Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

MATEMÁTICA

MATERIAL COMPLEMENTARIO II

INTRODUCCIÓN

El presente material tiene como objetivo ofrecer orientaciones acerca de cómo estudiar utilizando las 36 teleclases de repaso, que se transmiten para contribuir a la preparación para el ingreso a la Educación Superior, los libros de textos y otros materiales que están al alcance de los estudiantes y profesores.

El epígrafe I contiene los ejercicios y problemas que serán tratados en las teleclases y algunas orientaciones sobre las ideas esenciales que serán abordadas por el teleprofesor y las actividades que se deben realizar en el estudio independiente. El epígrafe II contiene 107 ejercicios y problemas, organizados por teleclases, para el trabajo independiente.

Con esta finalidad se brindan orientaciones para la etapa previa, durante y posterior a la visualización de cada una de las teleclases. Las orientaciones para la etapa previa persiguen orientar hacia el objetivo, así como asegurar el nivel de partida necesario para la visualización; las correspondientes a la etapa siguiente pretenden dar sugerencias útiles para la comprensión del contenido de la propia teleclase; y por último, las que se ofrecen para la etapa posterior, están dirigidas a garantizar la consolidación ulterior de la materia que se ha reactivado y reforzar sus relaciones con lo estudiado anteriormente.

De importancia crucial en el desarrollo de este curso es que los estudiantes traten de resolver los ejercicios que se les proponen por diferentes vías, que analicen las más racionales, valoren lo que les ha sido útil en cada ocasión, los mecanismos que tienen para controlar su trabajo, presten suma atención al rigor y adecuada redacción de las fundamentaciones, y traten de no cometer faltas de ortografía. En relación con las fundamentaciones se insiste en la necesidad de que se tome nota de ellas, pues en las teleclases se ofrecen, pero no siempre se escriben por razones de espacio en la lámina.

En lo adelante se utilizan las siglas LT para indicar el libro de texto de Matemática. Los ejercicios de las teleclases y los que se proponen para el trabajo independiente- han sido seleccionados de diversos materiales enviados por profesores que participan en la preparación de los estudiantes para los exámenes de ingreso. La mayoría han sido tomados de las clases desarrolladas por los teleprofesores Francisco Rodríguez Meneses, Richard Naredo Castellanos y Jacinto Hernández Ávalos, y la actuación como asesora de Mercedes Leal Acosta.

A mediados del curso se recomienda tratar de realizar total o parcialmente los proyectos de pruebas que aparecen en Hernández Ávalos, Jacinto (2006): *¿Cómo estás en Matemática? Ejercicios complementarios de Matemática, para la profundización en la enseñanza preuniversitaria*, y comprobar la corrección de las respuestas con ayuda del correspondiente solucionario.

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

I) Ejercicios y problemas tratados en las teleclases

Teleclase 1: Funciones y ecuaciones

En la introducción de la clase el teleprofesor enfatiza en el concepto función como una correspondencia unívoca entre dos conjuntos y como un conjunto de pares ordenados en los cuales no se repite la primera componente, a la vez que recuerda las formas de representación de una función.

Se presentan dos ejercicios que requieren:

- Reconocer las propiedades de una función a partir de su gráfico (elementos que pertenecen a la función, imagen, ceros, signos y monotonía).
- Reconocer una función a partir de la ecuación que la caracteriza.
- Analizar el dominio de definición, ceros y el punto de intersección del gráfico de la función con el eje de las ordenadas a partir de la ecuación de una función.
- Hallar valores funcionales, es decir, evaluar la ecuación de una función en un argumento cualquiera para hallar su imagen.
- Conocer diferentes formas de representación de una función (ecuación, gráfica y tabular) y transferir propiedades de una forma a otra.

Es importante que antes de la teleclase se realicen los ejercicios 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 10, epígrafe 1, LT 12 , segunda parte, páginas 1-10, con el fin de sistematizar las operaciones de cálculo en R.

Del material complementario se deben realizar los ejercicios:

- 1 – 5 para repasar los dominios numéricos.
- 6 y 7 para practicar el cálculo numérico.
- 8 – 10 para repasar el concepto de función.

  Posterior a la teleclase, en el trabajo independiente, se deben realizar los ejercicios 11 – 14 del epígrafe II de este material. Estos ejercicios dan la posibilidad de trabajar algunas propiedades de una función cuando se conoce su ecuación.

La clase, con el apoyo de la teleclase y el trabajo independiente que realicen los estudiantes, debe permitir el conocimiento de los conceptos de función, ecuación, monotonía, dominio, imagen, signos, valores funcionales, entre otros. Reconocer las propiedades de las funciones en las diferentes formas de representaciones y el significado geométrico de los ceros, signos y la monotonía de una función.

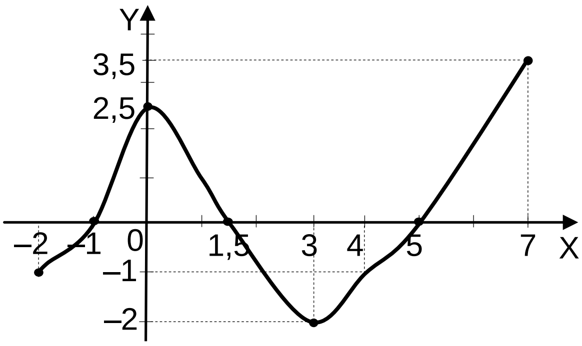
Es igualmente importante la realización de algunos procedimientos como:

- Determinar si un par ordenado pertenece o no a una función dada por una ecuación o mediante la representación gráfica.
- Hallar dominio, imagen, ceros y el signo de una función.

  Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

1. El siguiente gráfico corresponde a una función real $\boldsymbol{f}$ definida en el intervalo $\boldsymbol{I} = [-2;7]$.



1.1) Completa el espacio en blanco con los signos $\in$ o $\notin$, según convenga en cada caso.

a) $(7;3{,}5)$ ___ f b) $(3;2)$ ___ f

c) $(3;-2)$ ___ f d) $(0;2{,}5)$ ___ f

1.2) Clasifique las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escriba V o F en la línea dada. En el caso de las falsas, argumente por qué.

a) ___ La función $\boldsymbol{f}$ es creciente en todo su dominio.

b) ___ Si $1{,}5 < x < 5$, la función $\boldsymbol{f}$ toma valores negativos.

c) ___ S $x \in (-1;1{,}5) \cup (5;7)$, entonces $f(x) > 0$.

d) ___ La función $\boldsymbol{f}$ no tiene ceros.

e) ___ La función $\boldsymbol{f}$ tiene tres ceros en el intervalo I.

f) ___ No existe un número real $\boldsymbol{y}$, tal que $(1;\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{f}$

1.3) Selecciona la respuesta correcta en cada caso.

1.3.1) El conjunto imagen de $\boldsymbol{f}$ en el intervalo dado es:

a)__ $-2 \le y \le 2{,}5$ b) __ $-2 \le y \le 5$ c)__ $-2 \le y \le 3{,}5$ d)__ $-1 \le y \le 3{,}5$

1.3.2) En el intervalo $J = (3;7)$, la función $\boldsymbol{f}$ es:

a) __ no negativa b) __ creciente c)__ positiva d)__ decreciente

1.3.3) Si $A = \dfrac{f(0) \cdot [f(3) - f(4)]}{f(1) + f(5)}$ entonces:

a)__ A no está definido b)__ $A \approx -2{,}5$ c)__ $A = 0$ d)__ no se puede calcular

2. La función g está definida por la expresión $g(x) = \dfrac{log_2(x+2)}{2^{5-x} - 4}$ en un subconjunto de los números reales.

2,1) Determina cuáles de los siguientes pares ordenados pertenecen a la función g.

a) $A\left(6;-\frac{6}{7}\right)$ b) $B\left(-1;\frac{1}{60}\right)$ c) $C\left(0;\frac{1}{28}\right)$ d) $D\left(2;\frac{1}{2}\right)$ e) $E(-2;0)$ f) $F(3;1)$

2.2) Halla las coordenadas del punto donde el gráfico de g corta el eje de las ordenadas.

2.3) Calcula los ceros de la función g.

2.4) Halla el dominio de definición de la función g.

Teleclase 2: Funciones y ecuaciones.

En la introducción de la clase el teleprofesor reitera el concepto de función, las diferentes formas de representación y las propiedades que deben ser estudiadas.

Presenta dos ejercicios en los cuales se trabaja lo siguiente:

- La forma que tiene el gráfico de una función (rectas, parábolas).
- Cómo obtener el gráfico de una función cuya ecuación es $y=f(x+d)+e$ a partir del gráfico de $y=f(x)$.
- Propiedades de las funciones lineales y cuadráticas.
- Resolución de ecuaciones lineales, cuadráticas y fraccionarias.

Antes de la teleclase se deben revisar los ejemplos 1 – 5, relacionados con las operaciones con variables, la descomposición factorial y el trabajo con fracciones algebraicas. Epígrafe 2, LT 12 segunda parte, Págs. 15 – 19. Es necesario estudiar los ejemplos 1 y 2 (a y b) de las páginas 27 a la 32, en el LT 12, segunda parte.

Del Manual de ejercicios para la educación media superior, primera parte, se pueden estudiar los ejemplos 12 – 17, Págs. 91 – 95 y realizar los ejercicios del epígrafe 2.2, Págs. 96 - 100

El desarrollo de la clase, con el apoyo de la teleclase y el trabajo independiente que realicen los estudiantes, debe lograr:

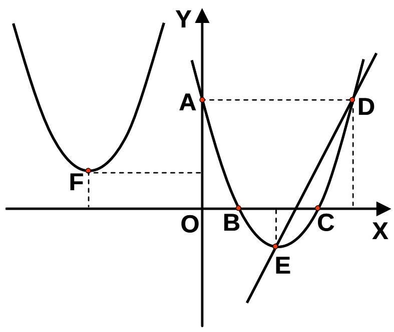
- Elaborar una sucesión de pasos para los procedimientos de resolución de las ecuaciones lineales, cuadráticas y fraccionarias.
- Analizar si las ecuaciones cuadráticas pueden resolverse mediante la descomposición factorial y recurrir a la fórmula general de resolución en caso contrario.
- Determinar el dominio de definición de las ecuaciones fraccionarias desde un inicio, para que al eliminar denominadores multiplicando por un término que puede hacerse cero para determinados valores de la variable, no se introduzcan raíces extrañas como resultado de esta transformación no equivalente.
- Comprender el procedimiento algebraico para calcular los ceros de una función y el significado geométrico que éstos tienen.

- Cómo obtener el gráfico de una función cuya ecuación es $y = f(x+d)+e$ a partir del gráfico de $y = f(x)$.

Durante el estudio independiente se deben resolver las ecuaciones orientadas por el teleprofesor y realizar los ejercicios 2, 3, 4 del epígrafe 3, páginas 32 a 34 del LT 12, segunda parte. Es importante realizar además los ejercicios 15, 16, 17 y 18 del epígrafe II en este material.

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. La figura muestra los gráficos de tres funciones reales f, g y h, cuyas ecuaciones son $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $g(x) = (x+3)^2 + 1$ y $h(x) = 2x - 5$, Los puntos E y F que aparecen marcados son los vértices de las parábolas representadas.



1.1) Haz corresponder cada gráfico con su ecuación

1.2) Halla:

a) Las coordenadas de los puntos A, B, C, D, E y F

b) La abscisa de los puntos de intersección entre los gráficos de f y h.

c) Los ceros de las tres funciones.

d) Los signos de la función f

e) La imagen de cada una de las funciones.

2. ¿Determina cuántas soluciones reales tiene cada una de las siguientes ecuaciones, y cuáles de ellas pertenecen al dominio indicado?

a) $\frac{4\boldsymbol{x}-1}{2} = 2-(5-\boldsymbol{x})$ $\quad (x \in N)$ $\qquad$ b) $\boldsymbol{x}(-1+2\boldsymbol{x}) = -(4\boldsymbol{x}-2)$ $\quad (x \in Z)$

c) $\boldsymbol{x}^2(\boldsymbol{x}-3) = -(\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{x}^2)$ $\quad (x \in \mathrm{Q})$ $\qquad$ d) $\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}+3} = 3 - \frac{\boldsymbol{x}+6}{\boldsymbol{x}+3}$ $\quad (x \in \mathrm{R})$

e) $\boldsymbol{x} - \frac{2\boldsymbol{x}-3}{\boldsymbol{x}-2} = -\frac{1}{\boldsymbol{x}-2}$ $\quad (x \in \mathrm{R})$

Teleclase 3: Funciones y ecuaciones

La teleclase presenta un primer ejercicio donde se da el gráfico de la función seno en un intervalo y se trabaja con sus propiedades, y en el segundo ejercicio, es necesario reconocer la ecuación que corresponde a un gráfico dado. En ambos problemas es necesario trabajar con las ecuaciones de las funciones y calcular valores funcionales.

Antes de la teleclase se recomienda seguir trabajando con ejercicios de cálculo numérico y propiedades generales de las funciones (Puntos 16 y 31 del memento, LT

12 segunda parte). Puede consultarse también lo referente a las propiedades y gráficos de las funciones trigonométricas en los epígrafes 11 y 12 del LT 10, páginas 200 a 209.

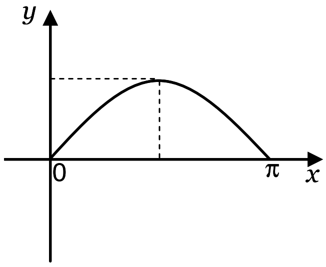
Durante el desarrollo de la teleclase es importante que el estudiante se concentre en qué se entiende por dominio e imagen de una función y su interpretación gráfica. De igual forma es preciso que analice la influencia de los parámetros reales d y e en la representación grafica de una función del tipo $y = f(x+d)+e$ con respecto al gráfico de $y = f(x)$ (traslaciones en la dirección de los ejes de coordenadas).

Después de la teleclase se recomienda analizar los ejemplos 1 y 2 del LT 10, segunda parte, página 202, que ofrecen la posibilidad de sistematizar y fijar algunas propiedades de la función seno. Además se sugiere resolver el ejercicio 8 b) c) h), j), p), z), página 35 del LT 12, segunda parte.

Realizar los ejercicios 19 y 20 del epígrafe II de este material complementario.

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. El gráfico corresponde a la función definida por la ecuación $y = f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $0 \le x \le \pi$.



1.1) Completa los espacios en blanco de forma tal que obtengas una proposición verdadera:

a) La imagen de la función *f* es: __________________.

b) El mayor valor que alcanza la función *f*, en el intervalo dado, es y_0 =____ en x_0 =____ .

c) La función *f* crece en el intervalo ______________ y decrece en ____________

1.2) Traza el gráfico de la función *h*, definida por $h(x) = \cos x \quad (0 \le x \le \pi)$, en el mismo sistema de coordenadas.

1.3) Marca con "X" la respuesta que consideres correcta.

a) ___ Los gráficos de las funciones *f* y *h* se cortan en el punto $Q\left(\frac{\pi}{4}; \frac{1}{2}\right)$

b) ___ Los gráficos de las funciones *f* y *h* se cortan cuando $x = \frac{\pi}{6}$

c) ___ La ordenada del punto de intersección de los gráficos de las funciones *f* y *h* es $y = \frac{\pi}{6}$.

d) ___ El punto de intersección de ambos gráficos es $P\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

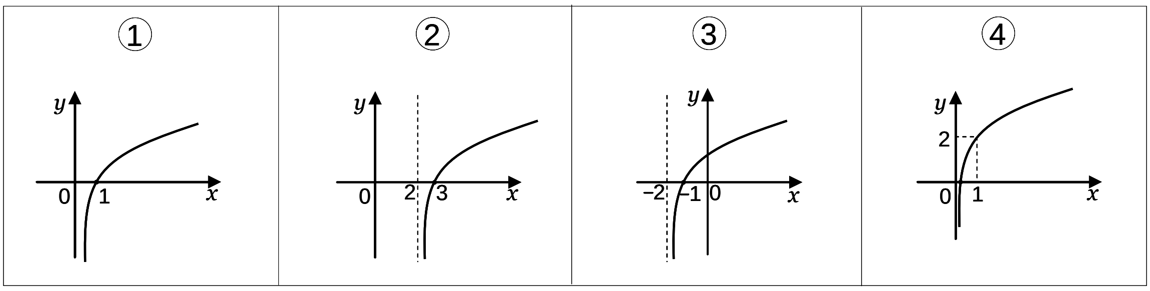
1.4) Resuelve la siguiente ecuación en el intervalo dado para la función f :

$$\sqrt{f(x)+1}-2f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$$

2. Cada uno de los siguientes gráficos corresponde a una función cuya ecuación tiene la forma $y=log(x+d)+e$ (*d* y *e* son parámetros reales)

8.1) Identifica el que corresponde a la función *g*, definida por $g(x)=log(x+2)$.

8.2) Encuentra todos los valores reales de *t*, para los cuales se cumple que $g(t+1)+g(t)=g(4)$.



8.3) Resuelve la ecuación $\sqrt{g(x)+1}=1-\sqrt{g(x)}$.

Teleclase 4: Funciones y ecuaciones

En la teleclase se resuelve un ejercicio relativo a función modular de la forma $y=|x+d|+e$, pero la mayor parte de ella está dirigida a la resolución de ecuaciones que requieren del dominio de las propiedades de las potencias y de los logaritmos.

Previo a la teleclase se sugiere trabajar con la representación gráfica de la función $y=|x|$ y determinar sus propiedades. Además se deben estudiar los puntos 2 y 3 del memento, página 143 del LT 12, parte 2 y resolver los ejercicios 14 a), b), g), l) de la página 37 del LT 12, segunda parte.

En el transcurso de la teleclase el estudiante debe comprender que el procedimiento para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas se basa en la inyectividad de las correspondientes funciones, es decir, $f(a)=f(b)$ si y solo si $a=b$. Se debe observar que estas ecuaciones conducen a su vez a ecuaciones lineales, cuadráticas, fraccionarias o con radicales.

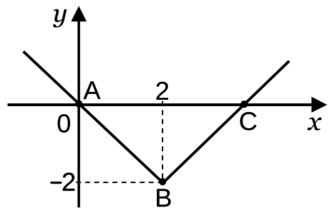
Después de la teleclase se sugiere resolver los ejercicios propuestos en esta para el trabajo independiente, aprovechando todas las vías de solución y sistematizando las propiedades de las potencias y los logaritmos.

Se recomienda (**Mat.11, Ejercicios 2c), d), 3b), g) y 9 a), g) h), 13 e), k), l) Págs.49-51**)

Resolver los ejercicios 21 y 22 del epígrafe II de este material complementario.

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:



1. El gráfico que se muestra en la figura corresponde a una función g definida en R por una ecuación de la forma $y = g(x) = |x + d| + e$ (*d* y *e* son parámetros reales).

1.1) La ecuación correspondiente es:

a) ___ $y = |x-2| + 2$ b) ___ $y = |x+2| - 2$

c) ___ $y = |x-2| - 2$ d)___ $y = |x+2| + 2$

1.2) Selecciona la respuesta correcta.

a) ___ El ΔABC es isósceles, obtusángulo y tiene área $A = 4{,}0\,u^2$.

b) ___ El ΔABC es equilátero, rectángulo en B y tiene área $A = 8{,}0\,u^2$.

c) ___ El ΔABC es equilátero, $\angle$ABC es agudo y tiene área $A = 2{,}0\,u^2$.

d) ___ El ΔABC es isósceles, rectángulo en B y tiene área $A = 4{,}0\,u^2$.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{2^x - 7} = \sqrt{2^x} - 1$ b) $9^{\sqrt{6+a}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-1} \cdot \left(3^{\sqrt{a+1}}\right)^2$ c) $\frac{1}{3} \cdot 9^{n+10} - 1 = 2 \cdot 3^{n+9}$

3. Halla el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos^2 x - \operatorname{sen} x} = 2^{\operatorname{sen}^2 x}$ $(2\pi \le x \le 3\pi)$

b) $25^{\log_3^2 x} = 5^{\log_3 x^2}$ c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_2^2 x + 1} = \left(\frac{16}{9}\right)^{2 - \log_2 x^3}$

Teleclase 5: Funciones y ecuaciones

En la teleclase se continúa el trabajo con las propiedades de las funciones reales. Para comprender las actividades que se orientan es importante haber resumido las propiedades de las funciones definidas mediante $y = \frac{k}{x}$ (k es un parámetro real no nulo) y las propiedades de las funciones exponenciales de ecuación $y = a^x$ (a es un parámetro real positivo). Además se debe revisar el resumen de las funciones cuadráticas realizado en clases anteriores.

Las propiedades de las funciones logarítmicas se deben haber consolidado a través de los ejercicios que se dejaron para el estudio independiente de la teleclase anterior. Para comprender cuándo una función posee inversa debe reactivarse el concepto de función inyectiva. En el epígrafe 14, páginas 132 a 134 del LT 10.se explica la existencia de la inversa de una función y cómo obtenerla algebraicamente.

Durante el desarrollo de la teleclase debe continuar profundizando en:

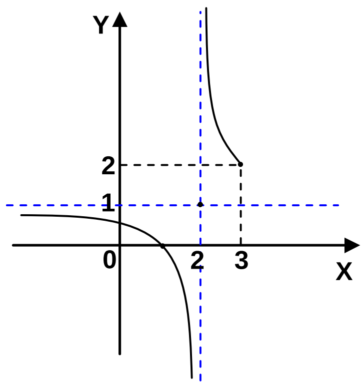
- El efecto de las traslaciones en la dirección de los ejes de coordenadas en el gráfico de una función $y = f(x)$ para obtener el gráfico de una que tiene como ecuación $y = f(x+d)+e$.
- Reconocer las propiedades de una función a partir de su gráfico (dominio de definición, imagen, ceros, signos, monotonía, inyectividad y la existencia de la inversa), y de manera analítica, utilizando la ecuación que la define.
- El procedimiento algebraico para hallar la inversa de una función, asegurada su existencia.

Se puede realizar el ejercicio 2 d), e) y f), página 135 del LT 10.

<u>Resolver los ejercicios 23, 24 y 25 del epígrafe II de este material complementario</u>

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. Sean las funciones f y g definidas por las ecuaciones $f(x) = \dfrac{1}{x+d} + e$ (d y e son parámetros reales) y $g(x) = x^2 - 4x + 5$.



1.1) Determina el valor de los parámetros d y e si la siguiente figura muestra el gráfico de f en el intervalo $I = (-\infty;3]$.

1.2) Halla el dominio de definición y los ceros de la función f .

1.3) Selecciona la respuesta correcta:

1.3.1) El conjunto imagen de la función f es:

a) ___ $A = \{y \in R : y \in (-\infty;1) \cup (2;+\infty)\}$

b) ___ $B = \{y \in R : y \neq 1\}$

c) ___ $C = \{y \in R : y < 1 \;\; ó \;\; y \geq 2\}$ d) ___ $D = \{y \in R : y \neq 2\}$

1.3.2) La función g:

a) ___ Tiene dos ceros. b)___ No tiene ceros.

c) ___ Tiene un único cero porque el discriminante de la ecuación que la define es igual a cero.

d) ___ El gráfico de la función g no corta al eje de las ordenadas.

1.4) Escribe la ecuación de la función g en la forma $y=(x+d)^2+e$.

1.5) Traza el gráfico de g en el mismo sistema de coordenadas que está representada la función f.

1.6) Comprueba que los gráficos de f y g se cortan en un único punto. Halla sus coordenadas.

2. Sea la función h definida en R por la ecuación es $h(x)=2^{x+3}-1$.

2.1) Complete los espacios en blanco de forma tal que obtengas una proposición verdadera:

a) La imagen de la función h es _________________.

b) La función h tiene un cero en x_o =___, y su gráfico corta al eje de las ordenadas en el punto de ordenada y_o =___.

c) Si para cualesquiera sean a y b, elementos del dominio de h, se cumple que $h(a)=h(b)$ si y solo si $a=b$, entonces la función h es_________________.

d) La ecuación de la función inversa de la función h es ___________________.

e) Si el dominio de definición de h se restringe al conjunto de los números reales no negativos, entonces el conjunto imagen de la nueva función es: _________________

2.2) Halla todos los valores reales de x para los cuales se cumple que $[h(x)]^2=h(x)$.

