1. Propiedades de la Geometría del Espacio.

1.1 Espacio, rectas y planos.

● Espacio: Conjunto de puntos donde las rectas y planos son subconjuntos de él.

● Recta: Es un subconjunto propio del espacio que tiene las siguientes propiedades:

a) dos puntos determinan una recta y solo una,
b) por un punto pasan infinitas rectas,
c) si dos rectas tienen dos puntos comunes son coincidentes,
d) el conjunto de puntos de una recta se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números reales, de manera que se conserva el orden.

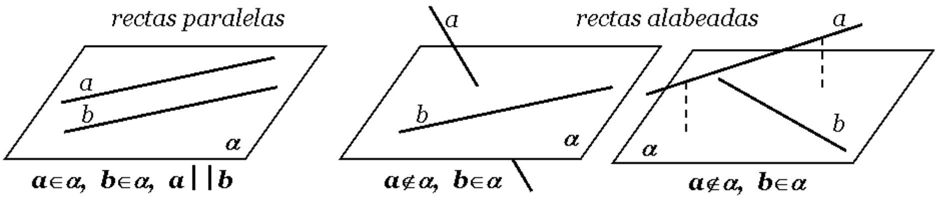
● Plano: Es un subconjunto propio del espacio determinado unívocamente por:

a) tres puntos no alineados, o
b) dos rectas que se cortan, o
c) dos rectas paralelas, o
d) una recta y un punto exterior a ella.

● Relación de posición entre rectas en el espacio.

Paralelas: Dos rectas del espacio son paralelas si y solo si están contenidas en un plano y son paralelas en ese plano (figura 2.1a).

Se cruzan: se dice que dos rectas en el espacio se cruzan si no tienen puntos comunes y no están en el mismo plano (figura 2.1b), también se llaman rectas alabeadas.



(a) (b)

Fig. 2.1

● Una recta y un plano son paralelas si no se intersecan.

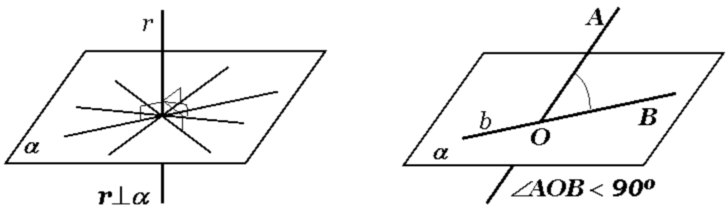
● Criterio de paralelismo de recta y plano: Una recta es paralela a un plano si es paralela a una recta contenida en dicho plano.

● Si dos rectas se cruzan, por cada una de ellas se puede trazar un plano paralelo a la otra.

● Intersección de recta y plano.

a) Si una recta interseca a un plano y es perpendicular a todas las rectas que pasan por el punto de intersección entonces es perpendicular al plano (figura 2.2a). El punto de intersección recibe el nombre de pie de la perpendicular.

b) Si una recta interseca a un plano y no es perpendicular al menos a una recta que pasa por el punto de intersección entonces la recta es oblicua al plano (figura 2.2b). El punto de intersección recibe el nombre de pie de la oblicua.



(a) (b)

Fig. 2.2

Entrénate en la Geometría

● Criterio de perpendicularidad de recta y plano:
Si una recta es perpendicular a dos rectas de un plano que se cortan en su pie, entonces es perpendicular al plano.
- Por perpendicular u oblicua a un plano se entiende también al segmento de recta perpendicular o de recta oblicua entre un punto de dicha recta y un plano.
● Por cualquier punto de una recta se puede trazar un plano y solo un plano perpendicular a dicha recta.
● Llamamos distancia de un punto a un plano a la longitud del segmento de perpendicular comprendido entre el punto y el plano (figura 2.3). La longitud del $\overline{AA'}$ es la distancia del punto A al plano α.
● Si desde un punto se trazan una perpendicular y varias oblicuas a un plano, la perpendicular es menor que las oblicuas (figura 2.4).

