ESENCIALES DE GEOMETRÍA PLANA SINTÉTICA

(ENSEÑANZA MEDIA)

Enech García Martínez

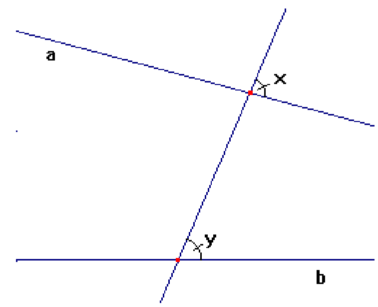
UCPEJV

Ángulos

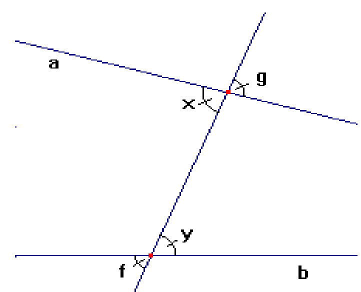
Los ángulos que tienen un vértice común pueden ser consecutivos, adyacentes y opuestos por el vértice.

Los consecutivos tienen un lado común, un vértice común y está uno a continuación del otro.
Los adyacentes son los ángulos consecutivos que suman 180°.
Los opuestos por el vértice son los formados por dos rectas al cortarse, estos ángulos tienen igual amplitud.

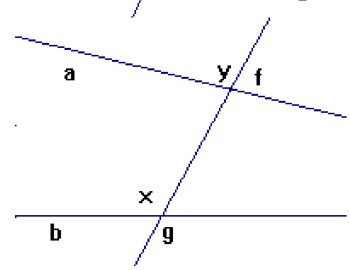
Los ángulos que tienen vértices no comunes pueden ser correspondientes, alternos y conjugados y se forman al ser cortadas dos rectas por una tercera (llamada secante).



ángulos correspondientes:
Se encuentran a un mismo lado de la secante y los dos están a un mismo lado de las otras dos rectas(a y b), es decir, uno por dentro y uno por fuera. ej: (x e y).



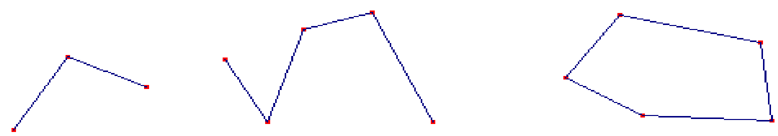
ángulos alternos:
Se encuentran en diferentes lados de la secante, los dos "por dentro" ó los dos por fuera. ej: las parejas "x e y" ó " f e g"



ángulos conjugados:
Se encuentran a un mismo lado de la secante, los dos "por dentro" ó los dos "por fuera". ej: "y e x" ó "f e g".

¡importante!!
-Los ángulos **correspondientes** ó **alternos** entre paralelas **SON IGUALES.**
-Si dos ángulos son iguales y ocupan posiciones de correspondientes ó alternos entonces están entre paralelas.
-Los ángulos conjugados entre paralelas suman 180°.
-si dos ángulos suman 180° y ocupan posición de conjugados entonces están entre paralelas.
Además de lo anterior sobre ángulos debes saber que:
-si dos ángulos tienen sus lados paralelos y ellos son agudos ú obtusos entonces son iguales.
-si dos ángulos tienen sus lados perpendiculares y ambos tienen la misma posición entonces son iguales.

Linea poligonal: Es la unión de dos ó más segmentos
Ejemplo:



Las líneas poligonales pueden ser abiertas ó cerradas. En el caso que sean cerradas dan lugar a lo que se conoce con el nombre de **POLÍGONO.**

Los polígonos pueden tener n (n $\geq$3) lados. A continuación nos detendremos en los polígonos de tres lados: **los triángulos.**

Con tres segmentos de longitudes conocidas ¿siempre será posible construir un triángulo?

Supongamos que tenemos un segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ de longitud igual a 11cm, y lo dividimos en tres segmentos de longitudes cualesquiera, por ejemplo, uno de longitud igual a 3cm, otro de 2cm y otro de 6cm , y tratemos de formar un triángulo que tenga como lados a esos segmentos, ¿es posible formar ese triángulo?

Después de tratar de construirlo te darás cuenta que no es posible, eso quiere decir que las longitudes de los lados de un triángulo tienen que cumplir determinadas condiciones, precisamente éstas se resumen en lo que se conoce como **DESIGUALDAD TRIANGULAR** que expresa que en todo triángulo la suma de las longitudes de los dos lados menores siempre es mayor que la longitud del mayor de los lados.

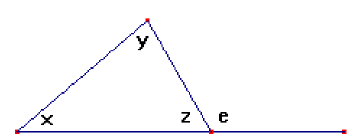
Retomando la primera pregunta que nos hicimos es sencillo darse cuenta que con segmentos de longitudes 2 cm, 3 cm y 6 cm respectivamente no es posible construir un triángulo ya que $2 + 3 < 6$.

