Razones trigonométricas de un ángulo agudo

En los grados anteriores has estudiado relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo (Teorema de Pitágoras, por ejemplo) y también entre sus ángulos. A continuación aprenderás otras de gran utilidad que se expresan mediante las razones trigonométricas seno, coseno tangente y cotangente.

Es conveniente aclarar que con respecto a las notaciones vamos a congeniar que las longitudes de los lados de un triángulo se denotaran con la misma letra que se denota el vértice opuesto (pero con letra minúscula), de forma similar denotaremos los ángulos en la secuencia α,β,χ ..ó x, y , z…..

Definición 1:

Sea un triángulo agudo de vértice A en un ΔABC rectángulo ABC (fig 1), sean a y b los catetos y c la hipotenusa, se llama

seno de a y se denota **senα** a la razón $\frac{a}{c}$ entre el cateto opuesto a α y la hipotenusa.

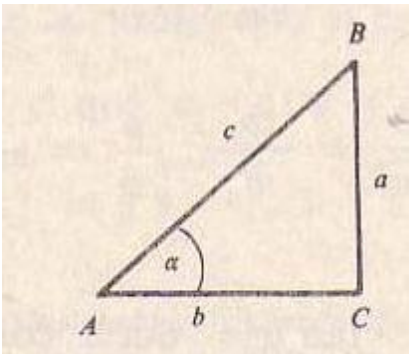
coseno de a se denota **cosα** a la razón $\frac{b}{c}$ entre el cateto adyacente a α y la hipotenusa.

tangente de a y se denota **tanα a la** razón $\frac{a}{b}$ entre el cateto opuesto a α y el adyacente a dicho ángulo.

$\text{sen}\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

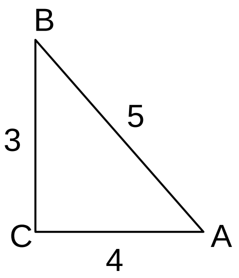
$\tan\alpha = \frac{a}{b}$



Es fácil darse cuenta que como la hipotenusa es mayor que los catetos entonces podemos inferir que **sen$\alpha \leq$ 1 ; cos$\alpha \leq$ 1**

A continuación te proponemos un ejemplo para que comiences a familiarizarte con esta definición:

•En un ΔABC rectángulo en C , los catetos a y b miden 3,00 cm y 4,00 cm respectivamente, calcula sen$\angle$CAB, cos$\angle$CAB, y tan$\angle$CAB.
Veamos: Como el ΔABC es rectángulo en C entonces es muy fácil (por el teorema de Pitágoras) darnos cuenta que AB= 5,00 cm



Aplicando la definición 1 obtenemos directamente que :

sen$\angle$CAB= $\frac{3}{5}$

cos$\angle$CAB= $\frac{4}{5}$

tan$\angle$CAB= $\frac{3}{4}$

A partir de ahora debes comenzar a resolver, de manera individual los siguientes ejercicios:

1-En un ΔPQR rectángulo en Q se conoce que PR=13 cm y PQ = 5 cm, entonces el valor de cos$\angle$QRP es:

a)___ $\frac{12}{13}$ b)___ $\frac{5}{12}$ c)___ $\frac{13}{12}$ d) ___ $\frac{12}{5}$

2- Sean α y β las amplitudes de los ángulos agudos de un ΔABC (γ=90^0).
Si senα = $\frac{3}{5}$ entonces el cosα es:

a)___1,25 b)___ 0,8 c)___ 0,6 d) ___ no se puede determinar

3-Halla la longitud de la hipotenusa de un ΔABC rectángulo en A sabiendo que cosγ=$\frac{4}{5}$ y b=16 cm.

4- En un triángulo rectángulo senα = $\frac{1}{3}$, calcula cosα y tanα.

Respuestas y/o Comentarios de las soluciones .