Teleclase 6: Funciones y ecuaciones

Antes de la teleclase es necesario repasar:

Definición y propiedades de los logaritmos: (**Mat.12, Parte 2, Memento punto 3. Pág. 143**)

Cómo obtener el gráfico de una función de la forma $y=log_a(x+d)+e$ a partir del gráfico de $y=log_a x$ (**Mat.11, Ejercicio 8*, Pág. 47 y 48. Ejercicio 25*, Pág.56**)

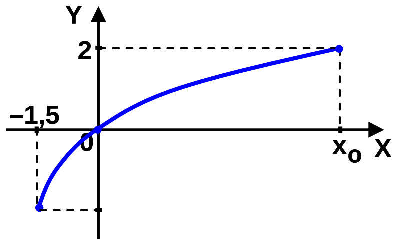
Revisar los conceptos de inyectividad e inversa de una función. Repasar los procedimientos para obtener la inversa de una función logarítmica y la composición de dos funciones. (**Mat.10, Epígrafe 12. Págs. 127-137 y Mat. 11, Epígrafe 2. Págs. 183-189**)

Resolver ecuaciones exponenciales, logarítmicas y las que intervienen varias operaciones. (**Mat.12, Parte 2, Ejemplo 2 c) y d). Pág. 29. Ejercicio 14, Pág. 37**)

Resolver los ejercicios 26, 27 y 28 del epígrafe II de este material complementario

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. El gráfico de la función $\boldsymbol{f}$ contiene el origen de coordenadas. Dicha función $\boldsymbol{f}$ está definida por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = log_2(\boldsymbol{x}+2)+\boldsymbol{b}$ (b es un parámetro real) en el intervalo $\boldsymbol{I} = [-1{,}5; \boldsymbol{x_o}]$.



1.1) Halla

a) La ecuación de la función $\boldsymbol{f}$.

b) La imagen de la función $\boldsymbol{f}$ en el intervalo $\boldsymbol{I}$ determinado.

c) La ecuación de la inversa de $\boldsymbol{f}$ en el intervalo $\boldsymbol{I}$.

d) El dominio y la imagen de la función inversa de $\boldsymbol{f}$, definida en el intervalo $\boldsymbol{I}$.

1.2) Completa el gráfico de la función que se obtiene de $\boldsymbol{f}$ mediante una prolongación de esta a todo R.

1.3) Comprueba que existe un único valor real de la variable $\boldsymbol{x}$ para el cual se cumple que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}-3)+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$.

1.4) Halla $(fog)_{(x)}$, conociendo que $g(x) = 2^x - 1$.

2. Halla el conjunto solución de las siguientes ecuaciones.

a) $2\,log\sqrt{2x-3} = log\left(\sqrt{x}+3\right)$

b) $1 + log_{\boldsymbol{x}+1}\left(\boldsymbol{x}^3+1\right) - \left(log_2\sqrt[3]{2}\right)^{-1} = 0$

c) $log_2 3^{\boldsymbol{x}+1} + log_{0{,}5} 3^{\boldsymbol{x}^2-2} = log_2 27$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{log_2\sqrt{3x+4}} = 0{,}04^{log_2\sqrt{x}}$

Teleclase 7: Resolución de sistemas de ecuaciones

En la teleclase se comenta sobre el concepto de sistema de ecuaciones, los diferentes tipos de sistemas de ecuaciones estudiados y los procedimientos para resolverlos. Se presentan tres sistemas de ecuaciones donde es necesario el trabajo con las propiedades de las potencias y los logaritmos y después resolver sistemas de dos ecuaciones con dos variables y de tres ecuaciones con tres variables.

Antes de la teleclase se sugiere repasar los procedimientos para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres variables. (**Mat.12, Parte 2, Epígrafe 4. Ejemplos 1, 2 y 3 Págs. 42-50**)

Durante la teleclase, deberá atender a:

- Procedimiento para la resolución de sistemas de ecuaciones con dos y tres variables.
- Trasformaciones equivalentes que se pueden realizar para obtener un sistema de ecuaciones equivalente más simple.
- Estrategia de trabajo para garantizar el orden adecuado en la aplicación del algoritmo de resolución de los sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, de modo de tener en

cuenta en cada momento con cuál sistema de tres ecuaciones transformado se está trabajando.

Después de la teleclase se recomienda realizar los ejercicios orientados por el teleprofesor y realizar otras actividades como:

(**Mat.12, Parte 2, Ejercicios 3 y 4 Pág. 52**)

(**Mat.11, Ejercicios 16, Pág. 157; Ejercicios 14, 15 y 18, Pág. 146 ; Ejercicios 9 y 10, Pág. 132 ; Ejercicios 12-15, Pág. 122**)

Resolver el ejercicio 29 del epígrafe II de este material complementario

Se trata de hallar el conjunto solución de diferentes tipos de sistemas de ecuaciones. En este caso es importante profundizar en los métodos que se pueden utilizar para resolverlos.

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. Dados los siguientes sistemas de ecuaciones:

(A) $\begin{cases} xy=1 \\ \sqrt{2(x+y)-1}=2 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 25^{a}=5\cdot 5^{b+2} \\ log_2(a+b)-1=log_2\left(2-\frac{b}{2}\right) \end{cases}$ (C) $\begin{cases} \frac{z}{2}=x-y \\ \frac{x+2(y-2)+1}{z+4}=1 \\ 2^{x+z}=\left(\frac{1}{2}\right)^{y-1} \end{cases}$

1,1) Comprueba que el par ordenado $\left(\frac{1}{2};2\right)$ satisface el sistema de ecuaciones (A).

1.2) Cuántos pares ordenados satisfacen el sistema de ecuaciones (A). Resuélvelo para comprobar tu respuesta.

1.3) ¿Por qué la terna ordenada de la forma $(a;b;-4)$ no puede ser una solución del sistema de ecuaciones (C) para ningún valor real de a y de b?

1.4) ¿Puede ser solución del sistema (B) un par ordenado $(a;b)$, donde los valores de a y b sean números reales opuestos? Fundamenta tu respuesta.

1.5) Halla el conjunto solución de los sistemas de ecuaciones (B) y (C).

Teleclase 8: Resolución de problemas

En la teleclase se presentan tres problemas para reflexionar sobre los procedimientos y estrategias que se deben seguir para el trabajo con este tipo de ejercicio matemático. Se hará énfasis en de terminados momentos que son necesario en la realización de un problema:

Comprender la situación que se plantea

Determinar los datos y lo que se quiere hallar.

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

Declarar las variables si es necesario

Plantear el modelo matemático que permite solucionar el problema.

Resolver el problema partiendo del modelo planteado, comprobar y responder.

Antes de la teleleclas es importante revisar:(**Mat.10, Ejemplos 1 y 2 Págs. 52 y 53. Ejercicios 6, 11 y 17. Pág.56**) y realizar: (**Mat.12, Parte 2, Ejercicios 15, 18 y 20, Págs. 10 y 11**)

Durante el estudio independiente se deben realizar:

(**Mat.12, Parte 2, Ejercicios 24 al 30, Pág. 12**)

Resolver los ejercicios 30 y 35 del epígrafe II de este material complementario

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. En un almacén hay 24 recipientes entre latas y frascos. Usando todos los frascos se pueden envasar 35 L de pintura y esta misma cantidad se puede envasar usando todas las latas. Todas las latas tiene igual capacidad, en este caso 1 L más que los frascos, que también son iguales. ¿Cuántos recipientes de cada tipo hay en el almacén y cual es la capacidad correspondiente?
2. Una granja sembró $35{,}6\,ha$ entre hortalizas y viandas. Por causa de las plagas se afectaron $6{,}0\,ha$ de hortalizas, las cuales fueron devastadas y utilizadas para incrementar las tierras dedicadas a viandas y pastos en 4,0 y 2,0 hectáreas respectivamente. Ahora, en la granja, las tierras dedicadas a viandas duplican a las sembradas de hortalizas, y los pastos se incrementaron en 1,67%. ¿Qué cantidad de tierra había dedicado la cooperativa a hortalizas, viandas y pastos antes de la afectación por las plagas?
3. Dos grupos de estudiantes de un IPUEC están recogiendo papas. Al inicio de la jornada se le entregó a cada uno cierta cantidad de sacos vacíos. La tercera parte de los sacos entregados al grupo B excede en 4 a la cuarta parte de los entregados al grupo A. Al terminar la sesión de campo entre los dos grupos lograron llenar todos los sacos. El grupo A llenó 30 sacos menos que los que le habían sido entregados y la cantidad de sacos que logró llenar el grupo B excede en dos al duplo de los que llenó el grupo A. ¿Cuántos sacos vacíos se entregaron al inicio de la jornada a cada grupo?

Teleclase 9: Resolución de problemas

En la teleclase se presentan dos problemas que se resuelven completamente.

Antes de la teleclase se sugiere analizar el ejemplo 4 y resolver el ejercicio 19 (**Mat.10, Pág.57**) para comprender que son problemas análogos en situaciones reales diferentes.

Durante la teleclase se debe profundizar en:

- La importancia que tiene la construcción de un modelo lineal en el caso del segundo problema, y una tabla en el caso de los tres problemas en virtud de que se plantean dos variables que varían una con respecto a otra.
- El hecho de que si se conoce el tiempo qué demora un proceso es importante determinar qué parte del proceso se realiza en la unidad de tiempo; esta es la estrategia que se conoce como reducir a la unidad.

Tanto en esta teleclase como en la siguiente se sugiere que se resuelvan los problemas, siempre que sea posible, por vía aritmética y algebraica. Después de la teleclase se sugiere resolver los problemas propuestos para el estudio independiente (**Mat.10, Ejemplo 5, Pág.55, Ejercicios 22 y 23, Pág.57**).

Resolver los ejercicios 36-41 del epígrafe II de este material complementario

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. Un hombre y su hijo, trabajando juntos, pueden hacer una obra en 12 días. Trabajando separadamente, el hijo tardaría 7 días más que el padre en hacer él solo la obra. ¿Cuánto tiempo tardaría cada uno trabajando separadamente?
2. Dos amigos están a 300 m de distancia. Si corren el uno hacia el otro, se encuentran en 20 s; pero, si corren en el mismo sentido, el más rápido alcanza al otro en 5 min. Halla la velocidad de cada uno.
3. Una piscina se puede llenar por una llave en 4 horas, por otra llave en 3 horas y se puede vaciar por un desagüe en 6 horas. Si se abren simultáneamente las dos llaves y el desagüe, ¿en qué tiempo se llenará la piscina?

Teleclase 10: Resolución de problemas

En la teleclase se resuelven completamente dos problemas que se modelan mediante sistemas de ecuaciones y el tercero se orientar para el estudio independiente.

Antes de la teleclase se sugiere resolver el ejercicio 1 a), g), j), el ejercicio 2 a), g) y el ejercicio 3a), c), h) del epígrafe 4, páginas. 51 a 52 del LT12, segunda parte. Esto les permite repasar la resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos variables, de sistemas de tres ecuaciones con tres variables y de sistemas cuadráticos.

Durante la teleclase se deben tener en cuenta los aspectos señalados para la teleclase anterior.

Después se recomienda resolver el problema propuesto en la teleclase para el estudio independiente.

Seleccionar y resolver problemas del 11, 12, 15, 19 de las páginas 54 y 55 del LT 12, segunda parte.

Resolver los ejercicios 42- 44 del epígrafe II de este material complementario

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. El tercer año de una facultad de Ciencias Médicas está compuesto por estudiantes cubanos y extranjeros. La tercera parte de los cubanos y la mitad de los extranjeros

suman 108 estudiantes, se sabe que el duplo de los cubanos excede en 16 a los extranjeros.

a) ¿Cuántos jóvenes estudian en dicha facultad?

b) ¿Cuántos son latinoamericanos si representan el 65% de los extranjeros?

2. La suma de las áreas de un rectángulo y un cuadrado es 60 m^2. Si el lado del cuadrado es igual al ancho del rectángulo, y el duplo del lado del cuadrado y el largo del rectángulo, suman 17 m, ¿cuál es el área de cada figura?
3. En una competencia ortográfica el triplo de cada puntuación alcanzada por dos estudiantes A y B suma 99,9 puntos. Si los obtenidos por el alumno A representan el 85% de los obtenidos por el alumno B, ¿qué porcentaje obtuvo cada alumno si el 100% es 20 puntos?

Teleclase 11: Resolución de inecuaciones

En la teleclase se puede apreciar la aplicación del procedimiento para la resolución de inecuaciones a la determinación de intervalos dónde los valores de una función son mayores, menores o iguales que los valores de otra.

Previo a la visualización de esta teleclase el estudiante debe estudiar en las páginas 56 a 58 del LT 12, segunda parte o 59 a la 60 del LT 10 el procedimiento para resolver inecuaciones lineales.

Durante la teleclase se debe reflexionar sobre:

- Qué es una inecuación y qué tipo de inecuaciones se resuelven en la teleclase.
- El procedimiento para resolver inecuaciones lineales a través de ecuaciones equivalente, lo cual se hace despejando la variable, y su relación con lo aprendido sobre los ceros de las funciones lineales.
- La representación gráfica del conjunto solución de una inecuación.
- El hecho de que el análisis de los signos de una función lineal de la forma $y = mx + n$ conduce a resolver una inecuación.

En el estudio independiente posterior a la teleclase se debe aplicar el procedimiento estudiado a la determinación de los intervalos dónde están definidas las funciones que se indican. Lo esencial es determinar en los incisos a) y b) las condiciones que deben cumplir las expresiones bajo el símbolo de radical para que la raíz esté definida, o en el caso del inciso c), las condiciones que deben satisfacer simultáneamente la base y el argumento de la función logaritmo. Se recomienda además realizar el ejercicio 1 del epígrafe 5 de la segunda parte del LT 12 o el 1 de la página 65 del LT 10, y el 23 de la página 128 del Manual de ejercicios de Matemática para la Educación Media Superior, primera parte.

Resolver los ejercicios 45 - 47 del epígrafe II de este material complementario

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. Halla el conjunto solución de las siguientes inecuaciones

a) $-2(1{,}7x-1)\geq 3(1-x)$ b) $4-6\left(3-\frac{5x}{3}\right)<9\left(2x-\frac{2}{9}\right)$

c) $(x-1)(x+1)-2(x-5)>-x(5-x)$ d) $\frac{x-(3-2x)}{-6}-1\leq -\frac{3x}{2}$

2. Sean las funciones *f* y *g* definidas por: $f(x)=\frac{1}{4}x-0{,}4$ y $g(x)=0{,}1+0{,}5x$

Halla los valores reales de *x* para los cuales se cumple que: $f(x)\geq g(x)$

3. Halla el dominio de definición en cada caso:

a) $f(x)=\sqrt{10-2x}$ b) $g(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{x}$ c) $\mathrm{h(x)}=\log_{x-1}x$

Teleclase 12: Resolución de inecuaciones

En el primer ejercicio se determinan los intervalos para los cuales los valores de una función son menores que los de otra. La inecuación que se obtiene se resuelve completamente en la teleclase.

En el segundo ejercicio se plantean dos inecuaciones fraccionarias; la primera se resuelve completamente en la teleclase y la segunda se orienta para el estudio independiente.

Previo a la visualización de esta teleclase el estudiante deberá estudiar en las páginas 58 a 63 del LT 12, segunda parte o 61 a la 66 del LT 10 el procedimiento para resolver inecuaciones cuadráticas y fraccionarias.

Durante la teleclase deberá elaborar una sucesión de pasos para el algoritmo de resolución de las inecuaciones cuadráticas, relacionando lo que se explica con lo aprendido sobre los ceros de las funciones cuadráticas. De igual manera debe elaborar una sucesión de pasos para el algoritmo de resolución de las inecuaciones fraccionarias.

Para realizar los ejercicios del estudio independiente deberá aplicar lo estudiado sobre la factorización de polinomios de grado mayor que 2. Muy importante es que vuelva a leer lo que se explica en la página 60 de la segunda parte del LT de grado 12. Además puede realizar los ejercicios 2h), j) y 3 g),h),l) de este propio libro.

Resolver los ejercicios 48 – 51 del epígrafe II de este material complementario.

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. Dadas las funciones *f* y *g*, definidas en el conjunto de los números reales por las ecuaciones $f(x)=x^2-10x+21$ y $g(x)=2x-11$. Halla los valores reales de la variable *x* para los cuales la parábola está por debajo de la recta.

2. Resuelve las siguientes inecuaciones

a) $\dfrac{x^3+2x^2}{9} > x+2$ b) $\dfrac{7x-1}{3x-1} \le x+3$ c) $\dfrac{3}{x-3} \le \dfrac{1}{x^2-3x}$

Teleclase 13: Resolución de inecuaciones

Inicialmente se trabaja con ejemplos de inecuaciones fraccionarias que se resuelven completamente en la teleclase.

Se propone un ejercicio para el trabajo independiente que trata de la determinación de los intervalos donde los valores de una función son mayores o iguales que los de otra.

Finalmente se resuelve una inecuación fraccionaria que requiere de varias transformaciones algebraicas.

El estudio independiente realizado en la clase anterior le servirá de base para comprender los ejercicios sobre inecuaciones fraccionarias que se explican en esta teleclase.

Durante la visualización deberá prestar atención a los diferentes casos especiales que se presentan, a saber:

Cuando no existen ceros, bien en el numerador o bien en el denominador.

Cuando numerador y denominador tienen ceros comunes.

Cuando uno de los ceros, bien del numerador o bien del denominador, es un cero doble, o en general, de multiplicidad par.

Además deberá tratar que los signos de los coeficientes de los términos de mayor grado en el numerador y el denominador sean positivos, multiplicando por (–1) cuando sea necesario y realizando el correspondiente cambio de sentido de la desigualdad, tal como ocurre en el ejercicio c) de la teleclase.

Posterior a la teleclase se recomienda realizar los ejercicios 5 y 6, del epígrafe 5 del LT de grado 12, segunda parte, página 65.

Resolver los ejercicios 52 y 53 del epígrafe II de este material complementario.

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. Resuelve la inecuación $\dfrac{2x^2-3x-27}{x^2-7x} \ge 0$.
2. Halla el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

   a) $\dfrac{x^2+2}{x+7} < 0$ b) $\dfrac{x^2(x-10)}{(x-5)(x-10)} \ge 0$ c) $\dfrac{x+2}{(x-5)^2(3-x)} \le 0$

3. Halla para cuáles $x \in \Re$ los puntos de la gráfica de la función *f* se encuentran por encima o intersecan la gráfica de g.

$f(x) = \dfrac{x^3+4x^2}{x+5} + 4$ y $g(x) = \dfrac{20}{x+5}$

4. Halla todas las $x \in \Re$ que cumplen la condición $\frac{x^2+3x}{x^2-3x+2} \leq \frac{1}{x-2}$

Teleclase 14: Resolución de inecuaciones

Se trabaja con inecuaciones donde aparecen expresiones con radicales y logarítmicas.

Para el estudio independiente se propone hallar el dominio de definición de una función logarítmica en la cual la base es una expresión que contiene variables.

El estudio independiente realizado en la clase anterior le servirá de base para comprender la aplicación de los procedimientos para la resolución de inecuaciones, a la determinación del dominio de definición de funciones compuestas. Se sugiere consultar el memento que aparece en las páginas 147 y 148 de la segunda parte del LT 12, donde están resumidos aspectos fundamentales de las funciones elementales.

En la determinación del dominio de definición de funciones que se obtienen a través del cociente de otras dos, hay que considerar que la que se encuentra en el denominador nunca puede anularse. También es necesario tener en cuenta cómo en el segundo ejemplo que se presenta deben cumplirse dos condiciones simultáneamente para el argumento de la función logaritmo.

En el ejercicio que se deja para el estudio independiente hay que considerar que la base del logaritmo tiene que cumplir dos condiciones y que el argumento de la función logaritmo tiene que cumplir una. Se recomienda realizar los ejercicios 8, 9 y 11 del epígrafe 5 del LT 12, segunda parte, página 66.

Resolver los ejercicios 54 – 55 del epígrafe II de este material complementario.

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. Sea *h* la función real dada por y=$h(x)=\frac{\sqrt{x+5}}{log(3-x)}$. Halla los valores reales de la variable x para los cuales la función h está definida (se sobreentiende que es el dominio de definición más amplio donde la función puede definirse).

2. Halla el conjunto solución de: $\log_2 \frac{5x-4}{4x^2-25} \leq 0$

3. Halla el dominio de definición de la función dada por su ecuación: $g(x)=log_{x+2}\frac{x-3}{x^2-16}$

4. ¿Cuál es el dominio de definición de la función *f con* $f(x)=\sqrt{3-log_2\frac{12x}{x^2-1}}$?

Teleclase 15: Cálculo trigonométrico

Se realiza un repaso sobre el cálculo de las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera. Para ello se utilizan los ejemplos: $cos(-930^o)$ y $sen(-930^o)$

Se propone un ejercicio para el estudio independiente donde es necesario el trabajo con las fórmulas de reducción, la relación entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios y suplementarios y el cálculo de las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

La comprensión del círculo trigonométrico permite comprender que:

- El valor de las razones trigonométricas de un ángulo no depende de la longitud del radio del círculo.
- Para cada ángulo existe un punto sobre el círculo trigonométrico cuyas coordenadas permiten determinar las razones trigonométricas de este ángulo.

En esta teleclase se repasarán las razones trigonométricas, las relaciones que se establecen entre ellas para los ángulos complementarios, los valores de estas razones para los ángulos notables y las identidades trigonométricas fundamentales, que se resumen en la página 67 del LT de grado 12, segunda parte. Es importante que se sepa cómo se obtiene $sen^2 x + cos^2 x = 1$, para deducir a partir de ahí $1 + tan^2 x = \frac{1}{cos^2 x}$ y otras identidades. Además se reactivarán en esta teleclase las fórmulas de reducción para la determinación de las razones trigonométricas de los ángulos del II al IV cuadrante que aparecen en la página 152 del memento del LT 12, segunda parte, así como la generalización del concepto ángulo. Debe estudiar con este propósito las páginas 171 a 176, 179 a 182, y 185 a 193 del LT 10 o el resumen que aparece en las páginas 363 a 368 del Manual de ejercicios para la Educación Media Superior, primera parte.

Con posterioridad a la teleclase debe estudiar el procedimiento para transferir amplitudes de ángulos del sistema circular al sexagesimal y viceversa en las páginas 185 a 187. Debe tratar de resolver los ejercicios que se dejaron para el estudio independiente considerando que se debe comenzar por el miembro más complejo de las igualdades que se presentan. Se sugiere realizar el ejercicio 1 a), b), c) del epígrafe 6 de la página 72 del LT 12, segunda parte, y del LT 10, los ejercicios 1, 5 y 10, páginas 176 a 177, el ejercicio 5 de la página 183 y los ejercicios1 a), b), c) y 2 a), b), c) de la página 188.

Resolver los ejercicios 56 – 59 del epígrafe II de este material complementario.

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. Calcula $\frac{2sen(30^o)}{tan(-495^o) - cos(-45^o)}$
2. Comprueba que:

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

a) $\dfrac{3sen\dfrac{11\pi}{6}+tan\dfrac{5\pi}{4}}{2\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)-sen\dfrac{\pi}{6}}=-1$

b) $\dfrac{sen\,90^0+cos\left(k\cdot 360^o\right)}{cos\left(-30^o\right)-sen\left(30^o+k\cdot 360^o\right)}=2\left(\sqrt{3}+1\right)$

c) $\dfrac{2sen\left(180^o+\alpha\right)+cos\left(90^o-\alpha\right)}{sen\,\alpha\cdot cos\left(180^o-\alpha\right)+sen\,\alpha}=\dfrac{1}{cos\,\alpha-1}$ $\quad\left(\alpha\neq k\cdot 360^o\,;k\in Z\right)$

Teleclase 16: Identidades trigonométricas

La teleclase está orientada a la demostración de identidades trigonométricas.

Se proponen ejercicios para el estudio independiente en los cuales es necesario hallar valores funcionales, demostrar una identidad trigonométrica y determinar los valores admisibles de una ecuación trigonométrica.

Antes de la teleclase se sugiere revisar en el memento que aparece en el LT 12, segunda parte, los puntos 28 al 31, en los cuales se hace un resumen de los contenidos que es necesario reactivar.

Durante la teleclase se debe profundizar en:

- El concepto identidad.
- Las diversas vías para demostrar identidades.
- La necesidad de determinar desde un inicio los valores inadmisibles de la ecuación.