En todo triángulo las amplitudes de los ángulos interiores suman 180^0. ¡demuéstralo!

AMPLITUD DEL ÁNGULO EXTERIOR DE UN TRIÁNGULO

El ángulo exterior de un triángulo es el formado por un lado y la prolongación de otro lado, en la figura se puede apreciar que en este caso "e" es un ángulo exterior.

La amplitud de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las amplitudes de los ángulos interiores no adyacentes con él, es decir: $\angle \mathbf{e} = \angle \mathbf{x} + \angle \mathbf{y}$ **.** ¡demuéstralo!



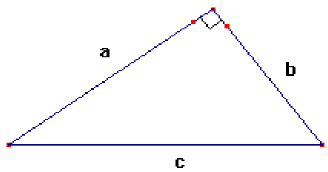
CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS RESPECTO A SUS LADOS:

- **equilátero** (tres lados iguales) y como consecuencia sus tres ángulos también lo son y por supuesto sus amplitudes serán de 60^0.
- **isósceles** (dos lados iguales) y como consecuencia dos ángulos iguales.
- **escaleno** (tres lados diferentes) y como consecuencia sus tres ángulos diferentes)

CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS RESPECTO A SUS ÁNGULOS

- **rectángulo** (si tiene un ángulo recto)
- **acutángulo** (si sus tres ángulos son agudos)
- **obtusángulo** (si tiene un ángulo obtuso).

En el caso particular del triángulo rectángulo tendremos:
-Su lado mayor recibe el nombre de **hipotenusa** y sus otros dos lados **catetos.**
-El cuadrado de la longitud del mayor de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados (**Teorema de Pitágoras**)



$c^2 = a^2 + b^2$ (Teorema de Pitágoras)

Observemos que:

Si $c^2 > a^2 + b^2$ el triángulo es obtusángulo.

Si $c^2 < a^2 + b^2$ el triángulo es acutángulo.

Lo anterior nos indica que "apoyándonos" en el Teorema de Pitágoras podemos clasificar los triángulos atendiendo a las amplitudes de sus ángulos.

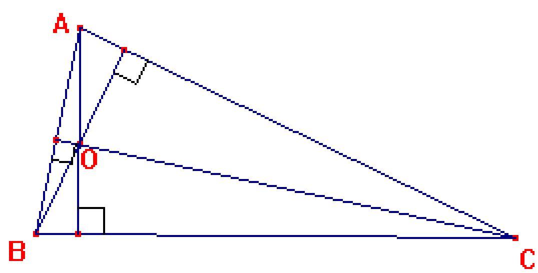
LINEAS Ó SEGMENTOS NOTABLES EN UN TRIÁNGULO

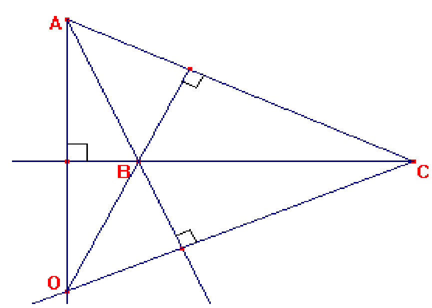
Llamaremos lineas ó segmentos notables en un triángulo a las **medianas**, **alturas**, **bisectrices** y **mediatrices**.

ALTURA: Es el segmento de perpendicular "bajado" desde un vértice hasta la recta que contiene al lado opuesto.

Todo triángulo tiene tres alturas, eso está en dependencia del vértice ó el lado que se escoja como referencia.

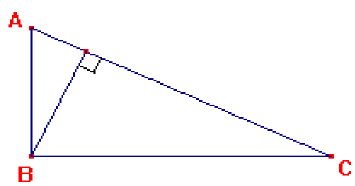
Las tres alturas se cortan en un mismo punto que recibe el nombre de **ortocentro.**





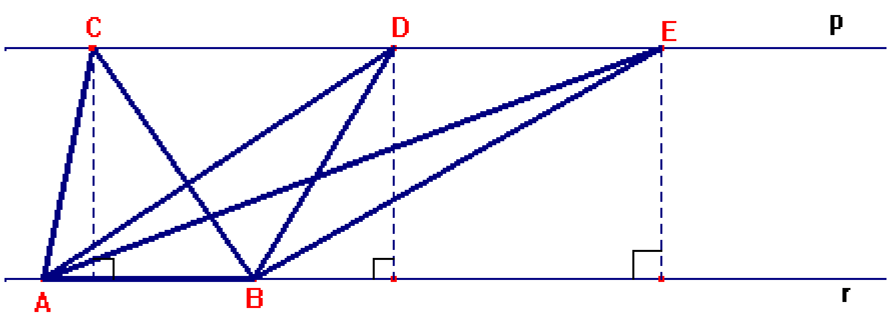
Observen que en la figura de la derecha, el triángulo representado es obtusángulo y las alturas correspondientes a los lados que forman el ángulo obtuso quedarían " por fuera" .