1-a)
2-b)
3- BC=20 cm

En este caso aplicando la definición tendremos que $\cos\gamma = \frac{AC}{BC}$, sustituyendo nos quedaría $\frac{4}{5} = \frac{16}{BC}$ $\therefore$ BC=20 cm

4- cosα=$\frac{2\sqrt{2}}{3}$ y tanα=$\frac{\sqrt{2}}{4}$

Como solo nos interesan las razones entre lados, podemos “trabajar” en cualquier triángulo rectángulo en el que la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa sea $\frac{1}{3}$.

Trabajo Independiente

1-En un ΔABC rectángulo en C $\alpha=45^0$ y c=4,0 cm. Halla la longitud de cada cateto y el valor de $\cos\beta$ y $\tan\beta$.

2-Demuestra que en todo triángulo rectángulo ABC rectángulo en C se cumple:

a) $\operatorname{sen}\alpha= \operatorname{sen}(\gamma-\beta)$

b) $\cos\alpha= \cos(\gamma-\beta)$

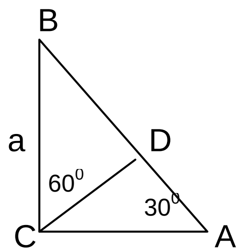
c) $\tan\alpha = \tan(\gamma-\beta)$

Existen algunos ángulos cuyas razones trigonométricas son sencillas y aparecen con mucha frecuencia en la práctica por lo que es conveniente memorizarlas, son los llamados **"ángulos notables"**,y sus razones trigonométricas se calculan en los siguientes teoremas.

Teorema 1

Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 30^0 el cateto opuesto a ese ángulo es la mitad de la hipotenusa.

Existen varias maneras de demostrar esta proposición, una de ellas es la siguiente:



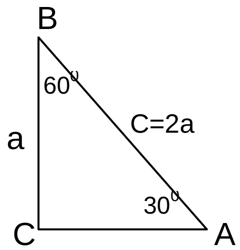
Sea ABC un triángulo rectángulo en C en el cual $\alpha= 30^0$ y tracemos CD de forma tal que $\angle DCB= 60^0$ entonces $\angle DCA= 30^0$. Como puedes observar el ΔBCD es equilátero y por tanto BD=DC=a, además $\Delta A\ CD$ es isósceles y entonces AD=DC=a.

De aquí resulta que c=AD+DB=2a

Te proponemos lo siguiente:

Considere un ΔABC rectángulo en C con $\angle CAB= 30^0$ y determine los siguientes valores:

$\cos 30^0$, $\tan 30^0$, $\operatorname{sen}60^0$,$\cos 60^0$ y $\tan 60^0$

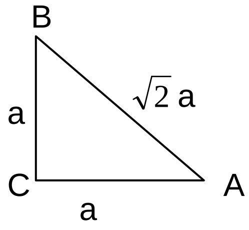


S/

Si consideras un ΔABC con un ángulo de 30^0 resulta según teorema 1 que el cateto que se opone a este ángulo es la mitad de la hipotenusa, por ese motivo aplicando el Teorema de Pitágoras hallamos que b=$\sqrt{3}a$, a partir de estos valores y aplicando lo que sabes de razones trigonométricas llegarás fácilmente a los siguientes resultados:

$\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\text{sen}60^0 == \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan 60^0 = \sqrt{3}$

Ahora considera otro triángulo rectángulo pero esta vez isósceles y halla las razones trigonométricas de sus ángulos agudos



S/
De seguro no te resultó hallar la longitud de la hipotenusa, y una vez hallado este valor pues haber arribado a los siguientes resultados:

$\text{Sen}45^0 = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\tan 45^0 = 1$

Estos resultados se resumen en el siguiente teorema

Teorema2:

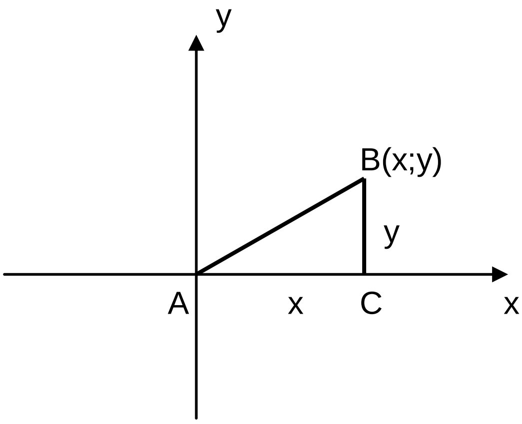
Se cumple:

a) $\text{sen}30^0 = \frac{1}{2}$ $\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\text{sen}60^0 == \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$ $\tan 60^0 = \sqrt{3}$

c) $\text{Sen}45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\tan 45^0 = 1$

Estas definiciones no incluyen las razones trigonométricas de los ángulos 0^0 y 90^0, pero no resulta difícil obtenerlas:



Observa que hemos hecho coincidir el vértice A de un ΔABC con el origen y el eje x contiene al cateto b. En estas condiciones las razones trigonométricas del ángulo α se pueden expresar utilizando las coordenadas (x;y) del vértice B, es decir:

senα=$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,   cosα=$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y tanα=$\frac{y}{x}$

Como consecuencia de lo anterior podemos realizar el siguiente análisis:

-¿Qué sucedería con la posición del punto B si $\alpha=0^0$?

R/ En este caso B estaría sobre el eje x

-¿ Qué sucedería con la posición del punto B si $\alpha=90^0$?

R/ En este caso B estaría sobre el eje y

-¿Estarías en condiciones de hallar sen0^0?

Bastaría darse cuenta que las coordenadas de B serían (x;0) y por consiguiente tendrías:

Sen0^0=$\frac{0}{\sqrt{x^2+0^2}}=0$

-¿podrías determinar cos0^0 y tan0^0?

Solo tendríamos que sustituir

$\therefore$cos0^0=1 y tan0^0=0

Análogamente podrías determinar las razones trigonométricas de 90^0.

Conclusión:

Sen0^0=$\frac{0}{\sqrt{x^2+0^2}}=0$

Cos0^0=$\frac{x}{\sqrt{x^2+0^2}}=1$

Tan0^0=$\frac{0}{x}=0$

Sen90^0=$\frac{y}{\sqrt{0^2+y^2}}=1$

Cos90^0=$\frac{0}{\sqrt{0^2+y^2}}=0$

Tan90^0= - ¡no está definida!!

Nota: debes darte cuenta que no es posible definir tan90^0 pues en ese caso x=0 y la división por cero no está definida.

Trabajo Independiente

1-Calcula

$$\frac{1+\tan 45^0-\text{sen}90^0}{\cos 0^0.\text{sen}30^0-\cos 90^0}$$

2- Completa la siguiente tabla y memorízala

α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
senα					
cosα					
tanα					

Comentarios de las soluciones y/o respuestas

1- El valor es 2

Bastaría sustituir y calcular

Ejercicios y/o problemas de cálculo con valores de ángulos notables.

Anteriormente completaste la tabla de los valores de la razones trigonométricas, puedes comprobar que esta tabla se cumple para cada valor de α que :

$\cos\alpha = \text{sen}(90^0 - \alpha)$	$\text{sen}\alpha = \cos(90^0 - \alpha)$
$0 \le \text{sen}\alpha \le 1$	$0 \le \cos\alpha \le 1$

Fíjate que solo debes memorizar los valores del seno porque:
El coseno de un ángulo es el seno del ángulo complementario y la tangente es el cociente del seno entre el coseno.