Después de la teleclase se recomienda analizar los ejemplos 1 y 2 del LT 12, segunda parte, páginas 68 y 69, los cuales ofrecen la posibilidad de fijar procedimientos básicos que permiten resolver este tipo de ejercicios de demostración de identidades. Se sugiere que resuelvan los ejercicios 2a), b), d), f), h) , 3 a), b), c), y 4 d), k) de las páginas 72 y 73 de este libro.

Resolver los ejercicios 60 – 61 del epígrafe II de este material complementario.

.

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. Demostrar que para todos los valores admisibles de la variable *x* se cumple que:

a) $\dfrac{2sen^2x-2}{sen2x}=-cot\,x \qquad x\neq k\dfrac{\pi}{2};\quad k\in Z$

b) $\dfrac{cos\,2x-1}{sen2x}=-tan\,x \qquad x\neq k\dfrac{\pi}{2};\quad k\in Z$

2. Sean: $f(x)=\dfrac{1}{cos^2x}+\dfrac{1}{sen^2x}$ y $g(x)=\left(\dfrac{2}{sen2x}\right)^2$

a) Prueba que $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=4$ y $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ no existe.

b) Demuestra que para todos los valores admisibles de la variable ***x*** se cumple que: $f(x)=g(x)$.

c) Halla el dominio de definición de la identidad demostrada anteriormente.

Teleclase 17: Ecuaciones trigonométricas

Esta clase se dedica a la resolución de ecuaciones trigonométricas. En el primer ejercicio se proponen cuatro ecuaciones trigonométricas, dos de las cuales se resuelven completamente en la teleclase.

Para el estudio independiente se orienta un ejercicio donde es necesario hallar valores funcionales y resolver ecuaciones trigonométricas.

Antes de la teleclase se recomienda reactivar las fórmulas de reducción para la determinación de las razones trigonométricas de ángulos cualesquiera.

Durante la teleclase debe destacarse:

– La necesidad de analizar, previo a su resolución, el tipo de la ecuación - dado que a veces no son puramente trigonométricas (véase ejercicios 1d) y 2 c), de la teleclase, entre otros)- y su dominio de definición.

– La conveniencia de reducir todas las razones trigonométricas que aparecen a una sola o no.

Después de la teleclase se recomienda analizar el ejemplo 3 del LT12, segunda parte, páginas 69 a la 72 que ofrecen la posibilidad de fijar procedimientos básicos que permiten resolver ecuaciones trigonométricas. Se sugiere que resuelvan los ejercicios 5 a), d), e) q), 6 a), c), d), l), 7 c), f), y 8 a), i) de las páginas 72 y 73 de este libro.

Resolver los ejercicios 62 – 63 del epígrafe II de este material complementario.

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. Halla el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $2sen x+sen 2x=0$ b) $3-2sen^2x=3\cos x$

c) $sen^4x-1=-\cos 2x$ d) $3^{2-\cos^2 x}=27\cdot 3^{sen x}$

2. Sean las funciones definidas por: $f(x)=\sqrt{2+4\cos x}$ y $g(x)=2\cos 2x-4$

a) Comprueba que**:** $\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2-2g\left(\frac{\pi}{8}\right)=10$

b) Determina los valores de $x\in[0;2\pi]$ para los cuales se anula la función *f*.

c) Halla todos los valores reales que satisfacen la igualdad $f(x)=\sqrt{g(x)}$.

Teleclase 18: Ecuaciones trigonométricas

En esta teleclase se continúa con la resolución de ecuaciones trigonométricas. En este caso se trabaja con ecuaciones donde es tener en cuenta:

- La estructura de las ecuaciones (operaciones que intervienen)
- La necesidad de tomar en cuenta el dominio de las ecuaciones para tomar decisiones sobre las soluciones.
- La necesidad de reducir una expresión antes de sustituirla y determinar el dominio cuando se simplifican denominadores.

Previo a la teleclase es importante que se reactiven los contenidos en que persistan dificultades, retornando a las sugerencias para el estudio dadas anteriormente.

Durante su desarrollo es muy importante que se fije en la estructura de la ecuación a resolver y discuta las diferentes vías de solución, sin olvidar efectuar la comprobación.

Con posterioridad a la visualización se recomienda que resuelvan los ejercicios 5 g), i), 6 f),i),k),o), 8 f),g) de las páginas 74 a 76 del LT 12, segunda parte.

Resolver los ejercicios 64 – 67 del epígrafe II de este material complementario.

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. Halla el conjunto solución de las siguientes ecuaciones.

   a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos 2x} \cdot 4^{senx} = 2^{3senx+2}$

   b) $\sqrt{\cos^2 x + 4} = 1 + \frac{sen2x}{2\cos x}$

2. Dadas las expresiones siguientes:

$$P = -\cos 2x \;;\quad Q = \tan x \cdot \cos x - \frac{sen2x}{senx} + sen^2 x - 1 \quad;\quad R = Q + \cos x(2 + \cos x)$$

   a) Prueba que $R = senx$ para un conjunto A $(A \subset R)$ de valores admisibles de la variable x.

   b) Determina el conjunto A.

   c) Halla todos los valores reales de la variable para los cuales se cumple que $P = R$.

Teleclase 19: Resolución de triángulos. Grupo de Teoremas de Pitágoras

Se repasa el Grupo de Teoremas de Pitágoras, las razones trigonométricas, la ley de los senos y los cosenos.

El Grupo de Teoremas de Pitágoras se plantea en forma de ejercicios y se orienta que se solucione cuando se repase el concepto de semejanza de triángulos y los criterios que caracterizan la definición.

Con anterioridad a la teleclase se deben recordar las características y propiedades de los triángulos y en particular, las del triángulo rectángulo, entre ellas, el grupo de teoremas de Pitágoras. Para ello se recomienda estudiar el epígrafe 7 “Propiedades geométricas elementales”, de las páginas 77 a 88 del LT 12, segunda parte. De especial interés resulta también que se reactive la ley de los senos y la de los cosenos.

En la resolución de triángulos es necesario realizar cálculos y establecer relaciones entre pares de ángulos. Es por eso que recomendamos el **ejercicio 68** de este material. La esencia no es marcar V o F, sino fundamenta e ilustrar cada situación planteada.

Durante la teleclase es importante tomar nota de las fundamentaciones y reflexionar sobre:

– Estructura de los teoremas: premisa y tesis.

– Formulación del recíproco y del contrarrecíproco de los teoremas estudiados.

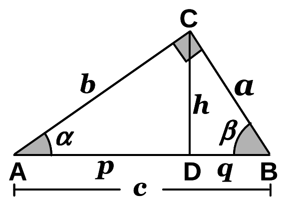
– La aplicación que tiene el grupo de teoremas de Pitágoras, la ley de los senos y la de los cosenos a la resolución de triángulos.

Con posterioridad a la teleclase se recomienda realizar los ejercicios del 30 al 43 de las páginas 93 a 95 del LT 12, segunda parte.

<u>Resolver el ejercicio 68 del epígrafe II de este material complementario.</u>

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. El triángulo ABC es rectángulo en C. La altura relativa a la hipotenusa es $h = \overline{CD}$. Además se tiene:



- $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AD} = p$ y $\overline{DB} = q$
- $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ $\angle BCA = \gamma$

1.1) Fundamenta las siguientes igualdades.

a) $sen\alpha = cos\,\beta$ b) $sen\beta = cos\,\alpha$

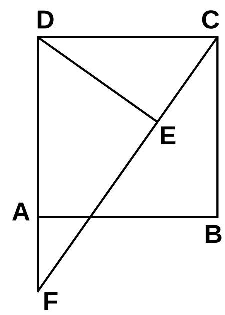
c) $tan\,\alpha = cot\,\beta$ d) $tan\,\beta = cot\,\alpha$

1.2) Demuestra que $\Delta BCA \sim \Delta ADC \sim \Delta CDB$.

1.2) Comprueba que de la semejanza de los tres triángulos se obtienen las siguientes relaciones:

a) $h^2 = pq$ b) $a^2 = qc$ y $b^2 = pc$ c) $c^2 = a^2 + b^2$

2. En la figura :



- $ABCD$ es un cuadrado.
- $E \in \overline{CF}$, $A \in \overline{FD}$ y $\overline{DE} \perp \overline{FC}$
- $\overline{CE} = 4{,}0\,cm$ y $\overline{EF} = 8{,}0\,cm$

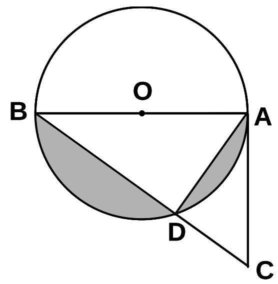
Calcula el área del cuadrado $ABCD$ y el perímetro del triángulo DEC .

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

3. El punto D pertenece a la circunferencia de centro en O y diámetro $\overline{AB}$.

   $\overline{CA}$ es tangente en A a la circunferencia , $\overline{DB} = 3{,}2\,dm$ y $\overline{BC} = 5{,}0\,dm$.

   Halla el área de la región sombreada.



Teleclase 20: Cálculo geométrico. Áreas y perímetros

Esta clase se dedica a ejercicios en los que se aplican los conocimientos sobre figuras geométricas y sus propiedades a calcular áreas de figuras planas compuestas. Se proponen dos ejercicios geométricos que se resuelven completamente en la teleclase. En estos ejercicios es necesario el trabajo con propiedades de la circunferencia, el triángulo y la mediana en un triángulo. Se requiere el cálculo de áreas y de habilidades en el cálculo aritmético con valores aproximados. Se propone además un ejercicio geométrico para el trabajo independiente.

Antes de la teleclase se sugiere estudiar los contenidos que es necesario rememorar en los puntos 25 y 26 del memento que aparece en el LT 12, segunda parte. De especial interés resultan también: rectas notables en un triángulo y propiedades en el triángulo equilátero.

Durante la teleclase se debe tomar nota de las fundamentaciones y prestar atención a:

– El reconocimiento de palabras claves en el problema y su significado dentro del contexto.

– La construcción de una figura de análisis.

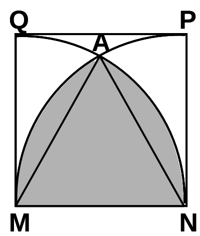
– La necesidad de establecer las fundamentaciones en cada paso.

Después de la visualización se sugiere hacer un resumen de las fórmulas para la determinación de los perímetros y áreas de las figuras planas estudiadas. Debe tenerse en cuenta la posibilidad de hacer descomposiciones de cuerpos.

Resolver los ejercicios 69 – 71 del epígrafe II de este material complementario.

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. La sección transversal de una pieza tiene forma de triángulo equilátero con una perforación circular en el centro. El lado del triángulo es de 6,0 cm y el radio del hueco es la mitad de la distancia del centro del triángulo al lado. Calcula el área de la sección transversal.
2. En el cuadrado MNPQ con centro en M y N se trazan los arcos NQ y MP de radios $\overline{\text{MN}} = 4{,}2\text{ cm}$ respectivamente. Calcula el área sombreada.



3. Haciendo centro en un vértice de un triángulo equilátero de 4,0 cm de lado se trazó una circunferencia de radio igual a la distancia del vértice al centro de gravedad del triángulo. Calcula el área de la figura así formada.

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

Teleclase 21: Cálculo geométrico. Ángulos, circunferencia y círculo

Se proponen dos ejercicios geométricos que se resuelven completamente en la teleclase. En este caso es necesario trabajar con triángulos y ángulos en la circunferencia, el teorema de Tales y la relación entre la tangente a una circunferencia y el radio.

Se propone un ejercicio para el trabajo independiente en el cual es necesario clasificar triángulos y cuadriláteros, el cálculo de áreas y perímetro de figuras planas y el área de una región sombreada en una circunferencia.

Antes de la teleclase el estudiante debe rememorar contenidos referidos a ángulos, razones trigonométricas en un triángulo, circunferencia y círculo; una síntesis aparece en los puntos 19 - 25 del Memento del LT12, segunda parte. De igual forma debe analizar cuáles teoremas tienen como tesis o conclusión la igualdad de amplitudes de ángulos, así como la relación entre ángulos centrales, inscritos y seminscritos sobre el mismo arco de una circunferencia.

Durante la teleclase se debe tomar nota de las fundamentaciones y tener en cuenta:

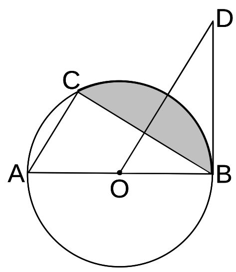
– El esbozo de figuras y cuerpos geométricos que cumplan las condiciones dadas en un enunciado y la construcción de las figuras geométricas fundamentales y las rectas y puntos notables a partir de sus propiedades esenciales.

– El vínculo existente entre las diferentes áreas matemáticas, visto a través de los métodos empleados en la resolución de ejercicios, que pueden haber sido estudiados en unidades de Geometría, Trigonometría, Aritmética o Álgebra.

Después de la teleclase de deben realizar los ejercicios 20, 21 y 22 del epígrafe 9 que aparecen en las páginas 115 y 116 del LT 12, segunda parte, son algunos ejemplos de ejercicios que contribuyen a consolidar el contenido correspondiente a esta clase.

Resolver los ejercicios 72 – 75 del epígrafe II de este material complementario.

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:



1. C es un punto de la circunferencia de centro en O y diámetro $\overline{AB} = 10\ \text{cm}$. $\overline{BD}$ es tangente a la circunferencia y $\overline{AC} // \overline{OD}$.

1.1) Prueba que los triángulos BCA y OBD tienen sus ángulos interiores respectivamente iguales.

1.2) Sitúa un punto E sobre el arco AB de manera que los triángulos ABC y AEC tengan sus ángulos interiores respectivamente iguales. Justifica.

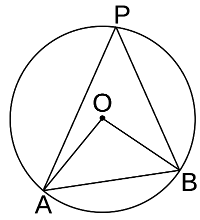
1.3) Conociendo que $\overline{AC} = 5.0\ cm$:

a) Halla la amplitud de $\angle ABC$

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

b) Calcula el área de la superficie sombreada.

2. La figura muestra una circunferencia de centro en O. $\overline{AP}$, $\overline{PB}$ y $\overline{AB} = 40\,\text{cm}$ son cuerdas. La amplitud del ángulo APB supera en $6{,}0^{o}$ la del ángulo OAB. Calcula el área del triángulo AOB.



Teleclase 22: Cálculo geométrico

Se propone un primer ejercicio que se resuelve completamente en la teleclase. En este ejercicio se trabaja con el Grupo de Teoremas de Pitágoras y el cálculo con valores aproximados.

Para el estudio independiente se propone un ejercicio donde es necesario trabajar con las propiedades del rombo.

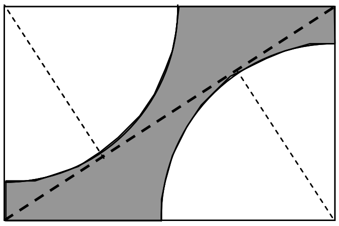
En la preparación previa a esta clase es conveniente repasar el grupo de teoremas de Pitágoras. También merece atención el estudio de los cuadriláteros y sus propiedades.

Durante la teleclase se debe llamar la atención sobre la descomposición de una superficie en otras más pequeñas, cuyas áreas se pueden calcular. Deben seguirse las indicaciones dadas en ejercicios anteriores y no olvidar tomar nota de las fundamentaciones.

Después de la teleclase los estudiantes deben comprobar si son capaces de resolver de manera independiente los ejemplos 1y 2 , y los ejercicios 2, 3, 4, 10, 14 y 15 de las páginas 217 y 218 del LT Matemática 9.

Resolver los ejercicios 76 – 78 del epígrafe II de este material complementario.

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:



1. Una pieza metálica se obtiene de una plancha rectangular al cortarle dos sectores circulares iguales, tangentes a una diagonal como se muestra en la figura. Calcula el área de la pieza si la diagonal de la plancha mide 15 cm y el largo 12 cm.

2. La diagonal menor de un rombo mide 4,0 cm y es igual a uno de sus lados.
   a) Calcula las longitudes de las diagonales del rombo cuya área es el doble del anterior con las mismas condiciones.
   b) Calcula la longitud de la diagonal mayor del rombo.

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

Teleclase 23: Ejercicios de geometría plana

En la teleclase se presentan tres ejercicios. El primero es realmente simple, y es portador de información para el segundo ejercicio. Se trata de ilustrar cómo al trazar las tres medianas de un triángulo éste queda dividido en seis triángulos que tienen la misma área.

En el segundo ejercicios es importante reconocer que la mediana de un triángulo relativa a la base coincide con las demás rectas notables. Se trabaja además con el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas.

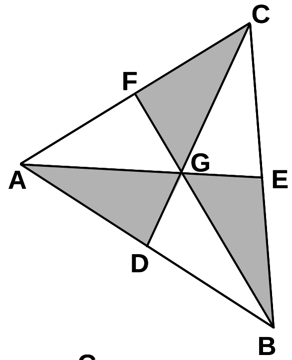
El tercero requiere conocer la propiedad sobre el radio que biseca a una cuerda, ángulos en la circunferencia, el teorema de la altura, el área de un triángulo rectángulo y el área del círculo.

Es necesario continuar repasando el contenido relacionado con triángulos, cuadriláteros y ángulos en la circunferencia (**Mat.12, Parte 2, Págs. 79-95**).

Resolver los ejercicios 79 – 82 del epígrafe II de este material complementario.

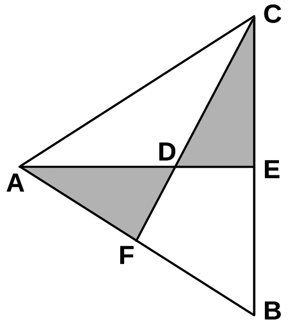
El objetivo es repasar los ángulos con lados respectivamente paralelos o perpendiculares ángulos en la circunferencia y el área del círculo.

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:



1. En el triángulo ABC, que tiene un área de $42\,cm^2$, se han trazado las medianas $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ y $\overline{AE}$, que se cortan en el punto G.

   Halla el área de la región sombreada.

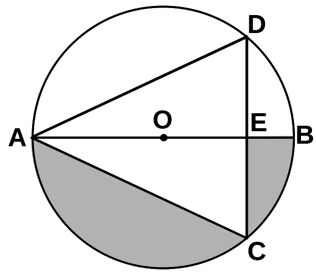


2. El triángulo ABC es isósceles de base $\overline{BC} = 1{,}2\ dm$. El punto D es la intersección de las medianas $\overline{CF}$ y $\overline{AE}$. Se conoce además que $\overline{AD} = 0{,}53\ dm$.

   a) Calcula el perímetro del ΔABC.

   b) Halla la amplitud del $\angle CAB$.

   c) Halla el área de la región sombreada.



3. Los puntos C y D pertenecen a la circunferencia de centro en O y diámetro $\overline{AB}$.
   - $\overline{AC} = \overline{AD}$, $\overline{CD} = 4{,}0\ cm$ y $\overline{EB} = 1{,}0\ cm$

- $\overline{OB} \perp \overline{CD}$ en el punto E

a) Halla el área de la región sombreada.

b) Si $\alpha = \angle ACD$, traza un ángulo seminscrito β que $\beta = \alpha$.

Teleclase 24: Igualdad y semejanza de triángulos

Se propone un primer ejercicio que se resuelve en la teleclase. En este ejercicio es necesario el trabajo con las relaciones en una circunferencia para demostrar la igualdad y la semejanza de triángulos.

El segundo ejercicio se orienta para el estudio independiente en el cual es necesario trabajar con relaciones en la circunferencia para demostrar la semejanza de dos triángulos, establecer la proporcionalidad de los lados homólogos y calcular el área de una región de la circunferencia.

Previo a la teleclase los estudiantes deben repasar las propiedades de las figuras geométricas elementales siguientes: pares de ángulos, triángulos, cuadriláteros, circunferencia y círculo, y el perímetro y el área de figuras planas. En particular se debe estudiar la página 95 d el LT 12, segunda parte. Además deberán tener en cuenta los teoremas siguientes:

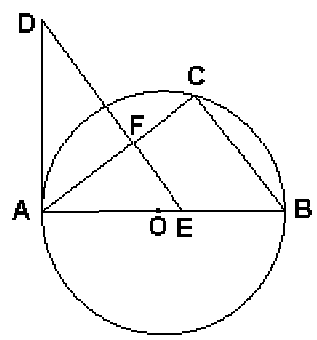
- Las tres partes del teorema de las transversales (LT 9, páginas 7 a 11).
- Los criterios de igualdad y semejanza de triángulos, los cuales proporcionan un semejantes (LT 12, segunda parte, páginas 95 a 98).
- El teorema fundamental de la semejanza de triángulos (LT 9, páginas 28-30).

Durante esta teleclase y las siguientes debe prestarse especial atención a la forma en que se realizan estos ejercicios de demostración, donde el orden de las proposiciones no es arbitrario y se requiere que sean fundamentadas. Por eso el estudiante debe tener claridad de los enunciados de los teoremas que se utilizan, entre otros, los referidos a las propiedades que se cumplen para los ángulos entre paralelas, el teorema sobre la propiedad de la tangente a una circunferencia de ser perpendicular al radio en el punto de tangencia, el teorema de Tales y otros.

Con posterioridad deben analizarse las diferentes vías de solución de estos ejercicios. Para el estudio independiente posterior a la video clase se sugieren los ejercicios 1-3, 4, 9 y 11 de las páginas 99-101 del LT 12, segunda parte.

Resolver los ejercicios 83 y 84 del epígrafe II de este material complementario.

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:



1. En la figura, C es un punto de la circunferencia de centro en O y diámetro $\overline{AB}$. $\overline{AD}$ es tangente a la circunferencia, $E \in \overline{AB}$, $\overline{ED} // \overline{CB}$, $\overline{AC} \cap \overline{DE} = \{F\}$ y $\overline{AE} = \overline{CB}$.

1.1) Prueba que:

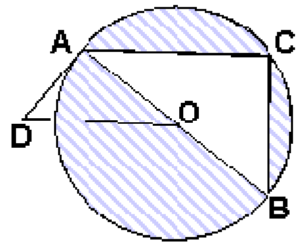
a) $\overline{ED} = \overline{AB}$ b) $\Delta ABC \sim \Delta AFD$

1.2) Halla $\overline{DF}$ si $\overline{BC} = 6{,}0\text{ cm}$, $\overline{AC} = 8{,}0\text{ cm}$ y $\overline{AF} = 5{,}0\text{ cm}$.

2. En la figura, C es un punto de la circunferencia de centro en O y diámetro $\overline{AB}$. $\overline{DA}$ es tangente y $\overline{OD} \parallel \overline{AC}$.

   a) Prueba que $\Delta ABC \sim \Delta OAD$ y $\overline{OD} \cdot \overline{AC} = 2r^2$.

   b) Halla el área de la región rayada, conociendo que $\overline{OD} = 5{,}0\text{ cm}$ y. $\overline{AC} = 8{,}0\text{ cm}$



Teleclase 25: Igualdad y semejanza de triángulos

Los ejercicios que se presentan en las telaclase están dirigidos a continuar el trabajo con la igualdad y la semejanza de triángulo.

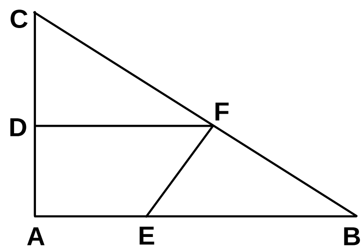
Es importante repasar:

- La relación entre ángulos agudos u obtusos con lados respectivamente paralelos o perpendiculares.
- La relación de proporcionalidad entre los lados homólogos en triángulos semejantes.
- La relación de proporcionalidad entre los perímetros y las áreas de dos triángulos semejantes.
- La relaciones entre ángulos en la circunferencia.

Se debe continuar resolviendo los ejercicios en (**Mat.12, Parte 2, Págs. 101-106**)

Resolver los ejercicios 85 – 86 del epígrafe II de este material complementario.

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:



1. El triángulo CAB es rectángulo en A. Los puntos D, E y F están situado sobre los lados $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ respectivamente.

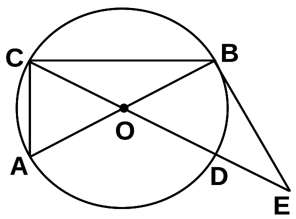
   Además se tiene:

   - $\overline{DF} = \overline{FB}$, $\overline{DF} // \overline{AB}$ y $\overline{EF} \perp \overline{CB}$
   - El área del ΔBFE es $20\ cm^2$.
   - $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = \dfrac{5}{4}$

a) Prueba $\overline{CF} = \overline{EB}$.

b) Halla el área del cuadrilátero $AEFD$.