En este caso el ortocentro se obtendría al prolongarse las respectivas alturas.



En el caso particular de un triángulo rectángulo, dos de sus alturas coincidirían con los lados que forman al ángulo recto, cada cateto es altura con respecto al otro, y el ortocentro estaría en el vértice de dicho ángulo.

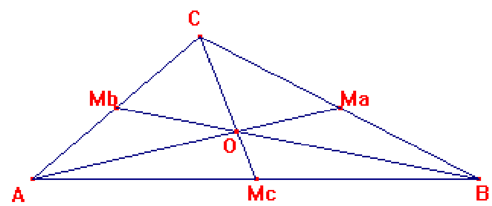
Supongamos que tenemos dos rectas paralelas r y p separadas a una distancia de 4 cm. Sobre r marcamos dos puntos A y B separados por 3 cm y sobre la recta p marcamos tres puntos cualesquiera C , D y F respectivamente, luego unimos cada uno de ellos con A y B formando tres triángulos : ∆ABC, ∆ABD y ∆ABE como muestra la figura



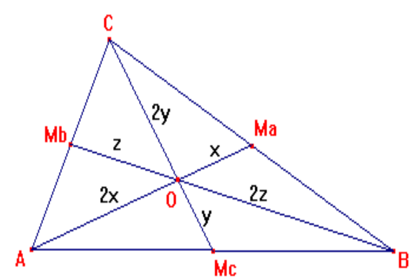
En lo adelante, para referirnos al área de un triángulo ABC utilizaremos la notación (ABC)
a) ¿Cuál es el valor de (ABC)?
b) ¿Cuál es el valor de (ABD)?
c) ¿Cuál es el valor de (ABE)?

Es evidente que el valor del área es 6 cm^2 en los tres casos, ya que los triángulos tienen la misma base y la misma altura, debes observar que en los casos de ΔABD y ΔABE la altura respecto al lado AB "queda por fuera" pero coincide con la distancia entre las rectas p y r.
De todo esto podemos concluir que los triángulos no tienen que ser iguales para tener la misma área, sin embargo, es evidente, que si los triángulos son iguales entonces tendrán la misma área.

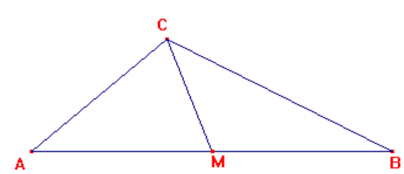
MEDIANA: Es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.
Como el triángulo tiene tres lados y tres vértices tendrá tres medianas. Las medianas también se cortan en un mismo punto que recibe el nombre de **baricentro** ó centro de gravedad del triángulo.



El baricentro divide a la mediana en la razón $\frac{1}{2}$, es decir, uno de los segmentos es la mitad del otro.
La longitud del segmento determinado por el baricentro y el vértice es el doble de la longitud del segmento determinado por el baricentro y el punto medio del lado correspondiente.

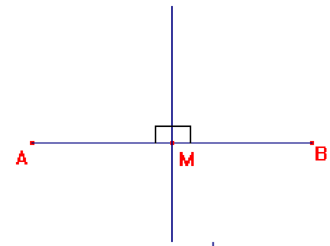


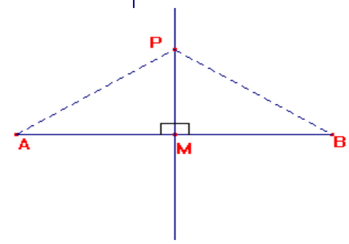
Veamos a continuación una propiedad importante de las medianas.
En el ΔABC M es punto medio del lado AB.
Demuestre que (AMC) = (MBC)



S/
Si M es punto medio entonces AM=MB , pero con respecto a los lados AM y MB las alturas respectivas coinciden, por lo que podemos concluir que si tienen la misma base y la misma altura entonces las áreas son iguales.
Si te fijas, el triángulo ABC es arbitrario, es decir, un triángulo tomado al azar, y pudimos haber tomado el punto medio de cualquier de los otros dos lados, por lo que lo visto anteriormente se cumple en cualquier triángulo. Esta propiedad la podemos resumir como sigue:
LA MEDIANA DIVIDE A UN TRIÁNGULO EN DOS TRIÁNGULOS DE IGUAL ÁREA.

MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO: Es la recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio.



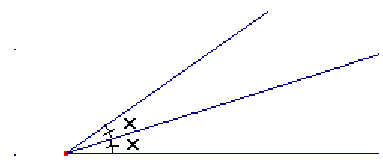


Todo punto situado en la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento, es decir, se encuentra a igual distancia de sus extremos.

