfrac{9}{3} = 3$; $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \dfrac{7}{3}$; $\dfrac{\overline{ED}}{\overline{FB}} = \dfrac{1}{4}$;

   $\dfrac{\overline{EG}}{\overline{CF}} = \dfrac{3}{7}$; $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{EF}} = \dfrac{5}{5} = 1$.

   b) $\dfrac{\overline{BG}}{\overline{CE}} = \dfrac{\overline{AG}}{\overline{CD}} = 3$; $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{CF}}{\overline{EG}} = \dfrac{7}{3}$.

5. La respuesta de este ejercicio es gráfica. Para resolverlo, se sugiere fijar el valor para el coeficiente de proporcionalidad, por ejemplo, $k = \dfrac{1}{2}$, entonces se tiene que $\overline{AB} = \dfrac{1}{2}\overline{CD}$ y $\overline{MN} = \dfrac{1}{2}\overline{EF}$; lo que significa que los segmentos $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ tienen el doble de la longitud de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{MN}$ respectivamente. Finalmente se cumple que:

   $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{EF}} = \dfrac{2\overline{AB}}{2\overline{MN}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{MN}}$.

6. $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{XY}} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{XY}} = \dfrac{3}{4}$.

7. a) La razón entre los lados de los dos cuadrados es $\frac{1}{4}$ o 4.
   b) El perímetro del cuadrado de área igual a a^2 es $4a$.
   El perímetro del cuadrado de área igual a $4a^2$ es $8a$.
   c) Sí, el cuadrado de lado a “cabe” cuatro veces exactas en el cuadrado de lado $2a$.

8. a) $\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
   b) Ver figura 28.

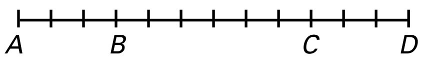


Fig. 28

9. Ver figura 29.

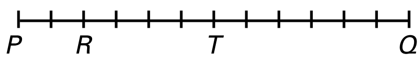


Fig. 29

10. a) Se pueden formar dos triángulos diferentes; uno cuyas longitudes de los lados son: 4,0; 5,0 y 7,0 cm y el otro de longitudes 2,0; 4,0 y 5,0 cm. Estos dos triángulos son construibles, pues para las medidas de sus lados se cumple la desigualdad triangular.
    b) Sea ABC el triángulo de lados 4,0; 5,0 y 7,0 cm, entonces $P_{ABC} = 16$ cm.
    Sea PQR el triángulo de lados 2,0 cm; 4,0 cm y 5,0 cm, entonces $P_{PQR} = 11$ cm.
    c) Para el triángulo ABC la longitud no considerada de las dadas es 4,0 cm, entonces las longitudes de los lados del triángulo que se busca son: 2,0; 2,5; y 3,5 cm, ya que se verifica $\frac{4}{2} = \frac{5}{2{,}5} = \frac{7}{3{,}5}$.
    Para el caso del triángulo PQR, las longitudes buscadas son: 7,0; 14 y 17,5 cm, pues se cumple que $\frac{2}{7} = \frac{4}{14} = \frac{5}{17{,}5}$.

Ejercicios página 120

1. Ver figura 30.
   a) $\overline{OA}$; $\overline{OB}$; $\overline{OC}$; $\overline{OD}$; $\overline{AB}$; $\overline{AC}$; $\overline{AD}$; $\overline{BC}$;
   $\overline{BD}$; $\overline{CD}$; $\overline{OE}$; $\overline{OF}$; $\overline{OG}$; $\overline{OH}$; $\overline{EF}$; $\overline{EG}$; $\overline{EH}$; $\overline{FG}$; $\overline{FH}$; $\overline{GH}$.