En cada uno de los ejercicios y problemas que a continuación te proponemos mostrarás tus habilidades en las operaciones de cálculo

1-Si A=$\cos 60^0$ y B=$\frac{1}{\cos 45^0}$ entonces 2A – 3B es :

a)__ -2 b)__ $2 - 3\sqrt{2}$ c) __ $\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{2}}{2}$ d)__ $2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$

2- Si A= $\cos 60^0$ y B=$\frac{1}{\cos 45^0}$, muestre que el valor de 2A-3B es $6+3\sqrt{3}$.

3- Si a=30^0 b=60^0 y c=45^0, entonces el valor de $\sqrt{\frac{\cos^2 a + 2\text{sen}^2 b}{\tan c - \frac{2}{9}}}$ es:

a) __ $\frac{9}{14}$ b)___ $\frac{9\sqrt{7}}{14}$ c)___ $\frac{\sqrt{7}\left(1+2\sqrt{7}\right)}{2}$ d)___ $\frac{\sqrt{7}}{2}$

4-Una fuerza de 20,0 N forma un ángulo de $45{,}0^0$ con la horizontal. Calcula sus componentes horizontal y vertical.

5- Uno de los 4 pares de ángulos que a continuación te mostramos corresponden a las amplitudes de dos ángulos complementarios. Indique con una **x** el par que cumple con esta condición
a)___14,1^0;76,9^0} b)___{58.5^0;31,5^0} c)___{26,3^0;64,7^0} d)___ {14,1^0;76,9^0}

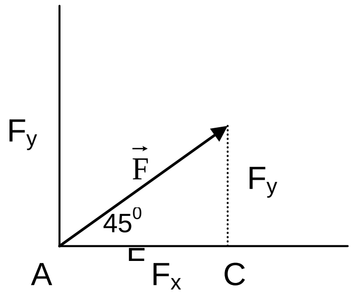
Respuestas y/o comentarios
1- La respuesta correcta es b)
En este caso basta sustituir por os valores de los ángulos notables que apetecen en el ejercicio y operar con ellos , teniendo en cuenta , al final , que debemos **racionalizar** el resultado, es decir , eliminar las raíces del denominador.

2- El trabajo es análogo.

3-La respuesta correcta es b)

Al sustituir y operar nos quedaría $\sqrt{\frac{81}{28}}=\frac{9}{2\sqrt{7}}=\frac{9\sqrt{7}}{14}$

4-La componente horizontal F_x=14,1   y la vertical F_y=14,1



Para determinar F_x debemos fijarnos que cos45^0=$\frac{F_x}{|F|}$ obteniendo F_x=14,1.

Análogamente se precede para F_y.

5- La respuesta correcta es c)
Solo tienes que tener en cuenta el concepto de **ángulos complementarios**, es decir, **dos ángulos agudos que suman 90^0**.

Trabajo Independiente
1-Muestre que:

a) $\sqrt{\frac{\text{sen}^2 45^0.\cos 0^0+1}{2sen90^0.\tan 60^0}}+\frac{\tan 0^0}{2}-\cos 30^0=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

b) $\sqrt{\frac{\cos^2 0^0+\tan 30^0 45^0.sen90^0}{1+3\tan 30^0}}=1$

2-Determine una solución de cada una de las siguientes ecuaciones
a)senx=cos 30^0
b)sen17^0=cos x
c)senx=cos

Respuestas y/o comentarios
1-En ambos casos hay que sustituir los valores de los ángulos notables y tener en cuenta que estamos trabajando dentro de un radical y que debemos , al final, escribir la respuesta en la forma mas simplificada posible.

2-
a) x=60^0
b) x=73^0
c) x=45^0
En este ejercicio solo debemos tener en cuenta el concepto de ángulos complementarios.

Identidades trigonométricas.
Las razones trigonométricas de un ángulo están relacionadas entre sí por algunas igualdades que se conocen como **identidades trigonométricas fundamentales** debido a las numerosas aplicaciones que poseen y que es conveniente aprender de memoria.