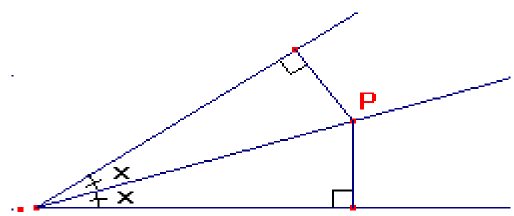
Es fácil darse cuenta que al unir el punto P con cada extremo se forman dos triángulos rectángulos con dos catetos iguales, por lo que sus hipotenusas también serán iguales (Teorema de Pitágoras),

En un triángulo las mediatrices no tienen que pasar por el vértice, esto solo sucede si el triángulo es equilátero ó isósceles (sobre el lado desigual). Las mediatrices se cortan en un mismo punto llamado **circuncentro** (centro de la circunferencia circunscrita al triángulo)

BISECTRIZ DE UN ÁNGULO: Es la semirrecta con origen en el vértice que lo divide en dos partes iguales.



Si escogemos un punto P sobre la bisectriz y trazáramos "sus distancias" respectivas a los lados que forman el ángulo, podemos darnos cuenta que se forman dos triángulos rectángulos iguales, y como consecuencia esas distancias serían iguales.
Después de este análisis podemos concluir con una propiedad que cumplen los puntos que se encuentran sobre la bisectriz de un ángulo.



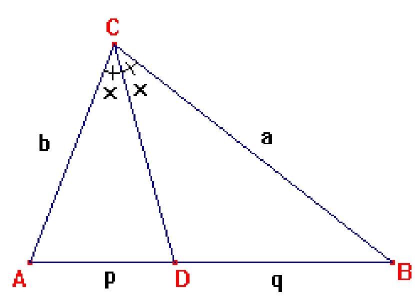
TODO PUNTO SOBRE LA BISECTRIZ EQUIDISTA DE LOS LADOS QUE FORMAN EL ÁNGULO.

En un triángulo las tres bisectrices internas se cortan en un mismo punto llamado **INCENTRO** (centro de la circunferencia inscrita en el triángulo).

Otra propiedad de la bisectriz es la que sigue:

Si CD es bisectriz del $\angle$ ACB entonces se cumple $\frac{b}{a} = \frac{p}{q}$

¡demuéstralo!

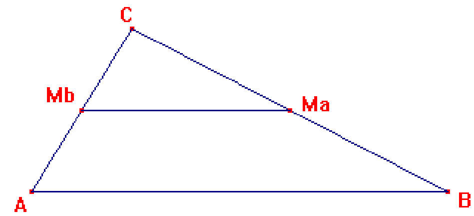


Es importante saber que:

- En todo triángulo equilátero todos los segmentos notables coinciden sobre cualquiera de sus lados.
- En todo triángulo isósceles, todos los segmentos notables coinciden **solamente** sobre el lado desigual.
- Si en un triángulo, sobre un mismo lado coinciden al menos dos segmentos notables entonces el triángulo es isósceles y ese lado sería el lado desigual.

Paralela media en un triángulo:

Es el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo.
Este segmento tiene la propiedad de ser paralelo al tercer lado y su longitud es la mitad de dicho lado.



Distintas maneras para hallar el área de un triángulo

A= $\frac{b.h}{2}$

A= $\frac{1}{2}$ a.b.sen∠(a,b)…… (a y b son las longitudes de dos de sus lados)

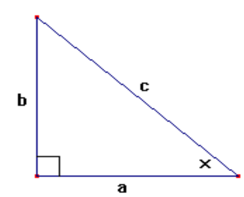
A= $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ donde $p=\frac{a+b+c}{2}$

A= $p.r$ donde $p=\frac{a+b+c}{2}$ y r es el inradio (radio de la circunferencia inscrita)

A= $\frac{a.b.c}{4R}$ siendo R el circunradio (radio de la circunferencia circunscrita).

EN EL CASO DE TRIÁNGULO RECTÁNGULO:

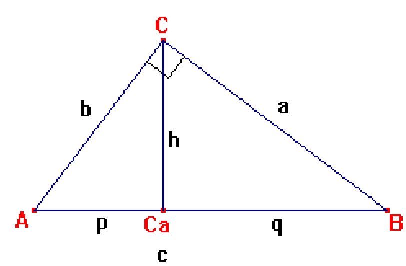
Hay dos cosas fundamentales:
-Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$
-Razones trigonométricas: $\text{sen}x=\frac{b}{c}$, $\cos x=\frac{a}{c}$, $\tan x=\frac{b}{a}$, $\cot x=\frac{a}{b}$



pero además no podemos olvidar los teoremas correspondientes a la altura sobre la hipotenusa y a los catetos.