2. En la figura, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son diámetro de la circunferencia de centro en O. $\overline{DE}$ es la prolongación de $\overline{CD}$, $\overline{BE}$ es tangente en B y $\overline{AC} = \overline{OA}$.



a) Prueba que $\overline{AB} = \overline{OE}$

b) Comprueba que la longitud de la cuerda AD es $r\sqrt{3}$.

Teleclase 26: Igualdad y semejanza de triángulos

En el primer ejercicio se ofrecen datos, que en ejercicio anterior, constituyeron premisa para justifica la perpendicularidad. En este caso no se trata de triángulos rectángulos, por tanto no se pueden cometer errores en las justificaciones.

Mediante este ejercicio se puede establece la relación de proporcionalidad que al trazar una secante y una tangente a una circunferencia, desde un punto exterior a ella.

El segundo ejercicio se refiere a propiedades del triángulo isósceles y las rectas notables en este tipo de triángulo

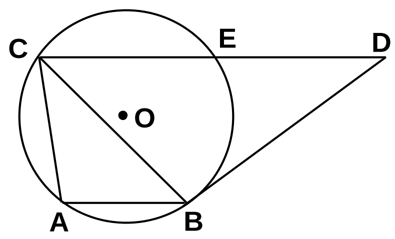
Se debe continuar resolviendo los ejercicios en (**Mat.12, Parte 2, Págs. 101-106**)

Resolver los ejercicios 87 y 88 del epígrafe II de este material complementario.

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. Los puntos A, B, C y E pertenecen a la circunferencia de centro O. $\overline{BD}$ es tangente en B $\overline{DC}$ corta a la circunferencia en E

$\overline{AB} // \overline{CD}$, $\angle BDC = 30º$ y $\overline{AB} = 2{,}0cm$.



a) Demuestra que $\overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{CD}$.

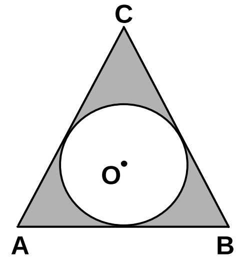
b) Demuestra que $\overline{BD}^2 = \overline{DE} \cdot \overline{DC}$

c) Halla el área del círculo.

d) Si además, $\overline{CB} = 3{,}98\,cm$, halla la amplitud del ángulo CAB.

e) Selecciona un punto F sobre el segmento $\overline{CD}$ para que $\Delta CAB = \Delta FCB$. Justifica por qué estos triángulos son iguales.

a) La figura muestra una circunferencia inscrita en el triángulo ABC.



Se conoce que ΔABC es isósceles de base $\overline{AB} = 32\,cm$ y tiene una altura $h = 30\,cm$.

a) Halla el perímetro de la circunferencia.

b) Halla el área de la región sombreada.

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

Teleclase 27: Igualdad y semejanza de triángulos

El primer ejercicio se resuelve completamente en la teleclase; se trata de la demostración de la semejanza de dos triángulos donde es necesario trabajar con el teorema de la bisectriz de un ángulo en un triángulo cualquiera.

El segundo ejercicio, relacionado con las propiedades de triángulos y cuadriláteros, se orienta para el estudio independiente.

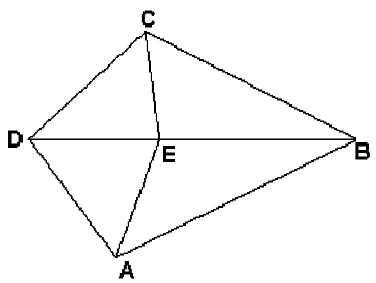
Para la visualización de esta teleclase es muy importante el dominio de la relación entre los perímetros y las áreas de triángulos semejantes. Si la razón de semejanza entre dos triángulos es k (k>0), entonces la razón de sus perímetros será k, y la de sus áreas será k^2. Además es importante conocer las propiedades sobre los ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos o perpendiculares que se expresan en el punto 20 del memento, página 149 del LT 12, segunda parte.

En el desarrollo de la teleclase se tendrán en cuenta los mismos aspectos que en las anteriores. Se reitera la necesidad de atender a las fundamentaciones de las proposiciones que sirven de base a la realización de los ejercicios.

Para el estudio independiente se recomienda realizar los ejercicios 2 de los temarios de prueba de ingreso de los cursos 92-93 y 94-95. Además se proponen los ejercicios 61 a 64 del LT 9 de la página 46 y los ejercicios1 y 2 de la página 338, el 12 de la página 342, y del 15 al 18 de la página 343 del epígrafe 4.3 del Manual de ejercicios para la Educación Media Superior, primera parte.

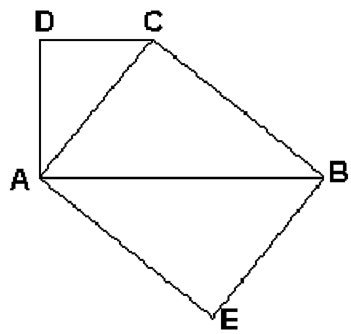
Resolver los ejercicios 89 – 91 del epígrafe II de este material complementario.

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:



1. En el cuadrilátero ABCD, $\overline{CE}$ es la bisectriz del $\angle BCD$. El ΔAED es isósceles de base $\overline{AD}$, $\angle BCD = \angle BEA$ y $E \in \overline{DB}$.
   a) Prueba que $\angle DBC = \angle ABE$.
   b) ¿Cuál debe ser la posición de un punto F, sobre el lado $\overline{AB}$, de manera que $\Delta DAC = \Delta DAF$?

2. En la figura, ABCD es un trapecio rectángulo en A y D. AEBC es un rectángulo, $\overline{AB} = 9{,}0$ cm y $\overline{DC} = 4{,}0$ cm. Halla el área del rectángulo AEBC y la del triángulo CDA.



Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

Teleclase 28: La recta en el plano

Inicialmente se realiza un repaso sobre las relaciones y fórmulas básicas de la Geometría Analítica para el estudio de la recta en el plano.

Se propone un ejercicio vinculado con la práctica que se modela y resuelve parcialmente en la teleclase.

El estudiante debe conocer que la geometría analítica se caracteriza por la aplicación de los métodos algebraicos en la geometría y en ella se plantean dos problemas centrales: dado la ecuación de un lugar geométrico, representarlo gráficamente y viceversa. Debe revisarse la definición de ángulo de elevación y depresión que aparece en la página 251 del LT 10.

Para el estudio independiente se sugiere realizar los ejercicios 1a),g),h) del epígrafe 1, 3a), 4a), 5), 6, 7 páginas 69 a la 70 del LT de grado 11 .

Resolver el ejercicio 93 del epígrafe II de este material complementario.

EL ejercicio que se trata en la teleclase es el siguiente:

1. Desde un faro se observa un barco en la dirección noreste y desde otro barco a $1{,}0\ km$ al norte del faro, se observa bajo un ángulo de 42^{o}. ¿Cuál es la ubicación del barco y a qué distancia se encuentra del faro?

Teleclase 29: La recta en el plano

Se trata de un ejercicio para repasar las fórmulas básicas de la geometría analítica, por tanto es necesario continuar trabajando los ejercicios que aparecen en (**Mat.11,**)
Se deben realizar los ejercicios del 9 al 13 de las páginas 70 y 71 del LT Mat.11.

Resolver el ejercicios 94 del epígrafe II de este material complementario.

Este ejercicio contribuir a repasar las fórmulas básicas de la geometría analítica y otras relaciones importantes estudiadas en el curso.

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. Las coordenadas de los vértices de un triángulo PQR son: $P(1;3)$, $Q(0;2)$ y $R(3;-1)$
   a) Representa estos puntos en un sistema de coordinas rectangulares.
   b) Escribe una ecuación de la recta que contiene a la mediana relativa al lado $\overline{PR}$.
   c) Analiza si es verdadera o falsa la siguiente proposición: "La mediatriz del lado $\overline{PR}$ corta en algún punto a la recta PQ". Halla, si existe, el punto de intersección de esta rectas,
   d) Conociendo que M es el punto medio de $\overline{PR}$, comprueba que los puntos Q, M y $S(6;-1)$ están alineados.
   e) Demuestra que el triángulo PQR es rectángulo.
   f) Halla el área del círculo circunscrito al triángulo PQR.

Teleclase 30: La recta en el plano

Se presenta un ejercicio en el cual se dan, por sus coordenadas, los vértices de la base de un triángulo isósceles para hallar el tercero y determinar su área.

El segundo ejercicio se orienta para el estudio independiente. En este caso se dan las coordenadas de los vértices de un cuadrilátero para demostrar que es un cuadrado y calcular su área.

Los requisitos previos para la visualización de esta clase se garantizan desde las teleclases anteriores.

En la visualización de la teleclase se debe prestar atención a cómo se utilizan las propiedades del triángulo isósceles para resolver el ejercicio tratado en clases y a los señalado para las teleclases anteriores.

Para el estudio independiente es importante que se resuelva el ejercicio propuesto por las dos vías que se sugieren. Debe argumentar por qué es suficiente probar solo que se cumplen estas condiciones. Se proponen los ejercicios 5 al 15 de las páginas 82 y 83, del epígrafe 2 del LT 11.

Continuar profundizando en las conceptos, relaciones y procedimientos necesarios para responde **el ejercicios 94 del epígrafe II de este material complementario.**

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. Sean M (–1; –2) y N (7; 2) los vértices de un triángulo isósceles MNP de base $\overline{MN}$.

   a) Indique cuál de los siguientes pares ordenados pueden ser las coordenadas punto P: (7; 9), (3; –2) y (–1; 8).

   b) Calcula el área del Δ MNP.

2. Sean A (0; –4), B (5; –5), C (6; 0) y D (1; 1) los vértices de un cuadrilátero. Demuestra que es un cuadrado y calcula su área.

Teleclase 31: Geometría del espacio

En la parte inicial de la teleclase se realiza un repaso sobre elementos importantes de la Geometría del Espacio.

Se propone un ejercicio que se trata de un prisma recto que tiene como base un rombo. Se calcula el volumen durante la teleclase y se orienta para el estudio independiente el cálculo del área total del cuerpo.

El estudiante deberá repasar los contenidos que aparecen explicados de la página 108 a 126 en el LT 12, primera parte.

Completa los espacios en blanco utilizando las expresiones “siempre”, “algunas veces” o “nunca” según corresponda, de forma tal que se obtengan proposiciones verdaderas. Fundamenta en cada caso.

a) Dos rectas del espacio que no tienen puntos comunes _________ son paralelas.

b) Una recta y un punto __________ determinan un único plano.

c) Dos rectas ________ determinan un único plano.

d) Transforma las proposiciones para que se pueda sustituir las expresiones “algunas veces” o “nunca” por “siempre” y se obtengan proposiciones verdaderas.

En particular deberá reactivar las fórmulas para el área lateral, área total y volumen de los cuerpos geométricos siguientes: prisma, pirámide, cilindro, cono y esfera, que aparecen en la página 126 del libro Matemática V de la EDA y en la página 220 del LT 9. Debe consultar los puntos 6 al 8 del memento del LT 12, segunda parte, página 144, donde se resumen las reglas para el redondeo y para el cálculo con valores aproximados, las cuales resultan de gran importancia para el cálculo de cuerpos.

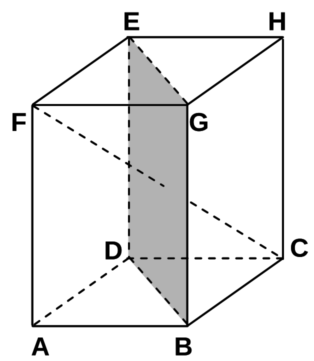
Es importante que aprecie la importancia de leer cuidadosamente los enunciados de los ejercicios; en el propuesto en esta teleclase la información de que el prisma es recto es lo que permite aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo CAF. Por ser las bases del prisma rombos, se puede calcular el área de dichas bases como el semiproducto de las longitudes de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Debe adquirirse habilidad para determinar de acuerdo con los datos cuál es la razón trigonométrica que permite avanzar en el desarrollo del ejercicio. Es imprescindible que se preste atención al rigor de las fundamentaciones y su correcta redacción.

Para el estudio independiente se recomienda realizar los ejercicios 8 al 11 de la página 123 y 20 al 24 de las páginas 124 y 125 del LT12, primera parte.

<u>Resolver los ejercicios 95 – 98 del epígrafe II de este material complementario.</u>

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. ABCDEFGH es un prisma recto, ABCD es un rombo y DBGE un cuadrado**.** La diagonal interior $\overline{FC} = 50$ cm forma un ángulo de $36{,}9^{o}$ con el rombo base**.**



a) Calcula el volumen del prisma.

b) Conociendo que $\overline{AC} = 40$ cm, $\overline{DB} = 30$ cm, $\overline{AF} = 30$ cm; Comprueba que su área total es de $42\ dm^2$.

<u>Teleclase 32</u>: Geometría del espacio

En la teleclase se realiza un análisis del cilindro y el cono en relación a las propiedades, analogías, diferencias, volumen y áreas.

Se propone un ejercicio que es ampliamente para obtener relaciones importantes a partir de los datos que se dan.

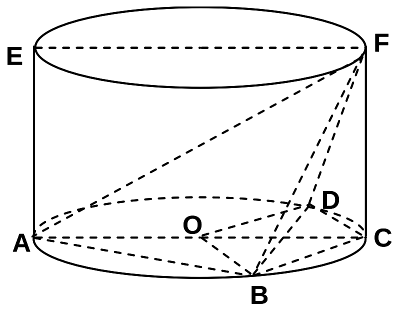
<u>Resolver los ejercicios 99 y 100 del epígrafe II de este material complementario.</u>

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. Los puntos B y D pertenecen al círculo, de centro en O y radio $\overline{OC}$, que sirve de base a un cilindro recto.

- $\overline{AC}$ y $\overline{EF}$ son dos diámetros paralelos.
- El área lateral del cilindro es $A_L = 36\pi\sqrt{3}\ cm^2$.

- La cara BDF, de la pirámide $BCDF$, forma un ángulo de 60º con el plano de la base.
- $OBCD$ es un rombo.



3.1) Si el cilindro es un sólido que se quieres fundir para construir conos circulares rectos, pero reduciendo la altura y el radio en un 50% en relación con en estas dimensiones en el cilindro ¿Cuántos conos con estas características se pueden construir?

3.2) Halla:

a) El volumen de la pirámide $BCDO$.

b) El área del circulo base que no está ocupada por el área del rombo $OBCD$?

3.3) Demuestra que el ΔABF es rectángulo en B.

Teleclase 33: Geometría del espacio

Se realiza un análisis de las propiedades y relaciones importantes en la pirámide y el cono recto, sus analogías y diferencias.

Se propone un primer ejercicio para el cálculo del volumen y el área lateral de una pirámide recta de base cuadrada.

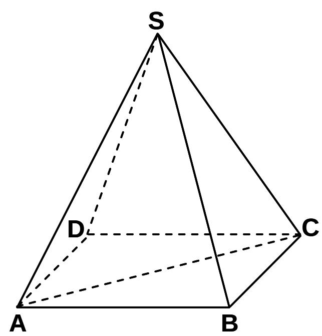
Para el estudio independiente se propone un ejercicio para el cálculo del volumen y el área lateral de un cono circular recto

Durante la teleclase el estudiante debe observar todas las inferencias que se pueden realizar a partir del hecho de que la pirámide es recta. También es necesario apreciar la conveniencia de realizar figuras auxiliares que permitan comprender mejor las relaciones que se establecen entre sus elementos y la necesidad de escribir con rigor todas las fundamentaciones.

Al realizar el estudio independiente debe atenderse a no hacer la sustitución de las variables y constantes por sus valores correspondientes hasta el final, porque ello permite no solo elevar la exactitud de los cálculos, sino que también ayuda a simplificarlos. Se propone realizar los ejercicios 23, 24, 27, 29, y 31 del LT 12, segunda parte, páginas 116 y 117, previo repaso de todo lo que tiene que ver con el cálculo del área total, del área lateral y el volumen del cilindro.

Resolver los ejercicios 101 – 102 del epígrafe II de este material complementario.

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:



1. En la figura, ABCDS es una pirámide recta de base cuadrada. El ΔACS tiene un área de 48 cm^2 y $\tan\angle SAC = \frac{4}{3}$. Calcula el volumen y el área lateral de esta pirámide.

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

2. La altura de un cono circular recto es $h = 4\sqrt{3}\ dm$ y cada generatriz forma un ángulo de 60^o con el plano de la base. Comprueba que el cono tiene un volumen V≈ 115 dm^3 y un área lateral AL ≈ 100 dm^2.

Teleclase 34: Geometría del espacio

En la teleclase se propone un ejercicio que consiste en un prisma regular de base triangular en el cual se ha escrito una pirámide recta. El inciso a) de este ejercicio se resuelve durante la teleclase. En dicho ejercicio se trabaja con relaciones importantes en el triángulo equilátero, el uso de razones trigonométricas, el cálculo con raíces cuadradas y con valores aproximados.

Los otros tres incisos, relativos al volumen del prisma y el área lateral del prisma y la pirámide, se orientan para el trabajo independiente.

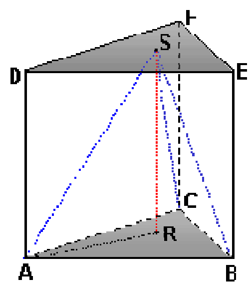
Los conocimientos previos para la comprensión de la teleclase son los mismos que los requeridos con anterioridad.

Debe observarse que ahora las relaciones que se deben establecer para determinar el área de la base de la pirámide son más complejos, y ha resultado útil también hacer figuras auxiliares. El hecho de que el prisma es regular de base triangular está indicando que las bases son triángulos equiláteros. Se insiste en la necesidad de la rigurosidad y correcta escritura de las fundamentaciones, lo cual debe ser objeto de análisis entre los distintos compañeros del aula.

Para el estudio independiente se recomienda realizar los ejercicios 26 al 29 de la página 125 y 34 a 39 de la página 126 del LT 12, primera parte.

Resolver los ejercicios 103 – 105 del epígrafe II de este material complementario.

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:



1. En la figura, ABCDEF es un prisma regular de base triangular. $\overline{SR} = 9{,}0\ \text{cm}$ es la altura de la pirámide recta ABCS, inscrita en el prisma y ∠SAR = 60º.

Calcula:

a) El volumen de la pirámide y el área total del prisma.

b) El volumen del prisma y el área total de la pirámide.

Teleclase 35: Geometría del espacio

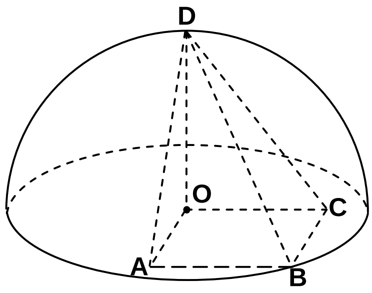
Durante la teleclase se trabaja un ejercicio donde se aplican tres teoremas básicos de la geometría: Teorema de las tres perpendiculares, Teorema de Pitágoras y el Teorema del ángulo de 30^o en un triángulo rectángulo.

Lo más interesante en la resolución del ejercicio es la estrategia que se debe seguir, para obtener el radio de la semiesfera y la longitud de los lados del cuadrado base de la pirámide. En este caso se orienta cómo debe ser el orden del trabajo que es necesario realizar para simplificar el proceso.

Resolver los ejercicios 105 – 107 del epígrafe II de este material complementario.

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. La base cuadrada de la pirámide $OABCD$ está situada en el círculo base de una semiesfera de centro en O y radio r



- B y D son puntos de la semiesfera.
- $\overline{OD}$ es la altura de la pirámide $OABCD$.
- El área de la cara DAB de la pirámide es $A_{(DAB)} = 8\sqrt{3}\ dm^2$

a) Si la esfera es un sólido que se perfora con la pirámide, ¿cuál es el volumen del cuerpo resultante?

b) Si la perforación se realiza con un cono circular recto, que cumple las siguientes condiciones:

- La base del cono tiene centro en O y radio $R = \sqrt{2}\ dm$,
- Dos generatrices del cono, diametralmente opuestas, forman un ángulo recto,

¿qué cantidad de material se extrae de la semiesfera?

c) Halla el área lateral de la pirámide.

Teleclase 36: Ejercicios variados

El primero de los ejercicios que se trabaja en la teleclase es realmente novedoso. La primera dificultad radica en la construcción del triángulo ABC que satisface las condiciones dadas.

La vía de solución que presenta el teleprofesor requiere de construcciones auxiliares, del uso de variables y la relación entre los lados homólogos en triángulos semejantes.

El segundo ejercicio permite recordar importantes conceptos, relaciones y procedimientos en el trabajo con las funciones.

Un propósito es insistir en tratar de evitar errores de cálculo, sobre todo en datos que serán utilizados en otros incisos.

Como se aprecia esta es una teleclase de consolidación de lo estudiado anteriormente. A esta altura del curso se recomienda continuar resolviendo los temarios de exámenes de ingreso, que han podido recopilar en las escuelas. Se deben seleccionar ejercicios de los proyectos de pruebas que aparecen en Hernández Ávalos, Jacinto (2006): ¿Cómo estás en Matemática? Ejercicios complementarios de Matemática, para la profundización en la enseñanza preuniversitaria. Editorial Pueblo y Educación.

Los ejercicios que se tratan en la teleclase son los siguientes:

1. En un triángulo ABC se cumplen las siguientes condiciones:
   - La longitud del lado $\overline{CA}$ excede en $2{,}0\ cm$ a la longitud del lado $\overline{AB}$.
   - $\overline{BC} = 5{,}0\ cm$
   - $\angle CAB = 2\angle BCA$

   a) Halla el perímetro del triángulo ABC,

   b) Describe una secuencia de pasos que permita hallar la amplitud de los ángulos interiores del triángulo ABC.

2. Sean las funciones f, g, h y t que tienen, respectivamente las siguientes ecuaciones: $f(x) = 3 - \frac{1}{2} sen 2x \tan x$, $g(x) = 1 + sen x$, $h(x) = log_{a+1}(2x + 44)$ y $t(x) = 2 - \sqrt{x - 3}$

   a) Calcula $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

   b) Halla el valor de a en la ecuación de la función h si el par $\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right);2\right)$ pertenece a esta función.

   c) Halla el conjunto solución de la ecuación $f(x) = g(x)$.

   d) Halla el dominio de definición y el conjunto imagen de la función t.

II) Ejercicios y problemas para la práctica y el repaso durante el trabajo independiente

Teleclase 1: Funciones y ecuaciones

1. Escribe V ó F según sea verdadera o falsa cada una de las siguientes proposiciones. En el caso de las falsas, argumenta por qué lo son.

a) ___ $0,91 \in N$ b) ___ $-17 \in Z$ c) ___ $3,2\overline{17} \notin Z$

d) ___ $\sqrt{11} \in R$ e) ___ $2,15 \notin Q$ f) ___ $-2,6 \in Q$

g) ___ $\pi = 3,1415... \in Q_+$ h) ___ $-\frac{3}{7} \in Q_+$ i) ___ $Q_+ \subset R$

j) ___ $N \not\subset Q_+$ k) ___ $Z \cap Q_+ = N$ l) ___ $Z \cup N = Q_+$

2. Escribe uno de los signos $\in$ o $\notin$ para obtener una proposición verdadera en cada caso.

a) $2,5$ ___ N b) -7 ___ Z c) $-3,4$ ___ Q_+

d) $-\frac{2}{5}$ ___ Q e) $3,4$ ___ R f) $\sqrt{7}$ ___ I

g) $\frac{2}{3}$ ___ Q_+ h) $-\frac{19}{4}$ ___ Z i) $\pi = 3,14152...$ ___ Q

j) $-2,\overline{3}$ ___ I k) $\pi \approx 3,142$ ___ Q l) $\sqrt{-16}$ ___ R

3. Indica el dominio numérico más restringido al cual pertenece cada uno de los siguientes números.

a) $-0,25$ _____ b) 12 _____ c) $\frac{3}{4}$ _____

d) $3,14$ _____ e) -34 _____ f) $\sqrt{2}$ _____

g) $\pi = 3,1415...$ _____ h) $\sqrt[3]{-8}$ _____ i) $0,17\overline{5}$ _____

4. Completa la siguiente tabla marcando con una X los dominios numéricos a los cuales pertenece cada número de la columna (A).