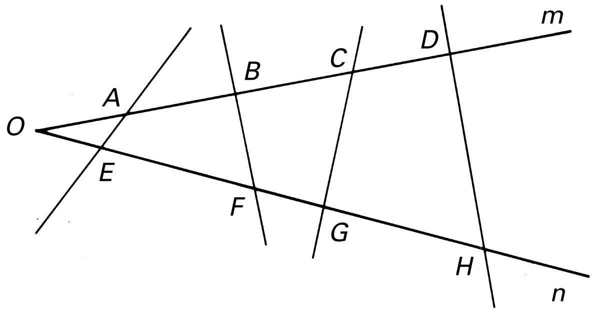


Fig. 30

b) • $\overline{OA}$ es el segmento correspondiente al segmento $\overline{OE}$.
- $\overline{FH}$ es el segmento correspondiente al segmento $\overline{BD}$.
- $\overline{AC}+\overline{CD}$ es el segmento correspondiente al segmento $\overline{EH}$.
- $\overline{CD}$ es el segmento correspondiente al segmento $\overline{EH}-\overline{EG}$.
- $\overline{EG}$ es el segmento correspondiente al segmento $\overline{AC}$.

2. *Nota:* En el inciso a) debe sustituirse $\overline{AC}$ por $\overline{BC}$. En el inciso e) debe sustituirse $\overline{EB}$ por $\overline{CF}$.

a) $\dfrac{\overline{GH}}{\overline{HI}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DC}}$ Primera parte del teorema de las transversales.

b) $\overline{EH}:\overline{EB}=\overline{FI}:\overline{FC}$ Tercera parte del teorema de las transversales.

c) $\dfrac{\overline{ZA}}{\overline{ZC}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{CF}}$ Segunda parte del teorema de las transversales.

d) $\overline{ZH}:\overline{ZG}=\overline{BH}:\overline{AG}$ Segunda parte del teorema de las transversales.

e) $\overline{AD}:\overline{DG}=\overline{BE}:\overline{BH}$ Tercera parte del teorema de las transversales.

f) $\dfrac{\overline{BZ}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{HZ}}{\overline{GI}}$ Primera parte del teorema de las transversales.

g) $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{EF}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ Primera parte del teorema de las transversales.

h) $\overline{CF}:\overline{BE}=\overline{FI}:\overline{EH}$ Tercera parte del teorema de las transversales.

i) $\dfrac{\overline{AG}}{\overline{CI}}=\dfrac{\overline{ZG}}{\overline{ZI}}$ o $\dfrac{\overline{AG}}{\overline{CI}}=\dfrac{\overline{ZA}}{\overline{ZC}}$ Segunda parte del teorema de las transversales.

3. $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{AF}}{\overline{AD}}$ Primera parte del teorema de las transversales.

$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FD}}$ Primera parte del teorema de las transversales.

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{EB}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{FD}}$ Primera parte del teorema de las transversales.

$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{EF}}{\overline{BD}}$ Segunda parte del teorema de las transversales.

$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$ Primera parte del teorema de las transversales.

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$ Primera parte del teorema de las transversales.

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{EB}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DC}}$ Primera parte del teorema de las transversales.

$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{ED}}{\overline{BC}}$ Segunda parte del teorema de las transversales.

Nota: De dos proporciones que tengan igual razón entre las longitudes de dos segmentos pueden obtenerse nuevas proporciones.

4. $\overline{AG}=1{,}5$ cm; $\overline{CD}=5{,}6$ cm; $\overline{GF}=9{,}8$ cm;

$\overline{DF}=2{,}8$ cm; $\overline{CE}=1{,}4$ cm; $\overline{GE}=4{,}9$ cm.

5. a) En triángulo *ADE* y *EFC:*

$\overline{AD} \parallel \overline{BF}$ por ser *ABCD* un trapecio de base $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ y *B, C, G, F,* ser puntos alineados.

$\angle DAE = \angle CFE$ por alternos entre las paralelas $\overline{AD}$ y $\overline{BF}$ cortadas por la secante $\overline{AF}$.

$\angle ADC = \angle DCF$ por alternos entre las paralelas $\overline{AD}$ y $\overline{BF}$ cortadas por la secante $\overline{DC}$.

$\overline{AD}=\overline{CF}$ por datos.

Luego $\Delta ADE = \Delta EFC$ por tener un lado y los ángulos adyacentes respectivamente iguales.

b) $\overline{EF}=4{,}0$ cm; $\overline{EG}=3{,}0$ cm; $\overline{BG}=5{,}0$ cm; $\overline{BF}=10$ cm.

6. a) $A_{EPQ} = 11{,}76\ \text{cm}^2 \approx 12\ \text{cm}^2$.
   b) $P_{DPQF} = 15{,}6\ \text{cm} \approx 16\ \text{cm}$.
   c) El área del triángulo *PQE* representa el 49 % del área del triángulo *DEF*.