Teorema de la altura:
El cuadrado de la longitud de la altura sobre la hipotenusa es igual al producto de las longitudes de los segmentos que ella determina sobre la hipotenusa.

$$\mathbf{h^2 = p \cdot q}$$



Teorema de los catetos:
El cuadrado de la longitud de un cateto es igual al producto de la longitud de su proyección (sobre la hipotenusa) por la longitud de la hipotenusa.

$$\mathbf{b^2 = p \cdot c} \qquad \mathbf{a^2 = q \cdot c}$$

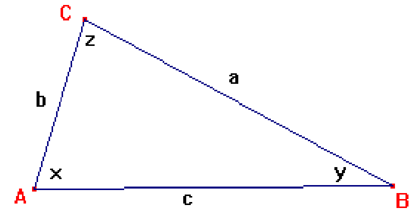
TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS

En estos casos contamos con dos herramientas para el trabajo con ellos: La Ley del seno y la Ley del coseno.

Ley de los senos:

Relaciona a las longitudes de los lados con los valores de los senos de los ángulos interiores y el circunradio (radio de la circunferencia circunscrita)

$$\frac{a}{\operatorname{sen}x} = \frac{b}{\operatorname{sen}y} = \frac{c}{\operatorname{sen}z} = 2R$$



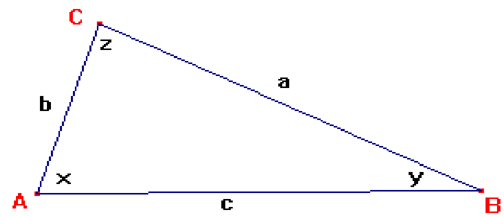
Ley de los cosenos:

Relaciona a las longitudes de los lados y el coseno de uno de los ángulos interiores de la siguiente manera:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos x$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos y$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos z$



CUADRILÁTEROS:

Los cuadriláteros pueden ser convexos y no convexos.

Cuadrilátero convexo: Es aquel cuadrilátero que al ser prolongado cualquiera de sus lados todos sus puntos quedan de un mismo lado de la prolongación.

Los cuadriláteros que no cumplen esa propiedad se llaman no convexos.

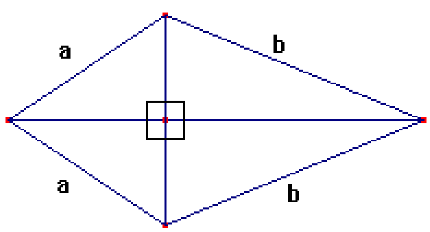
En el nivel medio de nuestra enseñanza se trabaja generalmente con cuadriláteros convexos.

Los cuadriláteros convexos se agrupan en:

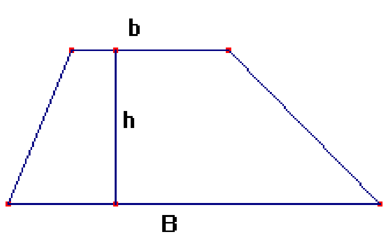
- trapezoides
- trapecios
- paralelogramos

Trapezoides: Son los cuadriláteros convexos que no tienen lados paralelos.

Dentro de los trapezoides encontramos un caso particular: **trapezoide simétrico,** que es aquel que tiene dos pares de lados consecutivos iguales.



Si observas detenidamente puedes percatarte que la figura está compuesta por dos triángulos isósceles (no congruentes). Como estos triángulos tienen la base común entonces sus alturas coinciden y como consecuencia sus diagonales se cortan perpendicularmente.



Trapecio: Es un cuadrilátero convexo que tiene un par de lados paralelos.

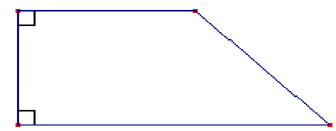
A los lados paralelos se le llaman bases del trapecio. Su altura es la distancia entre los lados paralelos.

Su área se determina por la expresión:

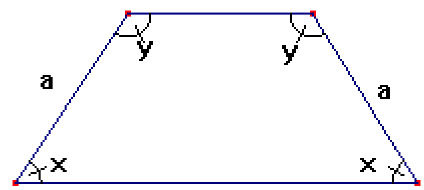
$A = \frac{B+b}{2} \cdot h$ donde B y b son las longitudes de las bases y h la longitud de su altura.

Dentro de los trapecios tenemos dos casos particulares: el trapecio rectángulo y el trapecio isósceles.

Trapecio rectángulo:
Es aquel que tiene uno de los lados perpendicular a las bases

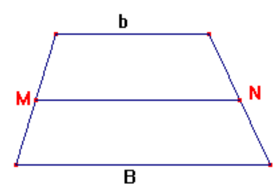


Trapecio isósceles:
Es el trapecio que tiene sus lados no bases iguales,además los ángulos bases son iguales y sus diagonales también lo son (esta última propiedad la puedes demostrar apoyándote en la igualdad de triángulos).