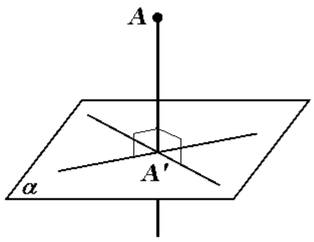


Fig. 2.3

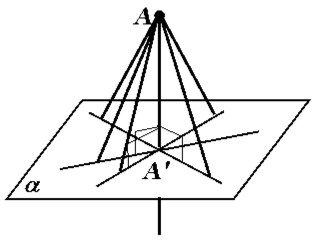


Fig. 2.4

● Se llama proyección de una oblicua sobre un plano α al segmento determinado entre el pie de una oblicua y el pie de la perpendicular trazada desde un punto de la oblicua al plano α. En la figura 2.5 el $\overline{AB'}$ es la proyección del $\overline{AB}$ sobre el plano α, se denota por: $\overline{AB'}$ = proy$_\alpha$ $\overline{AB}$ y el $\angle$BAB' formado por la oblicua y su proyección se llama ángulo entre la oblicua $\overline{AB}$ y el plano α, o ángulo de inclinación de la oblicua respecto al plano α.

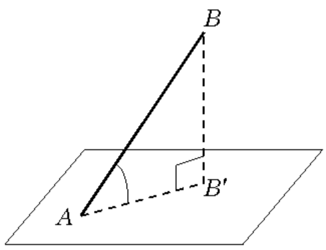


Fig. 2.5

● Si desde un punto que no pertenece a un plano α o desde varios puntos que estén a igual distancia del plano α(figura 2.6) se trazan oblicuas de forma tal que sus proyecciones son iguales sobre α entonces las oblicuas también lo son.

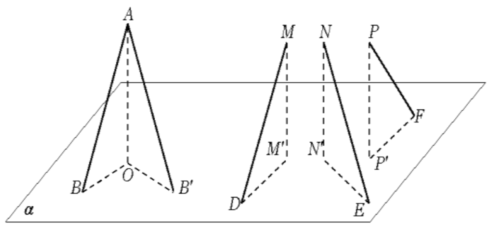


Fig. 2.6

● Si desde un punto que no pertenece a un plano α o desde varios puntos que estén a igual distancia del plano α se trazan oblicuas iguales entonces sus proyecciones sobre α también lo son.
● Dos rectas perpendiculares a un plano son paralelas entre si.
● Si una de dos rectas paralelas es perpendicular a un plano la otra también lo es.
● Teorema de las tres perpendiculares.
Si una recta de un plano que pasa por el pie de una oblicua al plano es perpendicular a la proyección de la oblicua, entonces es perpendicular a la oblicua (figura 2.7).

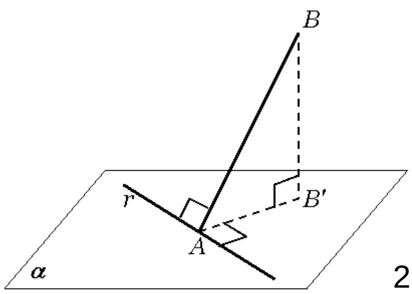


Fig. 2.7

Entrénate en la Geometría

El recíproco de este teorema también se cumple y plantea:
Si una recta de un plano que pasa por el pie de una oblicua es perpendicular a la oblicua, entonces es perpendicular a la proyección de la oblicua.
● El área de la proyección de un polígono sobre un plano α es igual al área del polígono por el coseno del ángulo formado por el plano del polígono y el plano α.

1.2 Pares de planos.
● Dos planos son paralelos si no se intersecan.
● Criterio de paralelismo de dos planos.
  - Dos planos son paralelos si son perpendiculares a una recta.
  - Dos planos son paralelos si uno de ellos es paralelo a dos rectas que se cortan en el otro.