7. Las longitudes de los lados del rectángulo son $\overline{AB} = \frac{20}{3}\ \text{cm}$ y $\overline{AD} = 4{,}5\ \text{cm}$.

8. a) $\overline{EF} = 3{,}0\ \text{cm}$.
   b) $\overline{BC} = 2\,\overline{EF}$. Esta relación se cumple en triángulos cualesquiera siempre que se verifique que *E* y *F* sean los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, pues se cumple $\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2}$.

9. *Nota:* En las condiciones del ejercicio debe considerarse que *ABCD* es un trapecio rectángulo y que $AD \cap BC = \{O\}$ en lugar de $AB \cap BC = \{O\}$. En la orden del ejercicio debe sustituirse *AB* por *AD.*
   Las rectas *AD* y *BC* se cortan a 12 cm del punto *C* y a 9,0 cm del punto *D.*

10. Ver figura 31.

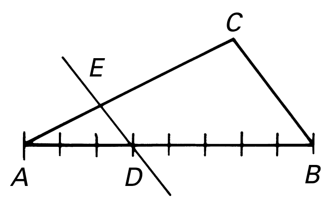


Fig. 31

11. Ver figura 32.

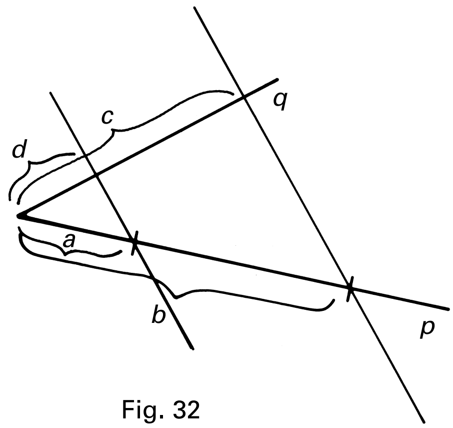


Fig. 32

12. a) Primeramente se debe probar que $\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FC}}$ aplicando la primera parte del teorema de las transversales entre las rectas *EF* y *DC* y las secantes *AD* y *AC*. Además, se cumple que $\frac{\overline{AF}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{GB}}$, en virtud de la primera parte del teorema de las transversales entre las rectas paralelas *GF* y *BC* y las secantes *AC* y *AB*.

Finalmente, resulta que $\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{GB}}$ por la propiedad transitiva de la relación de igualdad.

b) Según el resultado obtenido en el inciso a) y de la condición dada en los datos del ejercicio $\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{3}{4}$, resulta que $\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{GB}} = \frac{3}{4}$. Al sustituir en esta relación las longitudes de los segmentos $\overline{AG}$ y $\overline{AE}$, se obtiene que $\frac{4,2}{\overline{AD}} = \frac{6}{\overline{GB}} = \frac{3}{4}$, y del cálculo correspondiente resulta que $\overline{AD} = 5,6\text{ cm}$ y $\overline{GB} = 8,0\text{ cm}$.

13. a) $\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{ON}}$ Primera parte del teorema de las transversales.

$\frac{\overline{OA}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BN}}$ Primera parte del teorema de las transversales.

$\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MN}}$ Segunda parte del teorema de las transversales.

$\frac{\overline{OB}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OP}}$ Primera parte del teorema de las transversales.

$\frac{\overline{OB}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CP}}$ Primera parte del teorema de las transversales.

$\frac{\overline{OB}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NP}}$ Segunda parte del teorema de las transversales.

$\frac{\overline{OC}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OQ}}$ Primera parte del teorema de las transversales.

$\frac{\overline{OC}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{DQ}}$ Primera parte del teorema de las transversales.

$\frac{\overline{OC}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{PQ}}$ Segunda parte del teorema de las transversales.

$\frac{\overline{OD}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OM}}$ Primera parte del teorema de las transversales.

$\frac{\overline{OD}}{\overline{DQ}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AM}}$ Primera parte del teorema de las transversales.