(A)	N	Z	Q+	Q	R	Ninguno de los dominios anteriores
10						
– 8						
– 2,35						
$2\frac{1}{3}$						
$sen\,30^o$						
$cos\,30^o$						
$\sqrt[4]{81}$						
$\sqrt{5}$						
$\frac{0}{3{,}1}$						
$\frac{5}{0}$						
$\pi = 3{,}141592...$						
$\pi \approx 3{,}14$						
$\sqrt{(-9)}$						
$log_2 3$						
$log_3 0$						
$log\,100$						
$log(-10)$						

5. ¿Cuáles de los números de la columna (A) del ejercicio anterior son irracionales?

6. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{\sqrt{0{,}25}-0{,}01\cdot 20}{0{,}03}$ b) $\dfrac{5\cdot 2^5\cdot 2^3}{\sqrt{2}}$ c) $\sqrt{\dfrac{14^{7{,}01}\cdot 14^{-4{,}01}}{5^3\cdot 1{,}4^3}-\dfrac{2}{\sqrt{2}}}$ d) $28-\dfrac{1}{3}\cdot 3{,}14\cdot\left(\dfrac{2{,}6}{2}\right)\cdot\dfrac{5}{2}$

7. Halla el valor de la variable despejada utilizando los datos que se dan en cada caso.

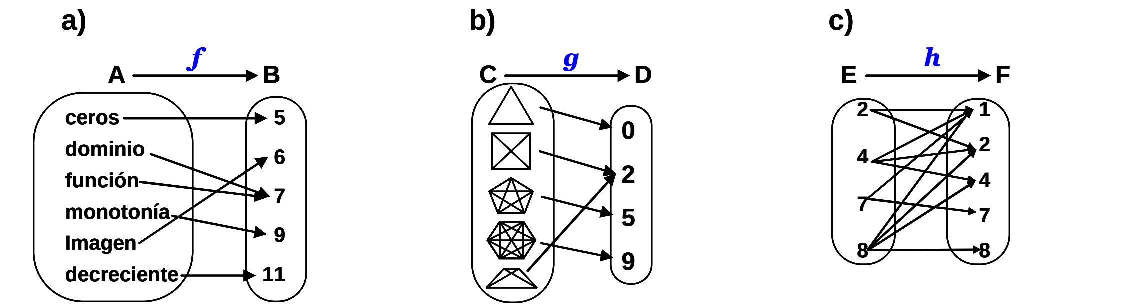
a) $a=\sqrt{c^2-b^2}$ — $c = 20$ cm : $b = 16$ cm

b) $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ — $\pi \approx 3{,}.14$; $r = 2{,}5$ dm

c) $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ — $\pi \approx 3{,}.14$; $r = 2{,}12$ m ; $h = 32$ cm

d) $A_T = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ — $\pi \approx 3{,}.14$; $r = 2{,}3$ dm ; $h = 32$ cm

8. ¿Analiza cuál de las siguientes correspondencias representa una función? Fundamenta la respuesta en cualquiera de los casos.



A cada palabra del conjunto "A" se le hace corresponder la cantidad de letras que la forma.

A cada polígono del conjunto "C" se le hace corresponder el número de diagonales que posee.

A cada número del conjunto "E" se le hace corresponder sus divisores.

9. ¿Analiza cuál de los siguientes conjuntos de pares ordenados representa una función? Fundamenta la respuesta en cualquiera de los casos.

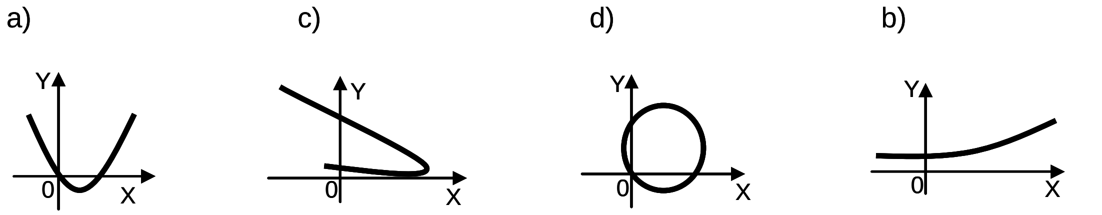
a) $P=\left\{(-1;-1);\left(-\frac{1}{2};0\right);(0;1);\left(\frac{1}{2};2\right);(10;11);(0{,}3;1{,}6)\right\}$

b) $Q=\left\{(5;4);(0;1);(5;3);(3;2);\left(\frac{1}{10};7\right)\right\}$

c) $S=\left\{(-3;9);\ (0;0);\ (0{,}5;0{,}25);\ \left(\frac{3}{4};\frac{9}{16}\right);\ (3;9);\ (6;36)\right\}$

d) $R=\left\{\left(\frac{1}{2};-1\right);\ (1;0);\ (2;1);\ (8;3);\left(2^{7};7\right)\right\}$

10. ¿Cuáles de los siguientes gráficos representa una función?. Fundamenta tu respuesta en cada caso.



11. Sea f una función real definida en un subconjunto de R, tal que $y = f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1}$.
Determina cuáles de los siguientes pares ordenados pertenecen a la función f: $A\left(-1;-\dfrac{1}{3}\right)$, $B(0;0)$, $C\left(\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right)$ y $D\left(\dfrac{1}{2},3\right)$.

12. Analiza si los siguientes puntos pertenecen al gráfico de la función f, cuya ecuación es $f(x) = \dfrac{5^{9-x} - x^2}{log_2(x+1)}$:

a) $A(7;-8)$ b) $B(0;1)$ c) $C(3;78)$ d) $D(-2;5)$

13. Evalúa la función definida por la ecuación $f(x) = \dfrac{2x^3 - 4x^2 + 8x - 16}{2x^5 - 32x}$ para $x_1 = 0{,}5$ y $x_2 = 2$.

14. Sea la función *h* definida por: $h(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 35}{3^{x-5} - 1}$

a) Analiza si el par ordenado $(7;3)$ pertenece a la función h.

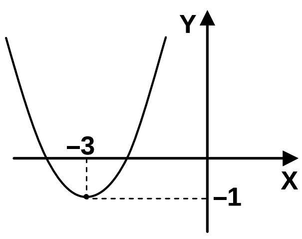
b) Halla los puntos donde el gráfico de h corta al eje de las abscisas.

Teleclase 2: Funciones y ecuaciones

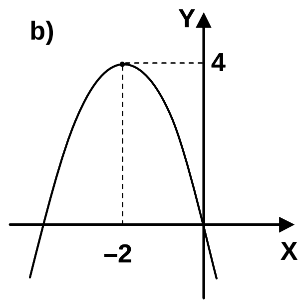
15. Halla las coordenadas de los puntos de intersección de los gráficos de las funciones f y g, definidas en un subconjunto de R por las través de las ecuaciones siguientes: $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x+2}$ y $g(x) = \dfrac{x^2 + 8x + 13}{x+2}$

16. Los siguientes gráficos corresponden a dos funciones cuadráticas definidas para todos los números reales por una ecuación de la forma $y = x^2 + px + q$. Determina en cada caso:

a)



b)



a) Los valores de los parámetros reales p y q.

b) La ecuación de la función en la forma $y=(x+d)^2+e$ (d y e parámetros reales)

c) El conjunto imagen de cada función.

17. Sea la función definida para todo R por la ecuación $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4}\boldsymbol{x}^2-2\boldsymbol{x}+3$.

a) Traza su gráfico.

b) Determina

- La imagen de la función.
- Un intervalo donde la función sea decreciente.
- Un intervalo donde la función es negativa y otro donde tome valores positivos.
- Los ceros.
- El valor máximo y el mínimo.

c) ¿Cuál es la imagen de la función que se origina si se restringe el dominio de $\boldsymbol{g}$ al intervalo $0\leq\boldsymbol{x}\leq 6$?

d) ¿Por qué la función $\boldsymbol{g}$ no es par?

18. Sea la función f cuya ecuación es $y=f(x)=1-(x+2)^2$. Selecciona la respuesta correcta en cada caso.

18.1) El conjunto imagen de la función f es:

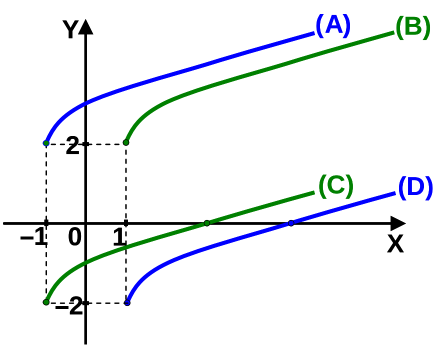
a) ___ Todos los números reales b) ___ $y\geq 1$ c) ___ $y<1$ d) $y\leq 1$

18.2) En el intervalo $-3<x<-1$ la función f es:

a) ___ negativa b) ___ creciente c) ___ positiva d) par

Teleclase 3: Funciones y ecuaciones

19. La figura muestra cuatro representaciones gráficas A, B, C y D de funciones cuyas ecuaciones tienen la forma $y=\sqrt{x+d}+e$.



19.1) Selecciona el gráfico que corresponde a la función cuya ecuación es $f(x)=\sqrt{x+1}-2$.

19.2) Halla el dominio de definición, los ceros y la imagen de la función f.

19.3) Selecciona la respuesta correcta:

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

a) A la función g, cuya ecuación es de la forma $g(x)=\sqrt{x+d}+e$ y que tiene dominio de definición $\{x\in R: x\geq 1\}$ e imagen $\{y\in R: y\geq 2\}$, le corresponde el gráfico:

a) ___ (A) b) ___ (B) c) ___ (C) d)___ (D)

b) Las cuatro funciones representadas por los gráficos A, B, C y D cumplen la propiedad:

a) ___inyectivas y decrecientes b) ___ no tienen inversa
c) ___ inyectivas y crecientes d) ___ pares y crecientes

19.4) Complete los espacios en blanco de forma tal que obtengas una proposición verdadera:

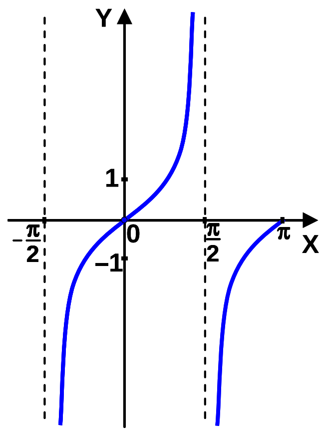
a) Si a y b son dos elementos del dominio de definición de f tales que $a<b$, entonces $f(a)$____$f(b)$ porque f es una función ____________ en todo su dominio.

b) La ecuación de la inversa de la función f es _______________ en el dominio de definición ______________.

c) La función g está definida por la ecuación _________________.

d) El gráfico de g se interseca con el gráfico de $\text{h}(\text{x})=\text{x}-7$ en el punto ________

20. La figura muestra el gráfico de la función definida por la ecuación $f(x)=tan\,x$ en el intervalo real $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi$.



20.1) En el intervalo dado determina:

a) Dominio de definición e imagen de la función f.

b) Un intervalo donde la función es positiva.

c) Un intervalo donde la función tiene un cero.

d) Un intervalo donde la función sea creciente y otro donde sea decreciente.

e) Tres pares ordenados que pertenezcan a la función.

20.2) Traza el gráfico de la función definida por $g(x)=cot\,x$ en el mismo sistema de coordenada y en el mismo intervalo $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi$, y halla:

a) Las abscisas de los puntos de intersección de los gráficos de ambas funciones en el intervalo real.

b) El dominio de definición, la imagen y los ceros de la función g.

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

Teleclase 4: Funciones y ecuaciones

21. Sean las funciones f, g y h, cuyas ecuaciones son $f(x)=log_3(x+1)+2$, $g(x)=2^{x+5}-\frac{1}{8}$ y $h(x)=2^{x+2}-8\sqrt{4^x}$

21.1) Halla:

a) El dominio de definición de las funciones f y h.

b) La imagen de la función f.

c) Los ceros de las tres funciones.

21.2) Calcula el valor de la variable para que el par ordenado pertenezca a la función indicada: $\left(-\frac{2}{3};a\right)\in f$; $(b;-5)\in f$; $(c;-2)\in h$

21.3) Traza el gráfico de la función f en un sistema de coordenadas rectangulares.

22. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\left(\sqrt{2}\right)^{2x}\cdot 2^{\frac{1}{x-3}}-32=0$ b) $log\,5^{x^2-3x}-2\,log\frac{1}{5}=0$ c) $\sqrt{log\,x}+log\sqrt{x}=1{,}5$

Teleclase 5: Funciones y ecuaciones

23. Sea la función f definida por la ecuación $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-2$ en el intervalo $I=[-2;2]$.

a) Completa la siguiente tabla sobre las propiedades de la función f en el intervalo I.

Función f		Ecuación de la función inversa de f $\left(f^{-1}\right)$	
Imagen		Ecuación	
Ceros		Dominio	
Monotonía		Imagen	

b) Traza, en el intervalo dado, el gráfico de la función f en un sistema de coordenadas rectangulares.

c) Conociendo que $g(x)=x+1$ halla $(fog)_{(x)}$ y $(gof)_{(x)}$.

24. Halla el conjunto solución de la siguiente ecuación: $log_2\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)+log_2^2(x-1)=3$

25. Sea la función h, definida por la ecuación $h(x)=\sqrt[3]{2x+3}-1$.

a) ¿Es 2 la imagen de algún valor del dominio de la función *h*? Fundamenta tu respuesta.

b) Calcula $2\sqrt[3]{7}-1-h(2)$

c) Se puede comprobar que la función *h* es biyectiva, determina la ecuación de la función inversa.

Teleclase 6: Funciones y ecuaciones

26. Sean las funciones $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ definidas, respectivamente, por las siguientes ecuaciones:

$$p(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}-3 \quad \text{y} \quad q(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x+3)-1$$

26,1) Comprueba que p y q son funciones inversas.

26.2) Representa la función p en un sistema de coordenadas rectangulares.

26.3) Determina el dominio, la imagen y la monotonía de ambas funciones.

26.4) Selecciona la respuesta correcta

a) Si el dominio de la función q se restringe a $-3\leq \boldsymbol{x}\leq -1$ entonces su imagen, en ese intervalo, es:

___ $1\leq \boldsymbol{y}\leq 3$ ___ $-2\leq \boldsymbol{y}\leq 6$ ___ $-3\leq \boldsymbol{y}\leq 6$ ___ $-1\leq \boldsymbol{y}\leq 3$

b) La función q es:

___ Decreciente y par ___ Decreciente e impar

___ Inyectiva y creciente ___ Inyectiva y decreciente

c) El gráfico de la función q tiene como asíntota:

___ $\boldsymbol{y}+3=0$ ___ $\boldsymbol{x}+3=0$ ___ $\boldsymbol{y}-3=0$ ___ $\boldsymbol{x}-1=0$

26.5) Halla los valores reales de x para los cuales se cumple la igualdad $p(x-1)+q(x+1)=84$

27. Halla el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $4^{\sqrt{x^2-8}}\cdot 2^{x-1}=\log_2 32+11$

b) $25^{\frac{1}{x}}\cdot 5^{\frac{x+4}{x+1}}=125$

c) $\log_2\left(\sqrt{x+3}+2\right)+\log_2 x=2$

d) $9^{\log_2(\boldsymbol{x}+1)}\cdot 3^{\log_2(\boldsymbol{x}+2)}=10^{\log 3}$

e) $\log_3\left(x^2-6x+1\right)-\log_3(x-3)=-1$

f) $\log\left(\sqrt{x}+3\right)=2\log\sqrt{2x-3}$

g) $\sqrt{x+\frac{3}{x}}-\sqrt{x}=2-\left(\frac{1}{17}\right)^0$

h) $\sqrt{\log x^2+3}+\sqrt{\log x+1}=\log_{1,2}1{,}2$

i) $\sqrt{2^{a+1}+5}-3=\sqrt{2^{a-1}}-1$

j) $\log_2\left(3^{x+1}-71\right)=\log_2\left(3^{x-1}+11\right)-1$

k) $0{,}5\log(2x+3)=\log\left(1-\sqrt{x+1}\right)$

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

28. Determina todos los valores del parámetro $\boldsymbol{m}$ para los cuales x = 6 es una solución de la ecuación $\sqrt{\boldsymbol{m}-1+\sqrt{6\boldsymbol{m}+12}}=3$. Investiga si para los valores de $\boldsymbol{m}$ hallados la ecuación tiene alguna otra solución diferente de 6.

Teleclase 7: Resolución de sistemas de ecuaciones

29. Halla el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x+3y=9 \\ x-y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}=3 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{6}{y}=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a+b+c=16 \\ 3a+2b=21 \\ b-c=-1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2-y=6x-5 \\ x-y=5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3^{x+y}-243=0 \\ log_2 x+log_2(x-2y)=5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \sqrt{x+y+z}=3 \\ \dfrac{x+y}{z+1}=1 \\ 2^{2x+z}-2^{11-y}=0 \end{cases}$

Teleclase 8: Resolución de problemas

30. Dos fábricas debían producir entre ambas, según sus respectivos planes de producción, 360 bicicletas. La primera de ellas cumplió su plan al 112% y la segunda al 110% y entre las dos produjeron 400 bicicletas.
    a. ¿Cuál era el plan de producción de cada fábrica?
    b. ¿Cuántas bicicletas produjo cada fábrica?

31. La novena etapa de la vuelta ciclística a Cuba, corrida entre las ciudades de Santa Clara y Cienfuegos, tuvo tres metas intermedias: Ranchuelo, Cruces y Abreus. Al llegar a Cruces se había recorrido el doble de la distancia recorrida hasta Ranchuelo disminuida en 1 km y aun faltaban 64 km para llegar al poblado de Abreus situado en el km 97 de la etapa.
    a) ¿A cuántos kilómetros de Santa Clara se ubicó la meta volante de Ranchuelo?
    b) Si un ciclista mantiene una velocidad constante de 30 km/h, en qué tramo se encuentra cuando hayan transcurrido 145 minutos de iniciada la carrera.

32. En los dos últimos años los ministerios de la agricultura y de la azúcar instalaron, para el abasto de agua a la ganadería, 1016 equipos entre molinos de viento y bombas de bajo consumo. El número de molinos excede en 86 al cuádruplo de las bombas instaladas.
    a) ¿Cuántos equipos de cada tipo fueron instalados por estos dos ministerios en los últimos dos años?

b) ¿Qué porcentaje del total de equipos instalados representan los molinos de vientos?

33. Dos trabajadores de una UBPC recolectaron durante tres días de trabajo un total de 104 cajas de tomates. Si el trabajador más productivo cediera al otro el 20% de las cajas recolectadas por él, entonces ambos tendrían la misma cantidad de cajas recolectadas. ¿Cuántas cajas de tomates recolectó cada trabajador? ¿En qué porcentaje superó la recolección de uno de los trabajadores la del otro?

34. En un mercado agropecuario hay dos sacos que contiene entre ambos 174 Kg. de arroz. Si del saco más pesado se extrae el 25% del arroz que contiene y se echa en el otro, entonces ambos sacos tienen igual peso. ¿Qué cantidad de arroz contiene cada saco?

35. En un agromercado hay dos sacos de arroz completamente llenos y entre ambos pesan 540 lb. Cuando se ha vendido $\frac{2}{3}$ del saco A, se le añade a éste 50 lb. de arroz que se han extraído de saco B, quedando en este último 40 lb. de arroz más que las contenidas en ese momento en le saco A. Halla el peso en libras de cada saco antes de comenzar la venta.

Teleclase 9: Resolución de problemas

36. Una máquina "A" puede realizar un trabajo en dos jornadas de trabajo y otra máquina del tipo "B", en 8 jornadas. ¿En cuantas jornadas pueden realizar el trabajo las dos máquinas trabajando conjuntamente?

37. Un tanque se puede llenar por una llave en 6 horas y por otra de menor capacidad, en 8. ¿Qué tiempo demorará en llenarse el tanque, si estando completamente vacío, se abren las dos llaves a la vez?

38. Un tanque completamente vacío, se puede llenar en 3 horas utilizando una llave y vaciarse en 7 horas por un desagüe que tiene en el fondo ¿Que tiempo demora en llenarse el tanque si, estando completamente vacío, se abren la llave y el desagüe a la vez?

39. ¿Cuántos litros de una disolución que tiene el 74% de alcohol se deben mezclar con 5 litros de otra disolución que tiene el 90% de alcohol, si se debe obtener una disolución al 84% de alcohol?

40. ¿Cuántos galones de agua destilada de deben mezclar con 50 galones de una disolución de alcohol al 30% para obtener una disolución al 25% de alcohol?

41. Dos aviones diferentes parten a las 18:00 horas de un mismo aeropuerto con igual sentido y dirección y a las 20:00 horas están a 400 km uno del otro. Si la velocidad del más lento es $\frac{3}{5}$ la del otro, determina:

a) ¿A qué distancia del aeropuerto de donde salieron está cada uno a las 20:00 h?

b) ¿Cuál es la velocidad media con la cual viaja cada avión?

Teleclase 10: Resolución de problemas

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

42. Una de las obras que se construyen para la celebración de un evento deportivo es abastecida por camiones de 8,0 m^3 y 4,5 m^3 de capacidad. Si el lunes llegaron 33 viajes que trasportaron 187 m^3 de arena.
    a) ¿Qué cantidad de arena se transportó el lunes utilizando los camiones de menor capacidad?
    b) ¿Qué cantidad de arena se transportó utilizando los camiones 8,0 m^3 durante los primeros cuatro días de la semana, si el abastecimiento de arenas se mantuvo de la misma forma que el lunes?

43. El precio de una cierta tonelada de materia prima en el mercado mundial al cierre del año 2009 era el doble que en enero de 2002. De enero de 2010 hasta la fecha ha aumentado en veinte dólares más. La tonelada de esa materia prima, producida en Cuba, cuesta solo una vez y media el precio que tenía en enero de 2002 en el mercado mundial. Si en ligar de comprar 225 t en el mercado mundial, a los precios actuales, se compra la tercera parte de esa cantidad en este mercado y el resto se produce en Cuba, entonces se gastan 7500 dólares menos.
    a) ¿Cuál era el precio de la tonelada de esta materia prima en enero de 2002?
    b) Halla cuánto aumentó el precio de la tonelada de esta materia prima en el mercado mundial, de enero de 2002 hasta la fecha.

44. En un taller de piezas de repuesto había en total 120 piezas de dos tipos. Una empresa adquirió la mitad de las piezas del tipo (I) y tres cuartos de las piezas del tipo (II). Si lo que quedó es el 40% de las piezas que había inicialmente, calcula cuántas piezas de cada tipo había al principio.

Teleclase 11: Resolución de inecuaciones

45. Halla el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:
    a) $-(n-3)>5n+15$
    b) $4\left(2x+\dfrac{1}{4}\right)>2-2(2-x)$
    c) $2{,}5y\geq 0{,}5(8y+1)-(y+1)$
    d) $2+\dfrac{3x}{2}\leq\dfrac{2x+1}{3}-1$

46. Sea la función f definida por la ecuación $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4x+3}-\dfrac{1}{2}$.
    a) Halla los puntos donde el gráfico de f corta los ejes de coordenadas.
    b) Halla los valores reales del dominio donde la función f toma valores negativos.

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

c) Comprueba que el par ordenado $(x;-2)$ no puede ser un elemento de la función f.

d) ¿Puede la función f tomar valores menores que $y=-\frac{1}{2}$? Fundamenta tu respuesta.

47. Halla todos los valores reales del parámetro p para los cuales la ecuación $sen\,x=2p+1$ tiene soluciones reales.

Teleclase 12: Resolución de inecuaciones

48. Halla el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

a) $x^2-4x<140$

b) $(r-1)^2\geq r+1$

c) $t(t-1)\leq 1-t$

d) $2n(2-n)\geq 4-5(2-3n)$; $(n\in Z)$

49. Sean f y g dos funciones tales que $f(x)=x^2+8x+12$ y $g(x)=2x+3$.

a) Representa los gráficos de ambas funciones en un mismo sistema de coordenadas rectangulares.

b) Halla los valores reales del dominio de estas funciones para los cuales $f(x)>g(x)$.