PARALELA MEDIA DE UN TRAPECIO:
Es el segmento que une los puntos medios de los lados no bases de un trapecio. Este segmento es paralelo a las bases y su longitud es igual a la semisuma de ellas.

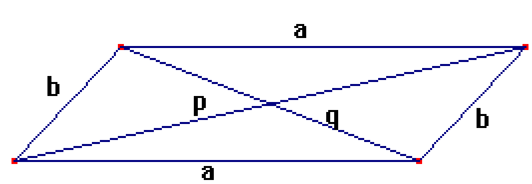
$$\overline{\mathrm{MN}} = \frac{\mathrm{B}+\mathrm{b}}{2}$$



PARALELOGRAMO:
A continuación daremos cinco definiciones de paralelogramo, cada una de ellas nos servirá para reconocer de forma concisa que un cuadrilátero convexo es un paralelogramo.
<u>definición 1</u> : Cuadrilátero convexo con lados opuestos paralelos.
<u>definición 2</u> : Cuadrilátero convexo con un par de lados paralelos e iguales.
<u>definición 3</u> : Cuadrilátero convexo con lados opuestos iguales.
<u>definición 4</u>: Cuadrilátero convexo con ángulos opuestos iguales.
<u>definición 5:</u> Cuadrilátero convexo cuyas diagonales se cortan en su punto medio.

Si desechamos en cada uno de los renglones anteriores la palabra **definición** entonces estaremos en presencia de las propiedades de los paralelogramos.

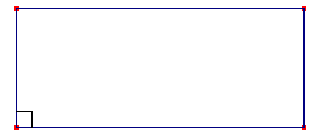
Quisiera que te fijaras que las diagonales no tienen la misma longitud, la que “se opone” a los ángulos obtusos es mayor que la que “se opone” a los ángulos agudos (p > q)



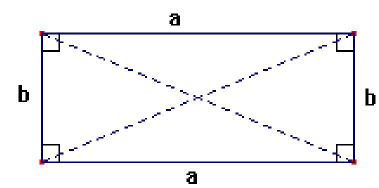
los

Dentro de la familia de los paralelogramos encontramos tres subgrupos: **rectángulos, rombos y cuadrados**. A continuación nos detendremos en cada uno de ellos, pero lo haremos “ partiendo” de que estamos trabajando con un paralelogramo que cumple con determinadas características que lo hacen pertenecer al subgrupo de los rectángulos , rombos ó cuadrados.

RECTÁNGULO:

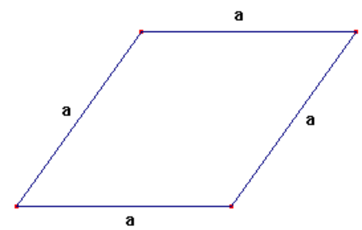


definición 1: Es un paralelogramo con un ángulo recto.
Fíjate que decimos “un ángulo recto”, esto es debido a que como es un paralelogramo ya tenemos de antemano que los ángulos opuestos son iguales, por lo que solamente nos hace falta adicionarle al paralelogramo un ángulo recto.



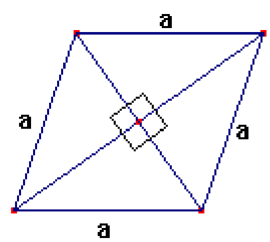
definición 2: Es un paralelogramo con diagonales iguales
Es fácil darse cuenta, ya que las diagonales son las hipotenusas de triángulos rectángulos que tienen catetos iguales.

ROMBO:



definición1: Es un paralelogramo que tiene un par de lados consecutivos iguales.

Fíjate que decimos “ un par de lados consecutivos iguales”, esto se debe a que como es un paralelogramo entonces ya sabemos que los lados opuestos son iguales, por lo que solo necesitamos tener un solo par de lados consecutivos para garantizar que todos sean iguales.

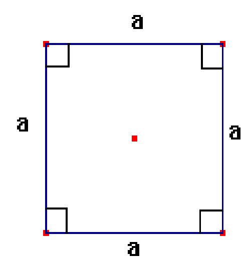


Si analizamos detalladamente el rombo, podemos observar que está compuesto por dos triángulos isósceles iguales con el lado desigual común, por lo que sus medianas, sus alturas, mediatrices y bisectrices coinciden sobre este lado desigual.

definición 2: Es un paralelogramo con diagonales perpendiculares.

definición 3: Es un paralelogramo con diagonales bisectrices.

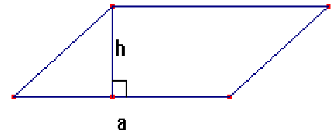
CUADRADO

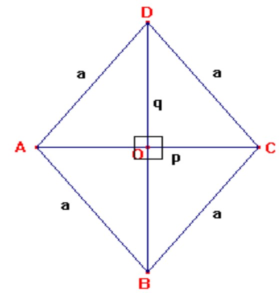


Definición 1: Es un paralelogramo con un ángulo recto y un par de lados consecutivos iguales.
Definición 2: Es un paralelogramo con diagonales iguales y perpendiculares.
Definición 3: Es un paralelogramo con diagonales iguales y bisectrices.