$\frac{\overline{OD}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{QM}}$ Segunda parte del teorema de las transversales.

b) De $\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{ON}}$ y $\frac{\overline{OB}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OP}}$ demostrado en el inciso a) se tiene, en virtud de la propiedad transitiva de la relación de igualdad, que $\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OP}}$.

c) De la relación $\frac{\overline{OD}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{QM}}$, demostrada en el inciso a) se cumple, en virtud de la propiedad de las proporciones, que $\overline{OD} \cdot \overline{QM} = \overline{OQ} \cdot \overline{AD}$. Al dividir esta igualdad por el producto $\overline{AD} \cdot \overline{QM}$, resulta que $\frac{\overline{OD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{QM}}$.

14. Si se consideran las rectas paralelas *AF* y *CD* y las secantes *BC* y *BD,* se puede plantear según la primera parte del teorema de las transversales que $\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FC}}$. Por otra parte, $\overline{FC} = \overline{AC}$, ya que se puede demostrar fácilmente que el triángulo *ACF* es isósceles de base $\overline{AF}$. Al sustituir $\overline{FC}$ en $\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FC}}$, se obtiene que $\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$, es decir, $\frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$.

15. a) Del paralelismo entre las rectas *BC* y *DE* y por ser *D* el punto medio de $\overline{AC}$ se justifica la relación $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{2}$, es decir, $2\,\overline{AE} = \overline{AB}$ y como, además, los puntos *A, E* y *B* están alineados se cumple que *E* es el punto medio de $\overline{AB}$.

    b) De $\overline{DE} \parallel \overline{CB}$ y $\overline{CB} \perp \overline{AB}$, resulta que $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ (si dos rectas son paralelas entre sí y una tercera es perpendicular a una de ellas, entonces dicha recta es también perpendicular a la otra recta). De este resultado se puede inferir que $\overline{DE}$ es la altura relativa al lado $\overline{AB}$ en el triángulo *ABD.* Como en el inciso anterior se demostró que $\overline{AE} = \overline{EB}$, se cumple que $\overline{DE}$ es también la mediana relativa al lado $\overline{AB}$ en el triángulo *ABD.* De lo anterior resulta que el triángulo *ABD* es isósceles de base $\overline{AB}$ por lo que $\overline{BD} = \overline{AD}$. También se cumple que $\overline{AD} = \overline{DC}$ por ser *D* el punto medio de $\overline{AC}$.

    En resumen: $\overline{BD} = \overline{AD}$ y $\overline{AD} = \overline{CD}$, de donde $\overline{BD} = \overline{AD} = \overline{DC}$, es decir, $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{BD}$.

16. La solución de este problema aparece en el *Cuaderno Complementario* en las páginas 124 y 125.

17. Los puntos *C* y *E* deben ubicarse de forma tal que se garantice el paralelismo entre las rectas *BC* y *DE* (fig. 33). Si *BC* || *DE* y considerando las secantes *AD* y *AE* se puede plantear que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$ en virtud de la primera parte del teorema de las transversales. De esta relación resulta $\overline{BD} = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{CE}}{\overline{AC}}$ y según la descripción realizada, los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CE}$ y $\overline{AC}$ son medibles, ya que se puede acceder a ellos.