50. Halla el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}\geq 0$

b) $\dfrac{x^2+4}{x-10}<0$

c) $\dfrac{3}{x-3}\leq\dfrac{1}{x^2-3x}$

d) $\dfrac{(2x-1)(3-x)}{x+4}>0$

e) $\dfrac{x^2(x-4)}{x^2-6x+8}\geq 0$

f) $\dfrac{1}{x-2}\leq\dfrac{x^2+3x}{x^2-3x+2}$

51. Sea la función g definida por $g(x)=log_{0,5}(x-3)-2$.

a) Traza su gráfico en un sistema de coordenadas rectangulares.

b) Halla todos los valores reales del dominio para los cuales la función g es no negativa.

Teleclase 13: Resolución de inecuaciones

52. Halla el dominio de definición y los ceros de las siguientes funciones logarítmicas.

a) $g(x)=log_2 \dfrac{x^2}{(1-x)(x+2)}$ b) $f(x)=log_{(x-1)} \dfrac{2x}{x+3}$

53. Sea la función h dada por la ecuación $h(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$

a) Halla el dominio de definición y los ceros de h.

b) Halla los valores reales de la variable x para los cuales h toma valores negativos.

c) Halla todos los valore reales del dominio de h donde se cumple que $2 \leq h(x) \leq 5$.

Teleclase 14: Resolución de inecuaciones

54. Dada la expresión $A(x)=\dfrac{\sqrt{x+5}}{log_6(4-2x)}$

54.1) Comprueba que $A(-4)=\dfrac{1}{1+log_6 2}$

54.2) Selecciona la respuesta correcta:

La expresión A está definida para los valores reales de x que satisfacen simultáneamente las condiciones:

___a) $\begin{cases} x+5>0 \\ 4-2x>0 \end{cases}$ ___b) $\begin{cases} x+5>0 \\ 4-2x>0 \end{cases}$ ___c) $\begin{cases} x+5\geq 0 \\ 4-2x>0 \\ x\neq 1{,}5 \end{cases}$ ___d) $\begin{cases} x+5>0 \\ 4-2x>0 \\ x\neq 1{,}5 \end{cases}$

55. Sean las funciones reales f, g y h, definidas por las ecuaciones:

$$f(x)=3^{2+\sqrt{x+5}} \quad , \quad g(x)=4^{3x} \quad y \quad h(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+5}$$

a) Determina el dominio y la imagen de la función f.

b) Calcula los valores reales para los cuales se cumple que $g(x) \geq h(x)$.

c) Halla las coordenadas del punto en que el gráfico de la función h corta al eje "y".

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

Teleclase 15: Cálculo trigonométrico

56. Calcula $\sqrt[3]{\dfrac{sen\left(-880^o\right)}{cos\,250^o}}$

57. Comprueba que:

a) $\dfrac{cos\left(90^o-\alpha\right)-3sen\left(180^o+\alpha\right)}{3cos\left(360^o-\alpha\right)+sen\left(90^o-\alpha\right)}=tan\,\alpha$ b) $\dfrac{cos\left(-120^o\right)+tan\,135^o}{sen\,240^o}=\sqrt{3}$

58. Dado $A=3\,cot^2\,120^o\cdot cos\,30^o\cdot sen\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)$ y $B=1-cos^2\dfrac{2\pi}{3}$. Comprueba que $A-B=sen(2k+1)\pi$; $(k\in Z)$

59. Se conoce que $sen\alpha=\dfrac{\sqrt{13}}{7}$ y "α" es la amplitud de un ángulo del primer cuadrante. Halla $cos\,\alpha$ y $tan\,\alpha$.

Teleclase 16: Identidades trigonométricas

60. Demuestra que las siguientes igualdades son identidades trigonométricas. Halla conjunto de valores admisibles en los cuales se verifica la identidad.

a) $\dfrac{1}{1+cos\,x}+\dfrac{cos\,x}{sen^2x}=\dfrac{1}{sen^2x}$

b) $\dfrac{1+sen^2x}{cos\,x}=\dfrac{2}{cos\,x}-cos\,x$

c) $\dfrac{1}{1-senx}+\dfrac{1}{1+senx}=\dfrac{2}{cos^2\,x}$

d) $\dfrac{2\,cos^2\,x-1+sen^2x}{1-cos^2\,x}=cot^2\,x$

e) $\dfrac{2senx\cdot cos\,x-senx}{-4sen^2x+3}=\dfrac{senx}{2\,cos\,x+1}$

f) $\dfrac{2}{sen2x}-tan\,x=cot\,x$

g) $cot^2\,x-tan^2\,x=\dfrac{4\,cot\,2x}{sen2x}$

h) $tan\,2x=\dfrac{2\,tan\,x}{1-tan^2\,x}$

61. Dadas las expresiones trigonométricas, $A = \dfrac{\cot x\, sen\, x + \cos 2x}{\cos x + 1}$ y $B = 2\cos x - 1$

a) Determina para qué valores de la variable no está definida la expresión A.

b) Prueba que para todos los valores admisibles de la variable, se cumple que $A = B$.

Teleclase 17: Ecuaciones trigonométricas

62. Halla el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $3sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 4\cos\dfrac{\pi}{3}$ $\qquad \left(0^o \le \alpha \le 360^o\right)$

b) $senx - \cos^2 x = 1$ $\qquad (x \in R)$

c) $2sen^2\theta - 4 = 5\cos\theta$ $\qquad \left(0 \le \theta \le \dfrac{3\pi}{2}\right)$

d) $5sen\beta - 2senx = 0$ $\qquad (x \in R)$

e) $sen2x - \tan x = 0$ $\qquad (x \in R)$

f) $sen2x + \cos 2x = 2$ $\qquad (-\pi \le x \le 3\pi)$

g) $2sen2x\cot x - 3\cos x = \cos 2x$

63. Sea la ecuación $4sen^2 x - 2(k+1)senx + 1 = 0$; $\left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

a) Halla las soluciones de la ecuación para $k = \dfrac{3}{2}$.

b) ¿Para qué valores positivos de k, la ecuación tiene una sola solución?

Teleclase 18: Ecuaciones trigonométricas

64. Halla el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$\sqrt{1 + 4\cos^2 x} - \frac{sen2x}{\cos x} = 1$$

65. Resuelve la siguiente ecuación en el dominio dado.

$$4^{\log_4 \sqrt{4\cos 2x - \cos x - 1}} - 2 = 0 \qquad \{x \in R : 0 \le x \le 2\pi\}$$

66. Halla las coordenadas del punto donde se cortan los gráficos de las funciones dadas por las ecuaciones: $f(x) = \sqrt{10 + \dfrac{9}{2}\cos x}$ y $g(x) = 3 + \cos x$.

67. Sean $f(x) = \dfrac{1 + sen\, Ax}{\cos Ax}$ y $g(x) = \dfrac{A - 1 + \tan x}{A - 1 - \tan x}$

a) Demuestre que si $A = 2$, la igualdad $f(x) = g(x)$ es una identidad para todos los valores admisibles de la variable x.

b) Considera $A = 1$ y resuelve la ecuación $f(x) = -1$.

Teleclase 19: Resolución de triángulos. Grupo de Teoremas de Pitágoras

68. Indica si son verdaderas (V) o falsas (F) las siguientes proposiciones. Fundamenta cada caso, de ser posible, mediante una ilustración gráfica.

1) ___ Los ángulos interiores de un triángulo cualquiera suman 180^o.

2) ___Todo ángulo exterior de un triángulo es menor que el interior adyacente a él.

3) ___ La amplitud de cualquiera de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a la suma de las amplitudes de los dos ángulos interiores no adyacentes a él.

4) ___La suma de las amplitudes de los tres ángulos exteriores de un triángulo cualquiera es igual a 360^o.

5) ___ En todo triángulo, al lado de mayor longitud se opone el ángulo de mayor amplitud.

6) ___ A lados iguales se oponen ángulos iguales.

7) ___En todo triángulo rectángulo existen dos ángulos interiores agudos.

8) ___En todo triángulo rectángulo existe un ángulo interior que tiene una amplitud de 30^o.

9) ___Si a, b y c son, respectivamente, las longitudes de los catetos y de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, entonces c = 2a, si y solo si, el ángulo opuesto al cateto de longitud "a" mide 30^o.

10) ___Dos ángulos inscritos sobre una misma cuerda, en una circunferencia, tienen igual amplitud.

11) ___Dos ángulos inscritos en una circunferencia, sobre un mismo arco, tienen igual amplitud.

12) ___ Todo ángulo central tiene igual amplitud que el semiinscrito que abarca el mismo arco que él en una circunferencia.

13) ___Un ángulo inscrito y otro semiinscrito sobre una misma cuerda en una circunferencia, tienen la misma amplitud.

14) ___Si en una circunferencia dada, α es la amplitud de un ángulo inscrito sobre el arco AB y β, la del ángulo central que abarca también el arco , entonces se verifica que $2\alpha = \beta$.

15) ___Todo ángulo inscrito sobre el diámetro de una circunferencia, tiene una amplitud de 90^o.

16) ___Si $\angle AP_1B = \angle AP_2B = 90^o$, donde P_1 y P_2 son puntos de una circunferencia de centro O y diámetro AB, entonces, $P_1 = P_2$.

17) ___Si $\angle ABC = 90^o$, donde A, B y C son puntos de una circunferencia, entonces $\overline{AC}$ es el diámetro.

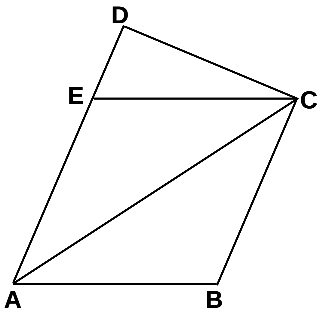
18) ___Todo ángulo inscrito en una circunferencia, que abarca una cuerda menor que el diámetro, es agudo.

19) ___ Dos ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan cuerdas iguales, tienen la misma amplitud.

20) ___En todo cuadrilátero convexo, inscrito en una circunferencia, la amplitud de dos ángulos interiores opuestos suman 180^o.

Teleclase 20: Cálculo geométrico. Áreas y perímetros

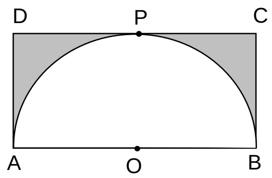
69. En la figura, $ABCD$ es un trapecio rectángulo en C y D; $ABCE$ es un paralelogramo, $\overline{AC}$ es la bisectriz del $\angle DAB$ y $\angle CAB = 25^o$.



a) Halla la amplitud de $\angle CEA$ y $\angle ECD$.

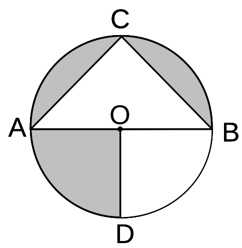
b) Clasifica el ΔACE de acuerdo a la amplitud de sus ángulos interiores y la longitud de sus lados.

c) Clasifica el paralelogramo $ABCE$.



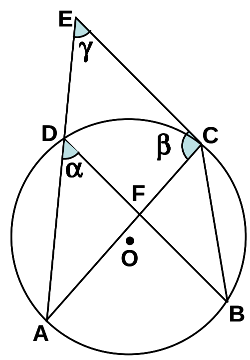
70. En la figura se tiene una semicircunferencia de centro en O de diámetro $\overline{AB} = 2{,}4$ dm, que es tangente en el punto P al lado $\overline{CD}$ del rectángulo ABCD. Calcule el área sombreada.

71. En la figura, el triángulo ABC está inscrito sobre el diámetro $\overline{AB} = 4{,}4$,m de una circunferencia de centro O. D punto de la circunferencia, tal que $\overline{OD} \perp \overline{AB}$. Halle el área de la región sombreada.



Teleclase 21: Cálculo geométrico. Ángulos, circunferencia y círculo

72. puntos A, B, C y D pertenecen a la circunferencia de centro en O, y E es un punto exterior.



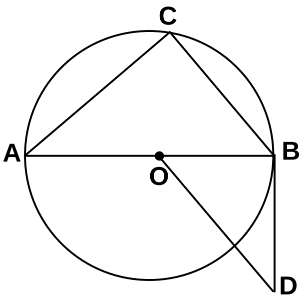
- Las cuerdas $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se cortan en el punto F.
- $\overline{BD} // \overline{CE}$, $\angle DBC = 35^o$ y $\angle AFD = 119^o$

a) Halla la amplitud de los ángulos α, β y γ.

b) Clasifica el cuadrilátero $BCED$.

c) EC no es una tangente a la circunferencia en C. Fundamenta esta afirmación.

d) ¿Cuál e la amplitud del $\angle BOA$?

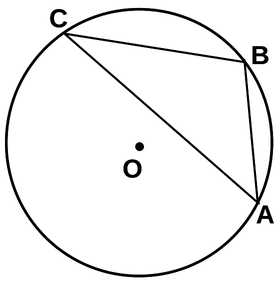


73. El punto C pertenece a la circunferencia de centro O y diámetro $d = \overline{AB}$. $\overline{OD} // \overline{CB}$ y $\overline{BD}$ es tangente a la circunferencia en el punto B.

e) Prueba que los triángulos ABC y DBO tienen sus ángulos interiores respectivamente iguales

f) Traza un ángulo inscrito a la circunferencia que tenga la misma amplitud que $\angle CAB$.

g) Traza un ángulo semiinscrito a la circunferencia que tenga la misma amplitud que $\angle ABC$.

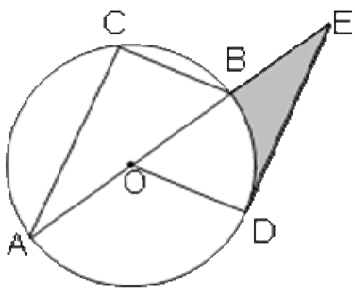


74. El triángulo ABC está inscrito en la circunferencia de centro en O y radio r.

$\angle BCA = 30^o$, $\angle CAB = 45^o$ y $\overline{AB} = 8{,}0\,cm$.

Halla el perímetro del triángulo ABC y el área del círculo.

75. Los puntos C y D pertenecen a la circunferencia de centro en O y diámetro $d = \overline{AB} = 12\,cm$.



- $\overline{DE}$ tangente en D a la circunferencia.
- E es un punto exterior tal que $E \in AB$.
- $\angle CAB = 30^o$ y $\overline{OD} // \overline{BC}$.

a) Halla la amplitud de los ángulos interiores en el $\Delta\ ODE$.

b) El triángulo ODB es equilátero. Fundamenta esta afirmación.

c) Halla el área de la región sombreada.

Teleclase 22: Cálculo geométrico

76. Un cateto de un triangulo ABC, rectángulo en C, mide $12\,cm$. La longitud de la hipotenusa excede en $4{,}0\,cm$ a la longitud del otro cateto.

a) Halla el área del ΔABC.

b) Determina la amplitud del mayor ángulo interior agudo en el ΔABC.

c) Halla la longitud de la altura relativa a la hipotenusa.

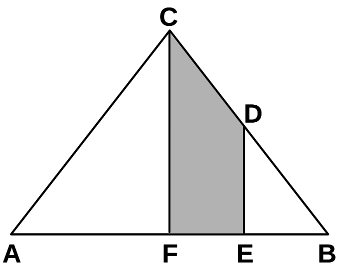
77. La bases mayor de un trapecio isósceles mide 12 cm y la altura es el doble de la bases menor.

a) Calcula la longitud de la altura y el perímetro del trapecio, conociendo que su área es 160 cm^2.

b) Halla la amplitud de los ángulos interiores del trapecio.

78. En la figura se muestra un triángulo ABC isósceles de base $\overline{AB}$ que tiene un área $A = 12\ cm^2$.

- $D \in \overline{CB}$.
- F y E están situados sobre $\overline{AB}$.
- $\overline{DE} \perp \overline{AB}$, $\overline{DE} // \overline{CF}$ y $\overline{AB} = 6{,}0\ cm$.
- D es punto medio de $\overline{FB}$



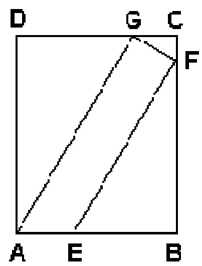
b) Calcula el área del cuadrilátero $FEDC$ y el perímetro del ΔABC.

c) Halla la amplitud de los ángulos interiores del ΔABC.

Teleclase 23: Ejercicios de geometría plana

79. En el rectángulo ABCD, los puntos E, F y G pertenecen a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$ respectivamente.

$\overline{AG} \perp \overline{GF}$, $\overline{AG} // \overline{EF}$, $\angle CGF = 30^o$, $\overline{AD} = 4\sqrt{3}$ y $\overline{GC} = \sqrt{3}$



Halla:

a) La amplitud de los ángulos DAG y FEB.

b) El perímetro del trapezoide ABFG.

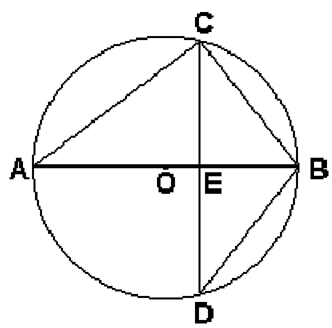
c) El área del cuadrilátero AEFG.

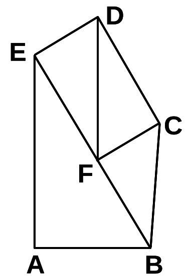
80. En la figura, $E \in \overline{AB}$ y es el punto medio de la cuerda $\overline{CD}$ en la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$. $\overline{AE} = 9{,}0\ cm$ y $\overline{CD} = 12\ cm$.

Halla:

a) La amplitud de los ángulos CBE y CDB.

b) El área del círculo de centro O y diámetro $\overline{AB}$.





81. En la siguiente figura se tiene:
- $EFCD$ es un rectángulo y EAB un triángulo rectángulo en A.
- F es el punto medio de $\overline{EB}$ y $\overline{AE} // \overline{FD}$.

a) $\angle BEA = \angle CDE$ .Fundamenta esta igualdad.

b) Clasifica el cuadrilátero $FBCD$, y calcula su área conociendo que $\overline{AB} = 3{,}0\ cm$ y $\angle ABE = 60^o$.

82. Sea l la longitud de una cuerda de una circunferencia $\mathcal{C}$ de centro O y diámetro d,

El ángulo principal o vertical de un triángulo isósceles, cuya base mide $8{,}0\ cm$, tiene una amplitud de 54^o. Calcula el perímetro y el área del triángulo dado.

Teleclase 24: Igualdad y semejanza de triángulos

83. Construye una circunferencia de centro en O y diámetro $\overline{AB} = 10\ cm$.

1) Traza un segmento $\overline{BD}$, $(\overline{BD} < \overline{AB})$ tangente a la circunferencia y completa el triángulo *OBD.*

2) Traza la cuerda $\overline{AC}$ paralela a $\overline{OD}$ y completa el triángulo ABC.

3) Prueba que los triángulos ABC y $OBD.$, así construidos, tienen sus ángulos interiores respectivamente iguales.

4) ¿Podemos afirmar que $\Delta ABC = \Delta OBD$? Fundamenta tu respuesta.

5) ¿Podemos afirmar que $\Delta ABC \sim \Delta OBD$? Fundamenta tu respuesta.

6) Si adicionamos el dato $\overline{AB} = \overline{OD}$ ¿se puede asegurar que $\Delta ABC = \Delta OBD$? Fundamenta tu respuesta.

7) Si en lugar de la igualdad de lados dada anteriormente, adicionamos el dato: $\angle ABC = 30^O$ ¿se puede asegurar que $\Delta ABC = \Delta OBD$? Fundamenta tu respuesta.

8) Sitúa un punto E sobre el arco AB de manera que los triángulos ABC y AEC sean iguales.

9) Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales qué otro dato es necesario conocer para asegurar que son iguales.

84. Di si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones. Fundamenta en el caso de ser falsa.

a) ___ Si dos triángulos son iguales, entonces se puede asegurar que son semejantes.

b) ___ Si dos triángulos son semejantes, entonces se puede asegurar que son iguales.

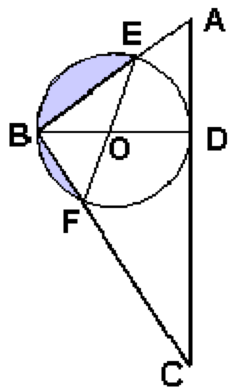
c) ___Si dos triángulos son semejantes de razón k, entonces los perímetros correspondientes también están en esta razón.

d) ___Si dos triángulos son semejantes de razón k, entonces sus áreas también están en esta razón.

e) ___ Que dos triángulos tengan sus ángulos interiores respectivamente iguales, es una condición suficiente para que sean iguales.

f) ___ Que dos triángulos tengan sus ángulos interiores respectivamente iguales, es una condición necesaria para que sean iguales.

Teleclase 25: Igualdad y semejanza de triángulos



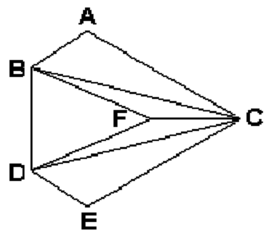
85. En la figura, $\overline{EF}$ y $\overline{BD}$ son diámetros de la circunferencia de centro O. $\overline{AC}$ es tangente en D, los puntos B, F y C están alineados, al igual que B, E y A.

a) Demuestra que: $\Delta BCD \sim \Delta ABD$.

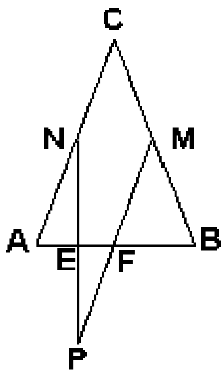
b) Calcula el área sombreada si: $\overline{AD} = 2\sqrt{3}$ cm y $\angle ACB = 30^0$.

86. En la figura, el triángulo BDF es isósceles de base $\overline{BD}$, $\overline{FC}$ bisectriz del $\angle ACE$, $\angle BFC = \angle DFC$ y $\overline{AC} = \overline{CE}$.

Prueba que $\overline{AB} = \overline{DE}$



Teleclase 26: Igualdad y semejanza de triángulos

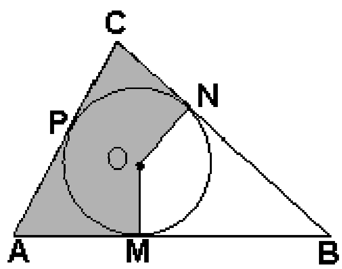


87. En la figura, $\overline{MN}$ es una paralela media del ΔABC, isósceles de base $\overline{AB}$. F es el punto medio de $\overline{AB}$, $\overline{NP}$ mediatriz de $\overline{AF}$ y M, F y P puntos alineados.

a) Prueba que: $\Delta MNP \sim \Delta AEN$ y $\Delta MCN = \Delta BMF$.

b) Halla el área del ΔAEN, conociendo que $\angle P = 30^0$ y $\overline{AB} = 8{,}0$ cm.

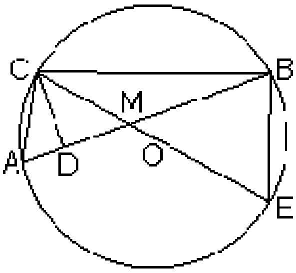
88. El punto O es el incentro en el triángulo ABC. M, N y P son los puntos de tangencia de los lados del triángulo con la circunferencia. Calcula el área sombreada y la longitud de la circunferencia inscrita, conociendo que:



$\overline{BC} = 8{,}1$ cm , $\overline{AC} = 7{,}2$ cm, $\overline{AM} = 5{,}4$ cm y $\angle ABC = 53{,}1^0$.

Teleclase 27: Igualdad y semejanza de triángulos

89. En la figura, A y B son puntos de la circunferencia de centro en O y diámetro $\overline{CE}$. $\overline{CD}$ es altura del ΔABC. M es el punto de intersección de $\overline{AB}$ con $\overline{CE}$.

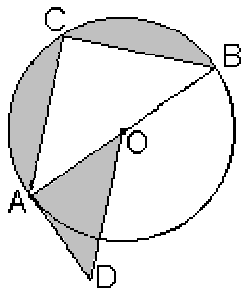


Prueba que:

a) $\overline{AC} \cdot \overline{BC} = \overline{CD} \cdot \overline{CE}$

b) $\overline{ME} \cdot \overline{MC} = \overline{MA} \cdot \overline{MB}$

90. En la figura, C es un punto de la circunferencia de centro en O y diámetro $\overline{AC}$. AD es tangente a la circunferencia y AB // DO.