ÁREA DE UN PARALELOGRAMO

A= a.h





En el caso particular de un rombo tendremos:
Las diagonales dividen al rombo en cuatro triángulos rectángulos congruentes cuyas longitudes de los catetos serían la mitad de cada diagonal. Uno de éstos triángulos tendría como área $\frac{\frac{p}{2}\cdot\frac{q}{2}}{2}=\frac{p\cdot q}{8}$, por lo que el área del rombo es $\frac{p\cdot q}{2}$ donde p y q representan las longitudes de sus diagonales.
Concluyendo tendremos que: m
Si conocemos las longitudes de las diagonales de un rombo (p y q) entonces su área también la podremos hallar por el producto de la semisuma de sus diagonales.

$$A=\frac{p\cdot q}{2}$$

IGUALDAD DE TRIÁNGULOS

Teorema1: Dos triángulos son iguales si tienen sus tres lados iguales (**l.l.l**)

Teorema2: Dos triángulos son iguales si tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido entre esos lados igual (**l.a.l**)

Teorema3: Dos triángulos son iguales si tienen un lado igual y los ángulos adyacentes a ese lado iguales (**a.l.a**)

Teorema 4:Dos triángulos son iguales si tienen dos lados iguales y el ángulo que se opone al mayor de los lados.

¡¡Muy Importante!!
-En triángulos iguales a lados iguales se le oponen ó le corresponden ángulos iguales.
-En triángulos iguales a ángulos iguales se le oponen ó le corresponden lados iguales.
-En triángulos iguales a lados iguales le corresponden segmentos notables iguales.

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS
Teorema Fundamental de la semejanza de triángulos: Si dos lados de un triángulo son cortados por una recta paralela al tercer lado entonces el triángulo que se forma es semejante con el triángulo original.
Teorema1: Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales (**a.a**).

Teorema2: Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados proporcionales (**p.p.p**).

Teorema3: Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre esos lados igual. (**p.a.p**)

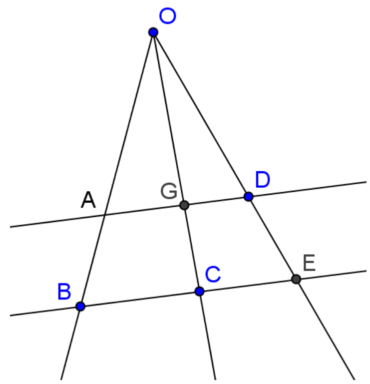
¡¡Importante!!
-En triángulos semejantes a ángulos iguales le corresponden lados proporcionales.
-La razón entre lados proporcionales se le llama razón de semejanza ó de proporcionalidad.
-Si dos triángulos son semejantes y la razón de semejanza es igual a “k” entonces la razón entre sus perímetros es k, y entre sus áreas es igual al cuadrado de la razón de semejanza, es decir:
si Δ ABC ~ΔPQR y la razón de semejanza es K entonces se cumple que:

$$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta PQR}}=k \quad \text{y} \quad \frac{(ABC)}{(PQR)}=k^2$$

Teorema de las transversales.

Si un haz de semirrectas de origen común son cortadas por varias rectas paralelas se cumple que la razón entre dos segmentos de una de ellas es igual a la razón entre los dos correspondientes en la otra.

Nota: Este teorema también se cumple entre un segmento de la transversal y su correspondiente segmento de paralela.



•Si las semirrectas de un haz son cortadas por un haz de rectas paralelas, entonces para cada par de semirrectas se cumple que la razón de los segmentos de una de ellas es igual a la razón de sus segmentos correspondientes en la otra.

Por ejemplo:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OG}{OC} = \frac{OD}{OE}$$

•Si las semirrectas de un haz son cortadas por un haz de rectas paralelas, entonces cada par de segmentos de paralelas situados entre las mismas semirrectas están, entre sí, en igual razón que los segmentos correspondientes sobre la misma semirrecta.

Por ejemplo:

$$\frac{OA}{AG} = \frac{OB}{BC}$$

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AG}{BC}$$

•Si las semirrectas de un haz son cortadas por un haz de rectas paralelas, entonces para cada dos paralelas se cumple que los segmentos en una están entre sí como sus correspondientes en la otra.

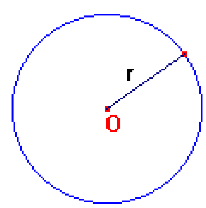
Por ejemplo:

$$\frac{AG}{GD} = \frac{BC}{CE}$$

• Recíproco del Teorema de las transversales.