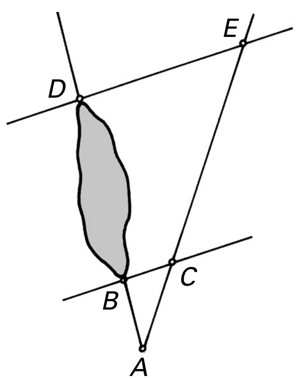


Fig. 33

18. Ver figura 34.

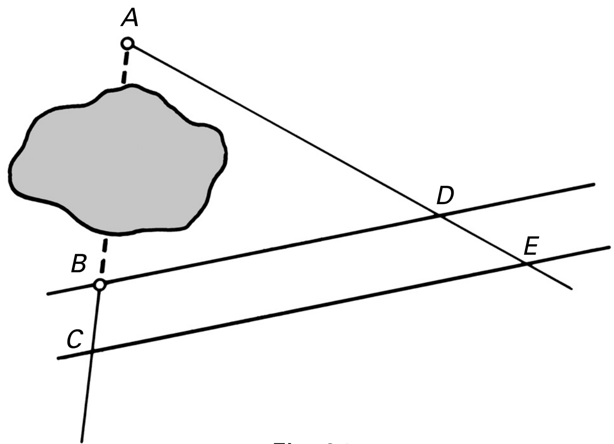


Fig. 34

1. Ubicar un punto E como se muestra en la figura 34 de forma tal que pueda ser medible (accesible) el segmento $\overline{AE}$.
2. Ubicar un punto D en $\overline{AE}$ de forma tal que no existan obstáculos entre B y D.
3. Trazar la recta BD.
4. Trazar por E la recta paralela a la recta BD que corta a la recta AB en el punto C.
5. Calcular las longitudes de los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ y $\overline{DE}$.
6. Determinar la distancia que separa a los puntos inaccesibles A y B al sustituir las longitudes de los segmentos correspondientes en la proporción $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{DE}}$.

19. a) Alejandro tiene razón en lo que se refiere a las longitudes que se necesita calcular, pero con su planteamiento no garantiza que las rectas AC y BD sean paralelas.

    b) Sí, para garantizar el paralelismo entre las rectas AC y BD (ya que dos rectas perpendiculares a una misma recta son paralelas entre sí).

    c) De O a A hay 130 pasos; lo que es aproximadamente igual a 32,5 m según las consideraciones realizadas.
    De O a B hay 200 pasos lo que es aproximadamente igual a 50 m según las consideraciones realizadas.
    De A a C hay 55 pasos lo que es aproximadamente igual a 13,75 m según las consideraciones realizadas.

Aplicando la segunda parte del teorema de las transversales, se puede calcular la longitud de $\overline{BD}$ ($\overline{BD} \approx 21{,}2\,\mathrm{m}$).
El área aproximada del terreno es de 306 m^2.

20. Para que los estudiantes puedan resolver completamente este ejercicio, se debe dar a conocer la propiedad siguiente: En todo triángulo rectángulo con un ángulo de 30°, se cumple que la longitud del lado que se opone al ángulo de 30° es la mitad de la longitud del lado que se opone al ángulo recto.

a) Según las condiciones descritas en el texto del ejercicio se puede calcular la altura del árbol, pues están dadas las premisas para aplicar el teorema de las transversales ($\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ y las rectas *CD* y *CE* son las secantes).

b) Según lo expuesto en la respuesta al inciso a), se puede plantear, según la segunda parte del teorema de las transversales, que $\dfrac{\overline{CB}}{\overline{CE}} = \dfrac{\overline{BA}}{\overline{ED}}$ y al sustituir en esta proporción se obtiene que $\dfrac{0{,}15}{6} = \dfrac{0{,}30}{\overline{ED}}$ y de aquí, $\overline{ED} = 12\,\mathrm{m}$.

c) Para obtener la solución aproximada de este problema, hay que garantizar el paralelismo entre el "árbol" y otro "segmento" (que pudiera estar representado por un palo, un alambre, etc.) en posición perpendicular en relación con la horizontal (la tierra). Se traza mentalmente la visual o línea imaginaria desde *C* hasta el extremo superior del "segmento" y del árbol y se mide la distancia respectiva del observador a la base del árbol y del "segmento" a esta. En el cálculo final hay que tener en cuenta la altura del observador y la extensión del brazo.

d) No es difícil, dados los datos del ejercicio, asegurar que los triángulos rectángulos *CFE, ACB* y *CED* tienen un ángulo que mide 30°. Sobre la base de la aplicación de la propiedad expuesta antes de resolver el inciso a), se cumplen las relaciones siguientes: $\overline{CE} = 2\,\mathrm{h}$ (considerando el triángulo *CFE*) y $\overline{DE} = 2\,\overline{CE}$ (considerando el triángulo *CED*).
Finalmente, $\overline{DE} = 2\,\overline{CE} = 2(2\mathrm{h}) = 4\,\mathrm{h}$.