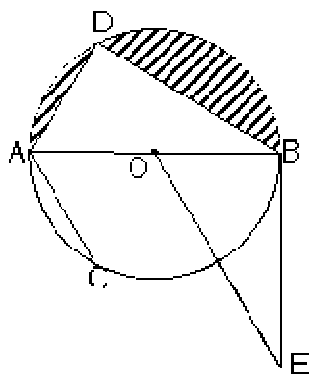


a) Demuestra que $\Delta ABC \sim \Delta ADO$

b) Prueba que $r^2 = \frac{1}{2}\overline{OD} \cdot \overline{AC}$

c) Halla el área de la región sombreada si se conoce que $\overline{AC} = 8{,}0\,\text{cm}$ y $\overline{AB}$ = 10 cm.

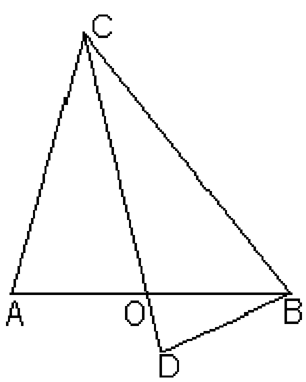
91. Los puntos C y D pertenecen a la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$. La recta EB es tangente a la circunferencia, $\overline{AB}$ es bisectriz del ángulo DAC y $\overline{AC} // \overline{OE}$.



a) Prueba que $\Delta ABD \sim \Delta OEB$.

b) Demuestra que $\overline{OB}^2 = \overline{AD} \cdot \frac{\overline{OE}}{2}$.

c) Si se conoce que la longitud de la circunferencia es 10π dm y $\overline{AD} = 60$ cm, calcula el 75% del área sombreada.



92. La figura muestra tres triángulos isósceles OCA, DBO y BCD cuyas bases son $\overline{AO}$, $\overline{OD}$ y $\overline{DB}$ respectivamente. Se conoce que $\overline{CB} = 8{,}0\,\text{cm}$, $\overline{DB} = 4{,}0\,\text{cm}$ y O es el punto de intersección de las rectas AB y CD.

a) Demuestra que O pertenece a la bisectriz del ángulo BCA.

b) Halla la longitud de $\overline{AB}$.

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

Teleclase 28: La recta en el plano

93. Dos centros experimentales de cría de ganado vacuno A y B se encuentran de un pueblo P a 10 km al Oeste y 5,0 km al Norte; y 10 km al Este y 20 km al Norte respectivamente.

a) ¿A qué distancia se encuentra un centro de otro?

b) Se quiere construir un pueblo M para los trabajadores de dichos centros de forma tal que equidiste de ambos y sea la menor distancia posible, ¿cuál sería su ubicación respecto al pueblo P?

c) Demuestra que el pueblo M representa, en este caso, el circuncentro del triángulo formado por el pueblo P y los centros experimentales A y B.

Teleclase 29 y 30: La recta en el plano

94. Dados los puntos M(– 1; 1), N(2; 4) y P(0; 6)

1) Representa el triángulo MNP en un sistema de coordenadas rectangulares de unidad 1,0 cm.

2) Determina la longitud del segmento $\overline{MN}$.

3) Halla las coordenadas R, punto medio del segmento $\overline{MN}$.

4) Halla las coordenadas del punto A conociendo que N es el punto medio del segmento del segmento $\overline{AM}$.

5) Calcula la pendiente de la recta MN.

6) Determina la amplitud del ángulo de inclinación de la recta MN respecto al semieje positivo OX .

7) Halla la ecuación cartesiana de la recta MN.

8) Halla el área del triángulo determinado por la recta MN y los ejes de coordenadas.

9) Clasifica el triángulo MNP, según sus lados y sus ángulos.

10) Determina la longitud de la altura relativa al lado mayor del triángulo MNP.

11) Escribe la ecuación cartesiana de la mediana relativa al lado mayor del triángulo MNP.

12) Calcula el área del círculo circunscrito al triángulo MNP.

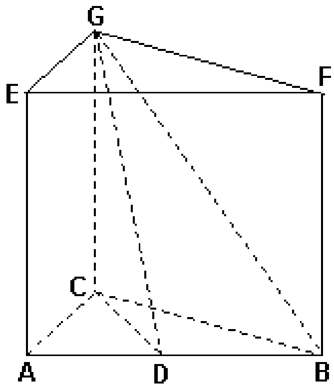
13) Calcula las coordenadas del baricentro del triángulo MNP.

14) Escribe la ecuación cartesiana de la recta que es paralela a MN y pasa por el punto P.

15) ¿Cuál debe ser el valor de k, para que la recta r de ecuación $k^2x+(k-2)y+k=0$ sea paralela a la recta MN?

16) ¿Cuál debe ser el valor de k, para que la recta r de ecuación $k^2x+(k-2)y+k=0$ sea perpendicular a la recta MN?
17) Determina las coordenadas del vértice Q del paralelogramo MQPN.
18) Escribe la ecuación de la bisectriz del ángulo MNP, interior al triangulo.
19) Los puntos R(a; 3) y S(1; b) pertenecen a la recta MN. Calcula la longitud de $\overline{RS}$.
20) Prueba que los puntos M, N y T(5; 7) están alineados.

Teleclase 31: Geometría del espacio

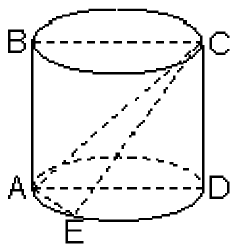


95. ABCEFG es un prisma recto cuya base es en triángulo ABC, rectángulo en C. $\overline{CD}$ es la altura relativa al lado $\overline{AB}$ en el triángulo ABC.

a) Calcula el área del ΔBDG conociendo que $\overline{DG}$=15 cm y $\overline{BG}$=17 cm.

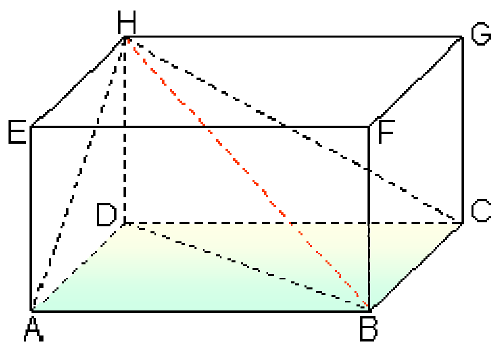
b) Calcula el volumen de la pirámide BCDG. Si se conoce además que $\overline{CD}$ = 9,0 cm.

96. En un prisma de base triangular todas sus caras laterales son cuadrados. Si el volumen del prisma es 54 cm^3, calcula el área lateral.



97. En el dibujo está representado un cilindro circular recto de diámetros paralelos $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ con $\overline{BC}$ = 15cm. La altura del cilindro mide 20 cm y $\overline{AE}$ = 7,0 cm, calcula el área del triángulo AEC.

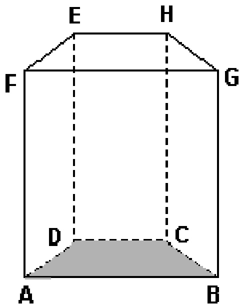
98. La figura muestra un prisma ABCDEFGH en el cual la diagonal interior $\overline{BH}$ forma un ángulo de 30º con el plano de la base. Las caras menores del prisma tienen, cada una, un área de $20\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ y $\overline{DB}=10\,\text{cm}$.



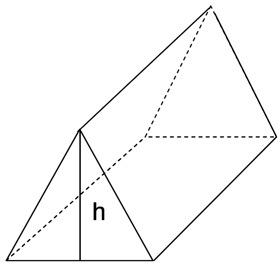
a) Halla el volumen del prisma.

b) Halla el volumen de la pirámide de base ABCD y vértice en el punto H.

Teleclase 32: Geometría del espacio

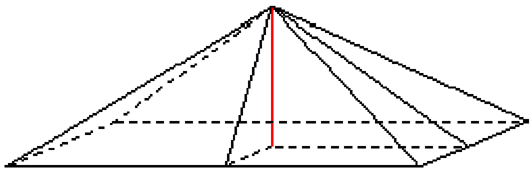


99. La figura muestra un prisma recto de altura h_p = 46 cm. La base ABCD es un trapecio. Las diagonales $\overline{AE}$, $\overline{DH}$ y $\overline{CG}$, de las caras, forman con el plano base ángulos de 66,5°. Si $\overline{AB} = 44\text{ cm}$, calcula el volumen del prisma.

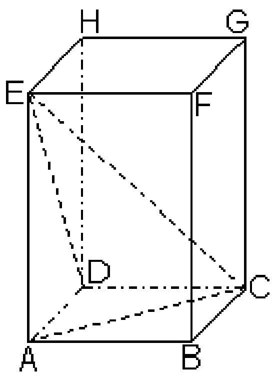


100. La figura nos muestra la armazón de una casa de campaña donde todas sus aristas miden 5,0 m.
   a) Calcula su altura h.
   b) ¿Qué cantidad de lona se necesita para forrarla?
   c) Calcula su volumen.

Teleclase 33: Geometría del espacio

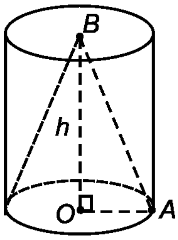


101. Halla el volumen de una pirámide que tiene por base un rectángulo y su altura tiene una longitud de 4,0 cm. Las caras laterales son triángulos isósceles y sus alturas con respecto al lado desigual forman ángulos de 30° y 45° respectivamente con la base de la pirámide.



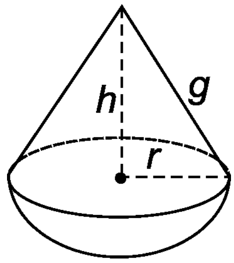
102. La base de un prisma recto ABCDEFGH es un rombo en el cual $\overline{AC} = 12$ cm, $\overline{DE}$ = 32 cm y $\overline{EC}$ (diagonal interior al prisma) forma un ángulo de 60º con el plano de la base. Halla el volumen del prisma ABCDEFGH y el área lateral de la pirámide ACDE

Teleclase 34: Geometría del espacio



103. Con una pieza cilíndrica circular recta de madera, de 12 dm de altura, se quiere construir un cono circular recto de igual altura y base que el cilindro, como se muestra en la figura. Si el ángulo que forma la altura del cilindro y la generatriz del cono tiene una amplitud de 37º. Calcula la cantidad de madera que se desperdicia al construir el cono si se conoce que $\overline{OB}$ es perpendicular al radio $\overline{OA}$ de la base común de los cuerpos representados.

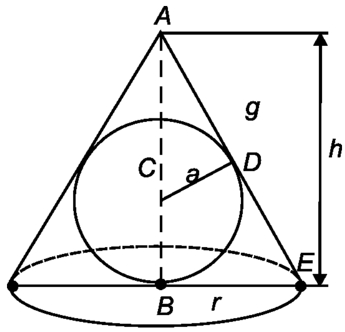
104. En la figura se ha representado un cuerpo compuesto por un cono circular recto de radio *r,* altura *h* y generatriz *g,* y una semiesfera de radio igual al del cono. Se conoce que el volumen total del cuerpo es $243\pi\left(2+\sqrt{3}\right)$ dm^3 y que la generatriz del cono forma un ángulo α = 30º con su altura. Calcula:



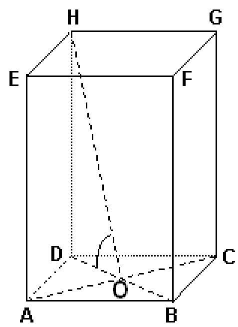
a) El volumen del cono circular recto.

b) El área lateral del cuerpo.

105. En la figura se representa un cono circular recto de radio *r,* altura *h* y generatriz *g,* en el cual está inscrito una esfera de centro *C* y radio *r;* $\overline{CD} \parallel \overline{DE}$. Demuestra que el volumen del cono viene dado por la expresión $V=\dfrac{a^2h^3\pi}{3(h-a)^2}$



Teleclase 35: Geometría del espacio



106. El prisma recto ABCDEFGH tiene como bases los rombos ABCD y EFGH. Si el perímetro del rombo es de 52 cm, ∠DOH = 60^0 y $\overline{AC}=2\overline{BD}+4\,\text{cm}$. Calcula el volumen del prisma y el área del triángulo HOC.

107. Una esfera de centro O y radio r tiene inscrito un cono circular recto de altura h_c tal que $2h_c = 3r_e$. Demuestra que: $\dfrac{V_{cono}}{V_{esfera}}=\dfrac{9}{32}$.

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

III) Algunos temarios de exámenes para la autoevaluación

Examen 1

1. Lee detenidamente la pregunta y responde:

1.1 Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escribe (V ó F) en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

a) ___La correspondencia definida de R en R donde a cada número real x se le hace corresponder $\frac{1}{x}$ es una función.

b) ___La función real f dada por la ecuación $f(x) = \sqrt{x} + 3$ no tiene ceros.

c) ___La función g definida en los reales cuya ecuación es $g(x) = 1 - 2x$ es monótona decreciente en todo su dominio.

d) ___El conjunto imagen de la función h dada por la ecuación $h(x) = 2^{3x} - 1$ es $\{y \in R\text{: } y \geq -1\}$.

1.2 Selecciona la respuesta correcta marcando con una X en la línea dada.

1.2.1 La expresión $\log \frac{3-x}{x}$ está definida para todo

a) ___$\{x \in R\text{: } x \neq 0\}$ b) ___$\{x \in R\text{: } 0 < x \leq 3\}$
c) ___$\{x \in R\text{: } 0 < x < 3\}$ d) ___$\{x \in R\text{: } x < 0 \text{ ó } x > 3\}$

1.2.2 Sean las rectas r_1 y r_2 de ecuaciones r_1: $\alpha x - y + 3 = 0$ y r_2: $y = -4x + 2$.
El valor de α para el cual las rectas r_1 y r_2 se cortan perpendicularmente es:

a) ___ -4 b) ___ $\frac{1}{4}$ c) ___ 4 d) ___ $-\frac{1}{4}$

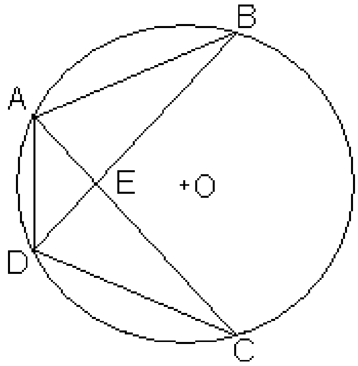
1.2.3 Si ordenamos en forma ascendente las variables x; y; z para:

$x = \text{sen } 15^0$ $y = \log 0{,}1$ $z = \sqrt{\sqrt{16^{-1}}}$ se obtiene que:

a)___ $x < y < z$ b) ___ $y < z < x$ c) ___ $z < x < y$ d) ___ $y < x < z$

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

2. En la circunferencia C(o,u),
A, B, C, D puntos que pertenecen a la circunferencia,
$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se intersecan en el punto E.
$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ y $\overset{\frown}{AB} = 60^0$.



a) Prueba que $\overline{BE} = \overline{EC}$

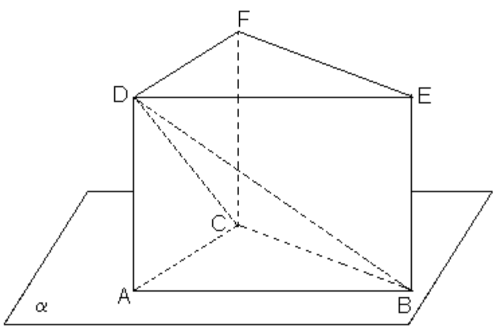
b) Calcula la amplitud del $\angle BEC$

3. Resuelve la siguiente ecuación, para $0 \leq x \leq 2\pi$, $(x \in \Re)$

$$4^{\log_4 \sqrt{4\cos 2x - \cos x - 1}} - 2 = 0$$

4. En las pasadas elecciones del poder popular realizadas en nuestro país, en una circunscripción asistió a las urnas el 96% del total de electores. En dicha circunscripción fueron propuestos tres candidatos, María, Luís y José. Al realizar el conteo, se comprobó que todos los votos emitidos fueron válidos, que María obtuvo las dos quintas partes del total de votos, que Luís obtuvo 120 votos más que José y que María obtuvo el doble de los votos obtenidos por José.
a) ¿Cuántos votos fueron válidos en esa circunscripción?
b) ¿Cuántos electores tenía esa circunscripción?

5. La figura muestra un prisma recto ABCDEF cuya base inferior es el triángulo ACB rectángulo en C el cual se encuentra sobre el plano α.
La distancia entre los planos que contienen a las bases del prisma es de 8,0 cm, la oblicua $\overline{DC}$ forma con la base inferior del prisma un ángulo φ tal que $\tan \varphi = \frac{4}{3}$ y el perímetro de la cara rectangular ABED del prisma es igual a $8(2 + \sqrt{21})$ cm.



a) Prueba que el triángulo DCB es rectángulo en C.
b) Calcula el volumen de la pirámide ABCD, la cual está inscrita en el interior del prisma.

Examen 2

1. Selecciona la respuesta correcta marcando con una x sobre la línea dada.

1.1 Si $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ y $\alpha \in$ III cuadrante, entonces:

________ a) $\tan\alpha = \frac{4}{5}$ ________ b) $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$

________ c) $\tan\alpha = \frac{4}{3}$ ________ d) $\tan\alpha = \frac{3}{4}$

1.2 El conjunto imagen de la función f, dada por su ecuación $f(x) = -(x+3)^2 - 2$ es:

________ a) $\operatorname{Im} f = \{y \in \Re : y > -2\}$ ________ b) $\operatorname{Im} f = \{y \in \Re\}$

________ c) $\operatorname{Im} f = \{y \in \Re : y \leq -2\}$ ________d) $\operatorname{Im} f = \{y \in \Re : -3 \leq y \leq -2\}$

1.3 Si $\log_5 x + \log_5(3x-1) = \log_5 2$, entonces la solución de la ecuación es:

________ a) $x_0 = 1$ ó $x_1 = -\frac{2}{3}$ ________ b) $x_0 = 1$

________ c) $x_0 = \frac{1}{3}$ ________ d) $x_0 = -1$ ó $x_1 = \frac{1}{3}$

1.4 La pendiente de la recta que pasa por los puntos A(–2; 4) y B(1; –3) es:

________ a) $m = \frac{7}{3}$ ________ b) $m = -1$

________ c) $m = -\frac{3}{7}$ ________ d) $m = -\frac{7}{3}$

1.5 El conjunto dominio de la función f, dada por ecuación $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-2x}}$, es:

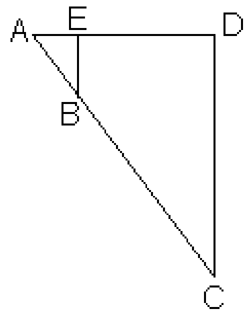
________ a) $x \in (-\infty; 2)$ ________ b) $x \in (2; +\infty)$

________ c) $x \in (-\infty;\ 2]$ ________ d) $\{x \in R /\ x \neq 2\}$

2. En el torneo NORCECA de voleybol femenino que se celebró en el mes de Diciembre del 2007 en la ciudad de Monterrey, México; el equipo cubano debutó con victoria de 3 tiempos a 0 frente al equipo de Canadá, con los siguientes marcadores en cada tiempo: (25 - 20), (25 - 23) y (25 - 23). La principal anotadora por el equipo cubano fue Zoila Barros, le siguieron Nancy Carrillo y Yumilka Ruiz, las que anotaron, cada una, un punto menos que Zoila y le siguió Rosir Calderón que anotó dos puntos menos que "la Barros". Si entre las cuatro anotaron el 64% de los puntos del equipo, ¿cuántos puntos anotaron cada una de estas atletas?

3. En la figura, triángulo ACD, rectángulo en D. E, punto que pertenece a $\overline{AD}$. B, punto que pertenece a $\overline{AC}$; $\overline{BE} \perp \overline{AD}$; $\overline{BE} = \frac{2}{9}\overline{DE}$;

$\overline{BC} = 30\text{ cm}$; $\operatorname{sen}\angle ACD = \frac{3}{5}$.



a) Demuestra que el triángulo ACD es semejante al triángulo ABE.

b) Halla el área del triángulo ACD.

4. Sean f, g y h las funciones tales que: $f(x) = \frac{1}{\cos x} + \tan x$; $g(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x}$ y

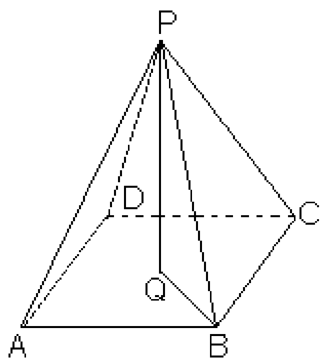
$h(x) = \cos x$.

a) Prueba que $\frac{f(x)}{g(x)} = h(x)$ es una identidad para todos los valores admisibles de la variable x.

b) Halla todas las soluciones de la ecuación $\frac{f(x)}{g(x)} = (h(x))^2 \quad (x \in \Re)$

5. En la figura se muestra una pirámide recta ABCDP de base cuadrada ABCD con un volumen de $36\sqrt{6}$ cm^3; las aristas laterales forman un ángulo de 60° con la base y $\overline{PQ}$ es su altura.

Calcula el área lateral de dicha pirámide.



Examen 3

1. Lee detenidamente la pregunta y responde:

1.1. Selecciona la respuesta correcta y la marcas con una X.

a). Si los $\frac{3}{25}$ de un número es 2400. Los $\frac{3}{5}$ de ese mismo número es:

A. 172,8 ____ B. 288 ____ C. 12000 ____ D. 20000 ____

b). Si $\log_a 9 = 4$, el valor de a es:

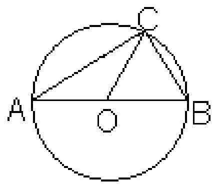
A. 3 ____ B. $\sqrt{3}$ ____ C. 3^{-1} ____ D. $\frac{1}{81}$ ____

c). Se tienen tres puntos en el plano L(-3;2), M(0;6) y N(x;3). ¿Cuál es el valor que debe tomar x para que las rectas LM y MN sean perpendiculares?

A. 5 ____ B. 4 ____ C. 3 ____ D. $\sqrt{7}$ ____

1.2. Completa los espacios en blanco.

a). En la circunferencia de centro O;
A, B y C son puntos de la circunferencia;
los puntos A, O y B están alineados.
Si $\angle$ BAC = 34^0, entonces



I. Se tiene que $\angle$BOC = 68^0 por ____.

II. La amplitud del $\angle$ABC es igual a _____ por ser complementario con el ángulo BAC.

b). Sean los triángulos ABC y DEF dos triángulos semejantes con $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}} = 3$; si por A_{ABC} y A_{DEF} se denotan las áreas de los triángulos ABC y DEF respectivamente, entonces la razón $\frac{A_{DEF}}{A_{ABC}}$ es igual a _________.

2. Dadas las funciones reales f, g y h cuyas ecuaciones son:

$f(x) = x^2 - 9x + 14$; $g(x) = 3x - 9$; $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

a). ¿Cuál es el dominio de la función h?

b). Calcula los ceros de la función h.

c). Determina la imagen de la función f.

d). ¿Para qué valores de su dominio la función g es negativa?

3. Sean las expresiones trigonométricas:

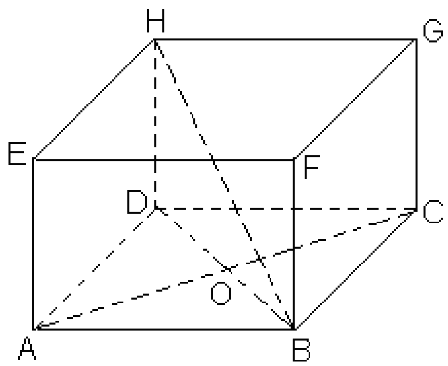
$C = 2\text{sen}^2x - 1$, $D = \tan x \cdot \cos x - \frac{\text{sen}2x}{\text{sen}x} + \text{sen}^2x - 1$ y $P = D + 2\cos x + \cos^2 x$

a). Prueba que P = senx para todos los valores admisibles de x.

b). Determina todas las $x \in \mathfrak{R}$ con $x \in [0;2\pi]$ tales que C = P.

. El terreno cercado que se tiene para pastar las reses de una vaquería tiene forma de rombo de 10 kilómetros de lado. Se quiere ampliar dicho terreno y para ello se prolongan en la misma dirección y sentido las cercas de dos de sus lados opuestos hasta formar un trapecio. Si las prolongaciones de los dos lados opuestos están en la razón $\frac{1}{2}$, la razón entre la altura del rombo y el lado menor del trapecio es $\frac{1}{3}$ y la razón entre la altura del rombo y el lado mayor del trapecio es $\frac{1}{4}$. Calcula el área en que se amplió dicho terreno.