● Por un punto exterior a un plano α se puede trazar uno y solo un plano paralelo al plano α.
● Si dos planos son paralelos a un tercero son paralelos entre sí.
● Si dos planos paralelos son cortados por un tercero, las rectas de intersección que resultan son paralelas. En la figura 2.8 se tiene que $\alpha \cap \gamma = \{p\}$, $\beta \cap \gamma = \{r\}$ y $\alpha \parallel \beta$ entonces $r \parallel p$.

● Se llama ángulo de inclinación entre dos planos al menor ángulo formado por dos rectas, una de cada plano, perpendiculares a la recta de intersección entre los planos en un mismo punto de esta. En la figura 2.9 el $\angle AOB$ es el ángulo de inclinación entre los planos α y β.

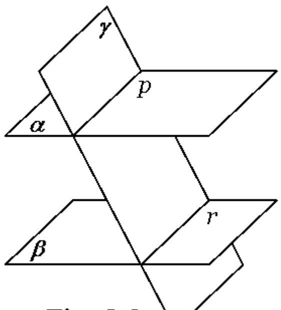


Fig. 2.8

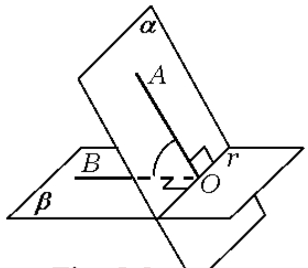


Fig. 2.9

● Criterio de perpendicularidad de dos planos: Dos planos son perpendiculares si uno de ellos contiene una recta perpendicular al otro.
● Si dos planos α y β son perpendiculares y una recta r contenida en α es perpendicular a la recta de intersección, entonces r es perpendicular al plano β (figura 2.10).

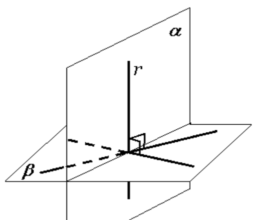


Fig. 2.10

1.3 Poliedros
● Se llama ángulo poliedro a la región del espacio limitada por tres o más planos que se cortan sucesivamente, según rectas que concurren en un punto (figura 2.11). El punto en que concurren los planos (O) se llama vértice del poliedro, a las semirrectas OA, OB, OC, OD, … aristas y a los planos AOB, BOC, COD, … caras del ángulo poliedro.

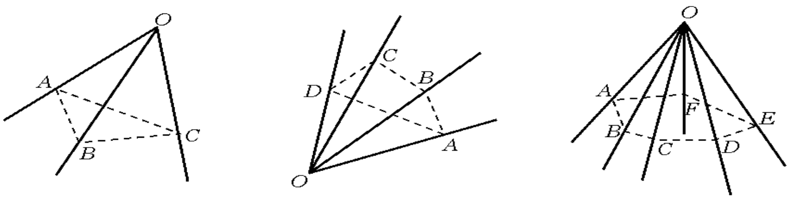


Fig. 2.11

Entrénate en la Geometría

● Un ángulo poliedro es convexo si está a un lado cualquiera de sus ángulos planos (figura 2.11).
● La suma de los ángulos planos de un ángulo poliedro es menor o igual a 360º.
● Poliedro: Se llama poliedro a todo cuerpo limitado por un número finito de planos.
- Las pirámides y prismas son poliedros.

● Las pirámides, prismas o cono en que la altura coincida con el centro de la base se llama recto.
● Las pirámides y prismas rectos que tengan por base un polígono regular se dicen regulares.
● Volúmenes.

- Prismas y cilindro: $V = A_B h$
- Pirámides y cono: $V = \frac{1}{3} A_B h$
- Cubo: $V = a^3$
- Esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

● Áreas en los cuerpos.

- Área lateral (A_L):
  Prismas y pirámides: suma de las áreas de las caras del cuerpo.
  Cilindro circular recto: $A_L = 2\pi rh$
  Cono: $A_L = \pi rg$
  En el caso de los prismas rectos el área lateral también se puede obtener por la expresión $\mathbf{A_L = P \cdot h}$ con P: perímetro de la base y h: altura del prisma.
- Área total (A_T): Es la suma del área lateral y el área de las bases.
- Área de una esfera: $A = 4\pi r^2$