3.3 Semejanza de figuras geométricas

1. a) Los rectángulos *A* y *B* son semejantes, pues sus cuatro ángulos interiores miden respectivamente 90° y sus lados son respectivamente proporcionales $\frac{3}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{2}$.

   b) $\frac{\text{Perímetro } A}{\text{Perímetro } B} = \frac{1}{2}$ y $\frac{\text{Área } A}{\text{Área } B} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

2. a) Se puede justificar sin dificultades que los ángulos interiores de los triángulos *MNP* y *MQR* son respectivamente iguales. Además, según el teorema de las transversales, se cumple:

   $$\underbrace{\frac{\overline{MP}}{\overline{MR}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{MQ}}}_{\text{Primera parte}} = \frac{\overline{NP}}{\overline{QR}}$$

   Segunda parte: $\frac{\overline{MN}}{\overline{MQ}} = \frac{\overline{NP}}{\overline{QR}}$

   , lo que significa que sus tres lados son respectivamente proporcionales.

   b) $\frac{P_{MNP}}{P_{MQR}} = \frac{2}{3}$; con lo que se cumple: $\frac{12,6}{P_{MQR}} = \frac{2}{3}$ y con eso,

   $P_{MQR} = \frac{3 \cdot 12,6}{2} = 18,9$ cm.

3. a) Según la segunda parte del teorema de las transversales se cumple que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$; lo que significa que los lados consecutivos de los rectángulos son respectivamente proporcionales. De lo anterior se puede afirmar que los rectángulos *ABCD* y *AEFG* son semejantes.

   b) De $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$, resulta que $\frac{5}{8} = \frac{3}{\overline{EF}}$, de donde $\overline{EF} = 4,8$ cm

   $P_{ABCD} = 16$ cm.

   $P_{AEFG} = 25,6$ cm ≈ 26 cm.

   $A_{ABCD} = 15$ cm^2.

   $A_{ABCD} = 38,4$ cm$^2 \approx 38$ cm^2.

4. Según los datos, resulta fácil probar que los cuatro ángulos interiores de los dos trapecios son respectivamente iguales. Faltará demostrar

la proporcionalidad entre sus lados homólogos para garantizar la semejanza entre los dos trapecios, es decir, se debería cumplir que: $\frac{\overline{EB}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{GF}}$. Basta solamente sustituir las longitudes de los segmentos correspondientes en la proporción $\frac{\overline{EB}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DF}}$. Al sustituir, se obtiene $\frac{4}{5} = \frac{6}{8}$, de donde $32 \neq 30$; lo que significa que los lados homólogos no son proporcionales. Finalmente, se puede asegurar que los trapecios *ABED* y *DEGF* no son semejantes.

5. a) Verdadero.
   b) Falso; ya que no siempre los lados consecutivos de dos rectángulos son respectivamente proporcionales.
   c) Falso; ya que se debe cumplir que la razón entre sus respectivas áreas sea igual a $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ y al comprobar con los valores dados, se cumple que $\frac{6}{18} \neq \frac{1}{4}$.
   d) Falso; según las condiciones dadas, se tiene que cumplir que $\frac{\text{Área } B}{\text{Área } A} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$; lo que significa que el área de la figura *B* es mayor que el área de la figura *A.*
   e) Verdadero.

6. La solución de este ejercicio es gráfica. Mostraremos un ejemplo para cuando el coeficiente de proporcionalidad sea $\frac{7}{2}$. Sea *A′B′C′D′* el rectángulo semejante al rectángulo *ABCD,* entonces se cumple que $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{7}{2}$ o $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{2}{7}$. Sin pérdida de la generalidad, consideremos el caso $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{7}{2}$, de donde $\overline{A'B'} = \frac{2}{7}\overline{AB}$ y $\overline{B'C'} = \frac{2}{7}\overline{BC}$.

   Dividamos geométricamente los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en 7 partes iguales y tomemos 2 de ellas para obtener los segmentos $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ (fig. 35). El fundamento teórico de este procedimiento es el teorema de las transversales.

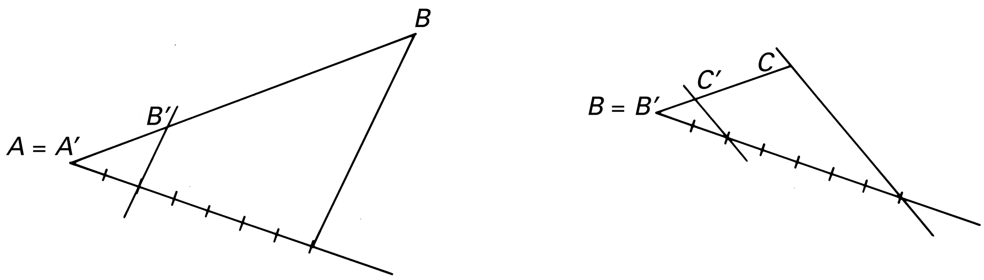


Fig. 35

Ahora es posible construir un rectángulo de lados consecutivos $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$.