5. En la figura. ABCDEFHG es un prisma recto cuya base es el cuadrado ABCD, de diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ que se cortan en O. $\overline{BH}$ diagonal del prisma;
$\overline{BH} = 10\sqrt{2}$ cm y $\overline{AB} = 5{,}0$ cm.



a) Determina la amplitud del ángulo DBH.

b) Halla el área lateral del prisma.

c) Halla el volumen del prisma.

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

Examen 4

1. Lee detenidamente la pregunta y responde:

1.1. Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escribe (V ó F) en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

a). _____ La correspondencia definida de $\Re \to Z$ donde a cada número real x se le hace corresponder su opuesto es una función.

b). _____ Si r_1 y r_2 son dos rectas paralelas, entonces sus pendientes son iguales.

c). _____ Si $x \in \Re$ y $x > 0$, entonces $\log_8 x = \frac{1}{3}\log_2 x$.

d). _____ La operación de radicación siempre se puede realizar en el conjunto de los números reales.

1.2. Selecciona la respuesta correcta y márcala con una cruz (x) en la línea dada.

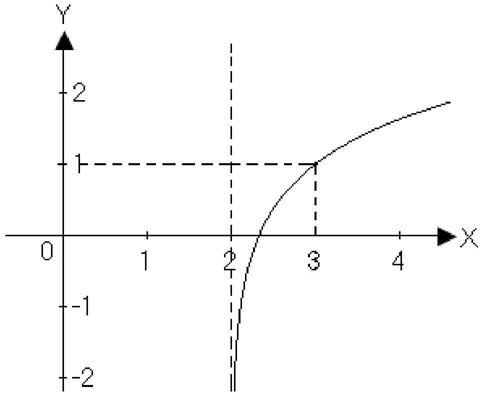
1.2.1. El gráfico que se muestra corresponde a la ecuación:

_______ a). $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-2) + 1$

_______ b). $y = \log_3(x - 2) + 1$

_______ c). $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+1) - 2$

_______ d). $y = \log_3(x + 1) - 2$



1.2.2. En un triángulo ABC se conoce que el lado $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$ u, el lado $\overline{BC} = 5\sqrt{2}$ u y dos de sus vértices son los puntos A y C de coordenadas (1,1) y (6,-4) respectivamente. Este triángulo se puede clasificar según la longitud de sus lados en:

____a). equilátero ____b). isósceles ____c). escaleno

1.2.3. Los valores reales negativos para los cuales se cumple la condición $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4} > 1$ son:

____a). $-2 < x < 2$ ____b). $x < -2$ o $x > 2$ ____c). $-2 < x < 0$ ____d). $0 < x < 2$

2. Determina el conjunto solución de la siguiente ecuación para $0 < x < 2\pi$. $(x \in \Re)$

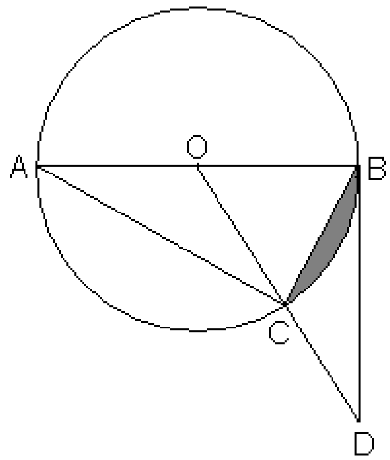
$$2^{\cos 2x + 3\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x} = \frac{1}{4} \cdot 32^{\operatorname{sen} x}$$

3. En la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$ igual a 24 cm, se ha trazado el segmento $\overline{BD}$ tangente a la circunferencia en el punto B.

- $\overline{BC} = \overline{OA}$
- O, C y D puntos alineados.

a) Prueba que los triángulos DBO y ACB son iguales.

b) Calcula el área de la región sombreada.

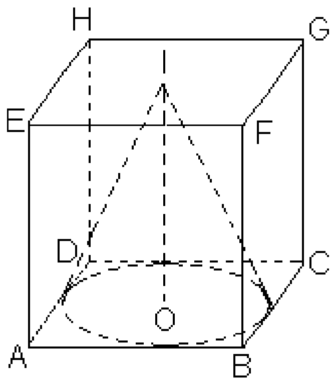


4. Dos brigadas de estudiantes de un IPUEC se propusieron recoger conjuntamente en un día 280 cajas de tomates. Después de terminar la jornada de la mañana, la Brigada 1 había recogido las dos quintas partes de lo que se propuso y la Brigada 2 el 60%, quedando por recoger entre las dos 142 cajas. ¿Cuántas cajas de tomates le faltan por recoger a cada brigada en la jornada de la tarde para completar el total de cajas que se propusieron?

5. En la figura se tiene un prisma recto ABCDEFGH de base cuadrada ABCD y altura $\overline{AE}$ en el cual se ha inscrito un cono circular recto.

El área total del cono es de 235,5 cm^2 y el ángulo φ que forma la generatriz del cono con la altura es 30^0.

Determina el volumen del prisma.



Examen 5

1. Lee detenidamente la pregunta y responde:

1.1 Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

a) ___ El conjunto imagen de la función h definida en $\Re$ por la ecuación $h(x) = (3)^{x-4} - 9$ es $\{y \in R\colon y \geq -9\}$.

b) ___ La función cuya ecuación es $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ es monótona decreciente en todo su dominio.

c) ___ La función g definida en $\Re$ por la ecuación $g(x) = (x - 1)^2 + 3$ es una función par.

d) ___ La función f definida por la ecuación $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ es negativa para todo valor real x tal que $x < 0$.

1.2 Selecciona la respuesta correcta marcando con una X en la línea dada.

1.2.1 El valor numérico de a en la ecuación de la función f definida en el conjunto de los números reales por $f(x) = ax^2 - 2x + a$ siendo $f(2) = 3$ es:

a) ___ 3 b) ___ $\frac{7}{5}$ c) ___ $\frac{5}{7}$ d) ___ 2.

1.2.2 Los valores de $x \in \Re$ para los cuales se cumple que $2^{3x-2} \geq 1$ son:

a) ___ $x < \frac{3}{2}$ b) ___ $x \geq \frac{3}{2}$ c) ___ $x \geq \frac{2}{3}$ d) ___ $x \geq -\frac{2}{3}$.

1.2.3 El punto de intersección entre la recta r, de ecuación r: $3x - 2y - 5 = 0$ y el eje "y" es:

a) ___ $(0; \frac{5}{3})$ b) ___ $(-\frac{5}{2}; 0)$ c) ___ $(\frac{5}{3}; 0)$ d) ___ $(0; -\frac{5}{2})$

1.2.4 El dominio de la función p definida por la ecuación $p(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}$ es:

a) ___ $\{x \in R\colon 0 \leq x$ ó $x > 1\}$ b) ___ $x \in R$ c) ___ $\{x \in R\colon x \neq 1\}$ d) ___ $\{x \in R\colon 0 < x < 1\}$

2. Sean las expresiones trigonométricas $P(x) = \text{sen } 2x\cos x + 2\text{sen}^3 x$ y $Q(x) = 2 \text{ sen } x$.

a) Prueba que $P(x) = Q(x)$ es una identidad para todos los valores admisibles de la variable x.

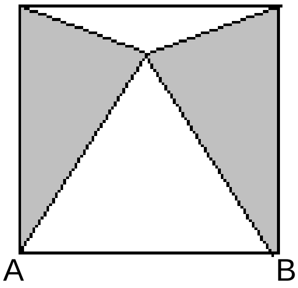
b) Determina todas las $x \in \Re$ con $x \in [0; 2\pi]$ tales que $P(x) = 2\cos 2x$

3. En la figura, ABCD es un cuadrado de 8,0 cm de lado.
E, punto interior de ABCD formándose el triángulo ABE equilátero.

D C
E

a) Demuestra que $\overline{DE} = \overline{CE}$.

b) Calcula el área de la región sombreada.

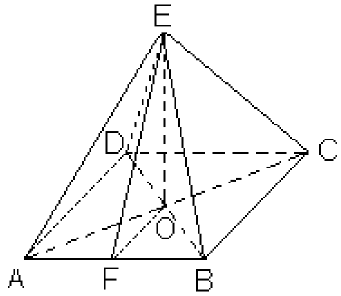


4. En los meses de agosto y septiembre del año pasado nuestro país fue azotado por los huracanes Gustav y Ike. Debido a las afectaciones provocadas se decidió, por parte de la dirección del país, asignar materiales de construcción en las zonas más afectadas como parte del programa para la recuperación. En un Consejo Popular de la provincia La Habana se asignaron 3 t más de cemento que de arena. Al transcurrir una semana, se determinó que aún faltaban por descargar el 20 % de la cantidad de toneladas de cemento y el 70 % de la cantidad de toneladas de arena lo cual equivale a que se tendrán que entregar 6,9 t más de arena que de cemento. ¿Cuántas toneladas de cada material se entregaron?

. 5 . Sea ABCDE una pirámide recta de vértice E, cuya base es el cuadrado ABCD.

O punto de intersección de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ del cuadrado ABCD y proyección del vértice E sobre el plano que contiene a la base de la pirámide.

F punto medio de $\overline{AB}$, $\angle$ AEB = 60^0 y $\overline{EF}$ = 12,0 cm.



a) Clasifica el triángulo EFB según sus ángulos. Justifica tu respuesta.

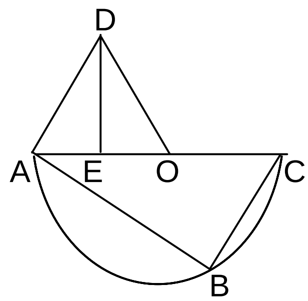
b) Calcula el volumen de la pirámide.

c) Halla el área lateral de la pirámide.

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

Examen 6

1. Lee detenidamente la pregunta y responde:
1.1 Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada. Justifica las que sean falsas.
a) ___ La correspondencia definida de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, en N donde a cada número natural se le hace corresponder sus divisores es una función.
b) ___ La función f definida en R por la ecuación f(x) = 3 cos x es impar.
c) ___ La imagen de la función h cuya ecuación es $h(x) = \dfrac{1}{x-2}$ es $\{y \in R: y \neq 0\}$.
d) ___ La función real g definida por la ecuación $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x - 1$ es monótona decreciente y positiva para todo valor real x, tal que x > 0.
1.3 Selecciona la respuesta correcta marcando con una X en la línea dada.
1.2.1 Los ceros de la función f de ecuación $f(x) = \log_2(-x^2 + 3) - 1$ son:
a) ___$x_0 = \sqrt{3}$ y $x_1 = -\sqrt{3}$ b) ___$x_0 = 0$ c) ___ $x_0 = 1$ d) ___$x_0 = 1$ y $x_1 = -1$
1.2.2 El dominio de la función t de ecuación $t(x) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}}$ es:
a) ___ $\{x \in R: x \neq 0\}$ b) ___ $\{x \in R: 0 \leq x \leq 1\}$
c) ___ $\{x \in R: x < 0 \text{ ó } x \geq 1\}$ d) ___ $\{x \in R: 0 < x \leq 1\}$
1.3 Completa los espacios en blanco de forma tal que obtengas una proposición verdadera.
De un triángulo ABC cuyos vértices son A(2;–3), B(5;–2) y C(4;1) se puede afirmar que:
1.3.1 Según sus ángulos el triángulo ABC se clasifica como _____________________.
1.3.2 La recta que contiene a la mediana relativa al lado $\overline{AC}$ interseca a este lado en el punto de coordenadas ____________.
2. En la figura se muestra un semicírculo de centro O y diámetro $\overline{AC}$ en que se ha inscrito el triángulo ABC.



- El triángulo AOD es isósceles de base $\overline{AO}$.
- E es el punto medio de $\overline{AO}$.
- $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.

a). Demuestra que: $\Delta ABC \sim \Delta DEO$.
b). Prueba que $\overline{EO} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\overline{BC} \cdot \overline{DO}}$.
c). Si $\angle CAB = 30^0$ y el área del triángulo AOD es de $4\sqrt{3}$ cm^2, calcula el perímetro del semicírculo.

3. Sea la expresión trigonométrica $A = \dfrac{\cos x - \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) + \operatorname{sen} x - 1}$.
a). Determina los valores reales de x para los cuales la expresión A está definida.

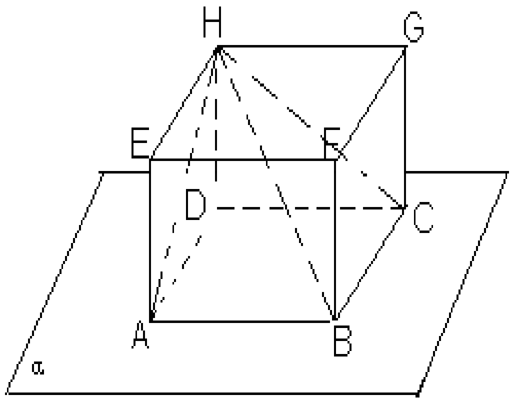
Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

b). Prueba que para todos los valores admisibles de la variable x se cumple que A = cot x.

4. Tres trabajadores sociales María, Luis y José visitaron cierto número de viviendas durante dos jornadas de trabajo con la finalidad de actualizar el cobro de los efectos electrodomésticos entregados como parte de los proyectos de la Revolución. Del trabajo realizado en la primera jornada se sabe que fueron visitadas por los tres un total de 100 viviendas, y que María visitó 5 casas menos que las que visitó Luis, sin embargo en la segunda jornada con respecto a la primera, la cantidad de viviendas visitadas por Luis disminuyó en un 10%, mientras que José aumentó en 5 la cantidad de viviendas visitadas. Si en esta última jornada se visitaron por ellos dos el 77% del total de viviendas visitadas por los tres durante la primera jornada. ¿Cuántas viviendas visitó Luis y cuántas José en esta última jornada?

5. La figura muestra un prisma recto ABCDEFGH cuya base inferior es el paralelogramo ABCD situado sobre el plano α.
En su interior se observa la pirámide ABCDH cuya base coincide con la del prisma.
La cara ABH de la pirámide es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es $\overline{HB}$.
Además de la pirámide se conoce que:

- El perímetro de su base es 14 cm.
- El volumen es12 cm^3.
- $\overline{AD} < \overline{AB}$.
- El ángulo que forma $\overline{HA}$ con su proyección es de 45^0.



a) Demuestra que la base de la pirámide es un rectángulo.

b) Calcula el área total del prisma.

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

Examen 7

1. Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

a). ______ Sea la función p definida en el conjunto de los números reales a través de la ecuación $p(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^{3x}$, entonces la función p es monótona creciente.

b). _____ El gráfico de la función q de ecuación $q(x) = 2\cos^2 x - 1$ definida en el intervalo $[0;2\pi]$, corta al eje x en dos puntos.

c). ______ Dada la expresión $E = \frac{3t+1}{t^3+2t^2-t-2}$, el dominio de definición de E es $\{t \in R, t \neq 1, t \neq -2\}$.

d). ______ La imagen de la función s definida en el conjunto de los números reales a través de la ecuación $s(x) = \frac{2x^3+7}{4}$ es el conjunto de los números reales.

e). ______ El gráfico de la función m cuya ecuación es $m(x) = 3\cos^2 x - 4$ corta al eje de las ordenadas en el punto (0;–1).

f). ______ Si A(1;4), B(–3;–2) y C(1;–2) son los vértices de un triángulo ABC, entonces $3x - y + 1 = 0$, es una ecuación de la recta que contiene a la mediana relativa al lado $\overline{BC}$.

g). ______ Se sabe que $A = \frac{1}{2}(a + b + c)r$, entonces $c = \frac{2A}{r} - a - b$.

h). ______ La función n definida en el conjunto de los números reales por la ecuación $n(x) = 2\text{sen}\, x$ es una función par.

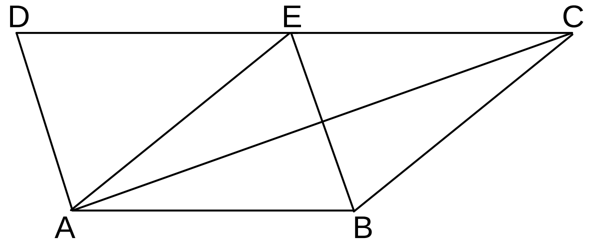
2. Dada la función f de ecuación $f(x) = \log_a(2x + 1)$.

a). Si el punto de coordenadas (62;3) pertenece al gráfico de f, determina el valor de a y escribe la ecuación de la función f.

b). Si $g(x) = \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{x^2+5x-3}\right)$, halla todos los valores reales de x para los cuales se cumpla que f(x) = g(x).

3. En la figura:

- ABCE es un rombo de 1,0 m de perímetro.
- C, D y E son puntos alineados.
- Δ AED isósceles de base $\overline{AD}$.
- $\overline{AD}$ = 14 cm.



a). Prueba que los triángulos BCE y AED son iguales.

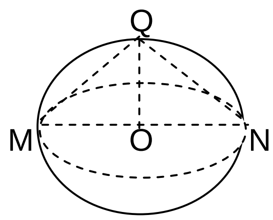
b). Calcula la longitud de $\overline{AC}$.

c). Halla el área del trapecio ABCD.

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

4. En días pasados se realizó una convocatoria para participar en un trabajo voluntario en la agricultura. Tanto el sábado como el domingo, el 60% del total de los participantes eran hombres. Se sabe que el sábado participaron 25 hombres más que mujeres. Si el domingo participaron 10 mujeres menos que el sábado, ¿cuántas personas más participaron el sábado que el domingo?

5. En la figura se muestra un cuerpo representado por una esfera maciza a la cual se le ha perforado un cono circular recto cuya altura es $\overline{OQ}$.



- O es el centro de la esfera y el punto medio de $\overline{MN}$
- M, N y Q son puntos de la esfera
- La generatriz del cono tiene una longitud de $3\sqrt{2}$ cm.

a). Determina la amplitud del ángulo formado por la generatriz del cono y su proyección sobre su base.
b). Calcula el volumen del cuerpo.

Francisco Rodríguez Meneses, Marta Álvarez Pérez, Armando Sandoval Torres, Eduardo Villegas Jiménez, Javier García Rusindo, Aurelio Quintana Valdés, Magalys Estévez Menéndez Y Emma García Enis

Examen 8

1. Lee detenidamente las preguntas y responde:

1.1. Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

a) _____ La función f definida en $\Re$ de ecuación f(x) = $\left(3^{-1}\right)^{x+2}$ es creciente en todo su dominio.

b) _____ La siguiente igualdad es cierta: $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \text{sen}^2 \frac{x}{2}$.

c) _____ La recta de ecuación x = 1 corresponde al gráfico de una función.

d) _____ El conjunto imagen de la función de ecuación y = $\frac{1}{x} - 2$ es $\{y \in R;\ y \neq -2\}$.

e) _____Si dos triángulos tienen sus tres ángulos respectivamente iguales, entonces dichos triángulos son iguales.

f) ____ La función g definida en $\Re$ de ecuación g(x) = 3senx es impar.

1. 2. Selecciona la respuesta correcta marcando con una x en la línea dada.

1.2.1. Si f(x) = $0{,}01(10)^x$, entonces log(f(x)) es igual a:

a) ____ $2x$ b) ____ $\frac{x}{2}$ c) ____ x – 2 d) ____ x + 0,002

1.2.2. El gráfico de la función f definida en $\Re$ de ecuación $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$, corta al eje de las abscisas en cuatro puntos. Uno de ellos tiene como coordenadas:

a) ____ (4,0) b) ____ $(-\sqrt{2}, 0)$ c) ____ (3,0) d) ____ (– 2,0)

1.2.3. Las rectas r_1 y r_2 de ecuaciones y = 8px + 4; y = p^2x + 5 respectivamente, son perpendiculares si:

a) ____ p = 2 b) ____ p = – 2 c) ____ p = – 1 d) ____ p = $-\frac{1}{2}$

1.2.4. Sean los puntos A (2;8) y B (6;4). El punto medio M del segmento $\overline{AB}$ tiene coordenadas:

a) ____ (4;6) b) ____ (3;6) c) ____ (7;3) d) ____ (5;5)

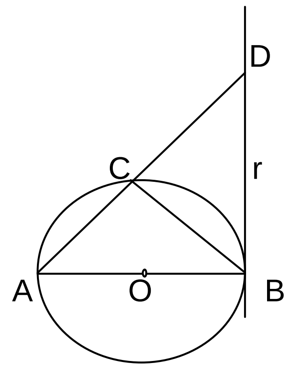
2. Sean las expresiones trigonométricas:

$$A = \frac{\cos x}{2\,\text{sen}x} - 0{,}5\tan x \qquad B = \cot 2x \quad \text{y} \quad C = \tan x - \frac{1}{\tan 2x}.$$

a) Muestra que A = B para todo valor admisible de la variable.

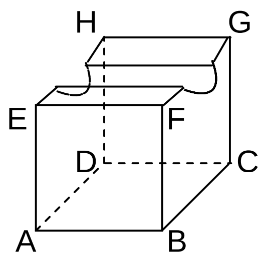
c) Halla el conjunto solución de la ecuación $(B + C)^2 - 1 = 0$.

.
3. En la figura se tiene una circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$.
La recta r es tangente en el punto B a la circunferencia dada.
La cuerda $\overline{AC}$ forma un ángulo de 45^0 con $\overline{AB}$.
Se prolonga la cuerda $\overline{AC}$ por C hasta cortar a la recta r en el punto D.
Se sabe que la longitud del diámetro es $4\sqrt{2}$ cm.
a). Hallar el perímetro del Δ ABC.
b). Prueba que Δ BCA = Δ BCD.



4. Un taller artesanal confecciona cintos de dos tipos: A y B. Las hebillas que lleva cada cinto no se diferencian entre sí y el ancho de los dos tipos de cintos también es igual. Se cuenta con 750 hebillas en total. Cada cinto tipo A utiliza 0,7 m de cuero, mientras que los tipo B necesitan sólo 0,8 m. Se cuenta con un rollo de cuero de 570 m de largo cuyo ancho es exactamente el mismo de los dos tipos de cintos.
a). Averigua cuántos cintos pudieron confeccionarse de cada tipo, sabiendo que se utilizó todo el material y las hebillas disponibles.
b). Los cintos tipo A se venden a 5 cuc y su costo de producción es de 3 cuc. Se conoce, además, que por cada cinto tipo B vendido, la ganancia es de 5 cuc. ¿Cuál es la ganancia total obtenida de la confección de los dos tipos de cintos?

5. La figura representa un cuerpo que se obtuvo al extraer del cubo macizo ABCDEFGH un pedazo con forma de semicilindro.
La medida del lado del cubo es a y la del radio del cilindro es $\frac{1}{4}$ a.
Las diagonales del cubo miden $4\sqrt{3}$ cm.



a). Calcula el volumen del cuerpo.

b). Halla el área de la parte superior del cuerpo.

Bibliografía

- Colectivo de autores: Libros de textos de Matemática 7mo., 8vo., 9no., 10mo., 11no. y 12mo grados. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.
- Colectivo de autores: Cuadernos complementarios de Matemática. (7mo grado, 8vo. grado y 9. no grado) Editorial Pueblo y Educación, La Habana.
- Hernández Ávalos, Jacinto (2006): ¿Cómo estás en Matemática? Ejercicios complementarios de Matemática, para la profundización en la enseñanza preuniversitaria. Editorial Pueblo y Educación.
- Hernández Ávalos, Jacinto (2005): Solucionario. ¿Cómo estás en Matemática? Ejercicios complementarios de Matemática, para la profundización en la enseñanza preuniversitaria. Editorial Pueblo y Educación.
- Colectivo de autores (2008): Manual de Ejercicios de Matemática para la Educación Media Superior Primera Parte. Editorial Pueblo y Educación.
- Colectivo de autores (2007): Matemática I Semestre. Editorial Pueblo y Educación.
- Colectivo de autores(2007): Matemática II Semestre. Editorial Pueblo y Educación.
- Sandoval Torres, A. (2007): Matemática III Semestre. Editorial Pueblo y Educación.
- Colectivo de autores (2007): Matemática IV Semestre. Editorial Pueblo y Educación.
- Colectivo de autores (2008): Matemática V Semestre. Editorial Pueblo y Educación.