Si un haz de semirrectas de origen común son cortadas por varias rectas de forma tal que la razón entre los segmentos de una de ellas es igual a la razón entre los segmentos correspondiente en la otra, entonces las rectas son paralelas.

CIRCUNFERENCIA



Circunferencia: Conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo.

El punto fijo recibe el nombre de **centro** de la circunferencia.

El segmento que une el centro de la circunferencia con cualquier punto de la circunferencia se denomina **radio**.

Dos puntos cualesquiera de una circunferencia determinan un **arco**.

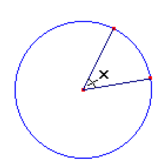
El segmento que une dos puntos de una circunferencia se denomina **cuerda**.

La cuerda que pasa por el centro de la circunferencia es la la mayor de todas las cuerdas y recibe el nombre de **diámetro**.

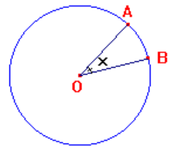
Longitud de la circunferencia: $L=2\pi r$

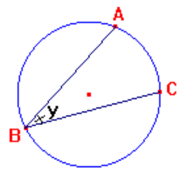
Área limitada por la circunferencia: $A=\pi r^2$

Sector circular: región del círculo limitada por dos radios y el arco que une los extremos de estos radios. $A_{sc} = \frac{x}{360^\circ}\pi r^2$

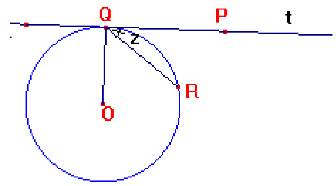


Ángulos en la circunferencia:
$\angle$AOB: ángulo central



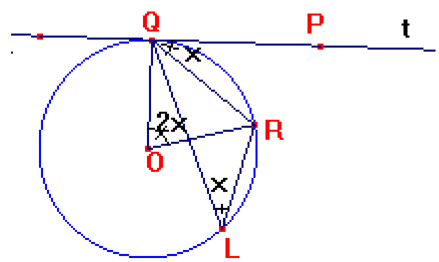


$\angle$ABC: ángulo inscrito



$\angle$PQR: ángulo semi-inscrito
(formado por una tangente y la cuerda)

<u>Relación entre estos ángulos</u>



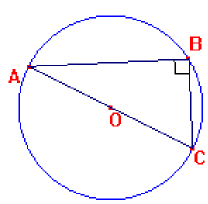
•La amplitud del ángulo inscrito es la mitad de la amplitud del ángulo central correspondiente en el mismo arco ó en la misma cuerda.

$\angle$QLR = $\frac{1}{2}\angle$QOR

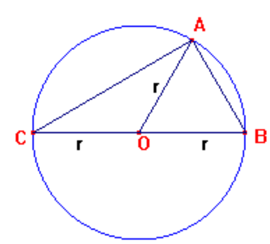
•La amplitud del ángulo inscrito es igual a la amplitud del ángulo semi-inscrito correspondiente en la misma cuerda ó en el mismo arco, es decir:
$\angle$QLR = $\angle$PQR

•En consecuencia se cumple: $\angle$QLR = $\angle$PQR= $\frac{1}{2}\angle$QOR

<u>Teorema de Thales:</u>
Todo ángulo inscrito sobre un diámetro es recto.



Observemos lo siguiente:



En la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{BC}$ se tiene que $\overline{OC} = \overline{OB} = \overline{OA} = r$, $\overline{OA}$ respecto al triángulo ABC es una mediana por consiguiente la longitud de la mediana es la mitad de su lado correspondiente, esto solo ocurre si el triángulo es rectángulo y el lado correspondiente es la hipotenusa.

Conclusión:
-En todo triángulo rectángulo la longitud de la mediana sobre la hipotenusa es la mitad de la longitud de la hipotenusa.
-Si en un triángulo, la longitud de la mediana correspondiente a un lado es la mitad de la longitud de ese lado entonces podemos afirmar que ese triángulo es rectángulo y ese lado es la hipotenusa.

Debes saber que :

- Los ángulos inscritos en el mismo arco son iguales.
- Los ángulos inscritos en arcos iguales son iguales.
- Si dos cuerdas son iguales ellas equidistan del centro de la circunferencia.
- Si dos cuerdas o dos arcos son iguales entonces las cuerdas que unen los extremos de estas cuerdas o de estos arcos son paralelas. Esto último trae como consecuencia de que el único trapecio que se puede inscribir en una circunferencia es el isósceles.
- Si un radio corta a una cuerda perpendicularmente entonces pasa por el punto medio de la cuerda (y también divide al arco correspondiente en su punto medio.
- Si un radio pasa por el punto medio de una cuerda entonces la corta perpendicularmente.
- Las tangentes trazadas desde un punto exterior a una circunferencia tienen igual longitud.