7. Sean *A* y *B* los polígonos y consideremos, sin pérdida de la generalidad, que *A* es el polígono "menor". Entonces:

$\dfrac{\text{Perímetro } A}{\text{Perímetro } B} = \dfrac{4}{5}$; de donde $\dfrac{16}{\text{Perímetro } B} = \dfrac{4}{5}$ y con esto, perímetro $B = 20$ u

$\dfrac{\text{Área } A}{\text{Área } B} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25}$, de donde; Área $B = 56{,}25$ u$^2 \approx 56$ u^2

8. *Nota:* En las condiciones del ejercicio se omitió que los polígonos son semejantes.
Según los datos, el polígono *D* es "mayor" que el polígono *C,* entonces $\dfrac{\text{Área } D}{\text{Área } C} = \dfrac{20}{12{,}8} = \dfrac{200}{128} = \dfrac{25}{16} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^2$. Por consiguiente, el coeficiente de proporcionalidad es $\dfrac{5}{4}$ y con esto, $\dfrac{\text{Perímetro } D}{\text{Perímetro } C} = \dfrac{5}{4}$. Finalmente, el perímetro del polígono *C* es igual a 12 cm.

9. Sean *A* y *B* los dos polígonos dados. Según los datos del ejercicio, $\dfrac{\text{Perímetro } A}{\text{Perímetro } B} = \dfrac{20}{35} = \dfrac{4}{7}$. Al realizar los cálculos correspondientes, se obtiene que los lados del triángulo *A* miden 8,0; 4,0 y 9,2 cm, pues $\dfrac{8}{14} = \dfrac{4}{7} = \dfrac{9{,}2}{16{,}1}$.

10. *Nota:* Se sugiere, antes de realizar la medición, ubicar un punto aproximadamente en el "centro" de cada una de las figuras.

Entre la escuela y la biblioteca hay aproximadamente 3,5 cm.
Entre la escuela y el consultorio médico hay aproximadamente 2,3 cm.
Entre el consultorio médico y la biblioteca hay aproximadamente 3,7 cm.
Según las mediciones realizadas y la escala dada, se obtiene la respuesta siguiente:

La distancia aproximada entre la escuela y la biblioteca es de 350 m.
La distancia aproximada entre la escuela y el consultorio médico es de 230 m.
La distancia aproximada entre el consultorio médico y la biblioteca es de 370 m.

11. De los datos dados en el ejercicio se puede probar la proporcionalidad entre los lados $\overline{AF}$ y $\overline{CD}$, y $\overline{AE}$ y $\overline{BC}$, pues se cumple que: $\frac{\overline{AF}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2}$. Por otra parte, y según la segunda parte del teorema de las transversales, se cumple que $\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BD}} = \frac{1}{2}$. Finalmente, se tiene que $\frac{\overline{AF}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BD}} = \frac{1}{2}$, por lo que se puede afirmar que los triángulos *AEF* y *BCD* son semejantes.

12. a) Del paralelismo entre $\overline{DE}$, $\overline{FG}$ y $\overline{BC}$, y de los datos dados en el ejercicio, se puede probar sin dificultad, la proporcionalidad entre los lados de los triángulos *ADE, AFG* y *ABC,* tomados dos a dos, con lo cual se prueba la semejanza entre los tres triángulos.

b) $\frac{P_{AED}}{P_{AFG}} = \frac{1}{2}$, de donde $\frac{12,8}{P_{AFG}} = \frac{1}{2}$ y con eso el perímetro del triángulo *AFG* es igual a 25,6 cm. Análogamente se puede calcular el perímetro del triángulo *ABC* (P_{ABC} = 38,4 cm).

$\frac{A_{ADE}}{A_{AFG}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, de donde $\frac{21,4}{A_{AFG}} = \frac{1}{4}$ y con eso el área del triángulo *AFG* es igual a 85,6 cm^2. Análogamente se puede calcular el área del triángulo *ABC* (A_{ABC} = 192,6 cm^2 ≈ 193 cm^2).