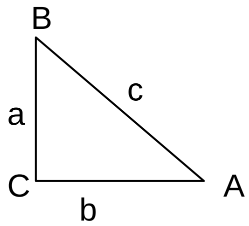
Pero,¿qué es una identidad?¿sabes diferenciar una identidad de una ecuación?

Las ecuaciones son igualdades que al menos contienen una variable, en la escuela casi siempre resolvemos ecuaciones en una variable, y sus soluciones generalmente son valores finitos, esto es lo reverso de una identidad, las identidades se cumplen para todo o casi todos los valores del dominio.
En grados anteriores has trabajado con identidades algebraicas, aunque seguramente no te has dado cuenta, por ejemplo:

- $X^2 - 4= 5$ es una ecuación , ya que se cumple para determinados valores finitos , en este caso x= -3 y x= 3
- $X^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ es una identidad algebraica que se cumple para todos los valores reales
- $\dfrac{x^2-4}{x-2} = x+2$ es una identidad algebraica que se cumple para todos los valores reales diferentes de 1, ya que para x = 1 se anula el denominador y se indefine el miembro de la izquierda.

Después haber realizado esta observación veamos lo siguiente.

A continuación tenemos un triángulo ABC rectángulo en C



En el cual se cumple que:
$a^2+b^2=c^2$ (Teorema de Pitágoras)
Sabemos del algebra que si dividimos toda la igualdad por **c (c≠0)** la misma no se altera, es decir :
Dividiendo por **c** obtenemos

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

Esto último significa que:
$sen^2\alpha + \cos^2 = 1$ para $0^0 < \alpha < 90^0$, y este resultado se conoce con el nombre de

Identidad Fundamental de la Trigonometría
De forma parecida podemos arribar a otros resultados que están resumidos en el siguiente teorema:
Teorema

Se cumple:
a) $sen^2x+\cos^2 x= 1$
b) $\tan x= \dfrac{\mathrm{sen}x}{\cos x}$
c) $1+\tan^2= \dfrac{1}{\cos^2 x} (x \neq 90^0)$

¿Cómo se demuestra una identidad?
Pues podemos asumir dos caminos clásicos
1- Trabajar con un miembro y realizando transformaciones lógicas arribar al otro.
2- Trabajar con ambos, por separados, y llegar al mismo resultado

Veamos un ejemplo:
Demostrar que:
$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$
S/
Para demostrarla debemos escoger el miembro en el cual comenzaremos a trabajar, que generalmente será el que más posibilidades de transformación nos brinde
En este caso comenzaremos por el miembro de la izquierda
MI:
$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
Si te fijas esto es una diferencia de cuadrados, sin embargo, al observar el MD nos damos cuenta que debemos llegar a una expresión que solo admita coseno, es por ese motivo que lo más conveniente sería transformar $\operatorname{sen}^2 x$ (aplicando la identidad fundamental
$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2\cos^2 x - 1$ que es precisamente el miembro de la derecha como se pedía.

A continuación te proponemos varios ejercicios para que comiences a adquirir habilidades en la aplicación de lo estudiado

1- Transforma las siguientes expresiones de modo que sólo contengan la razón trigonométrica que se indica y calcula su valor numérico para el dato correspondiente

a) $\dfrac{1}{1+\cos x} + \dfrac{1}{1-\cos x}$ $x \neq 0^0$ (senx , dato senx = $\dfrac{4}{5}$)

b) $\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \cdot \dfrac{1+\dfrac{1}{\tan^2 x}}{\dfrac{1}{\tan^2 x}}$ $x \neq 0^0, 90^0$ (tanx , dato cosx = $\dfrac{5}{13}$)

2- Simplifica las siguientes expresiones tanto como sea posible

a) $\dfrac{1}{1+\cos x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$ $x \neq 0^0$

b) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x$ $x \neq 90^0$

c) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 \mathrm{x}} + \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}$ $x \neq 0^0$

3- Prueba que se cumple:
a) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 - 1$
b) $\cos^2 x + \cos^2 x \cdot \dfrac{1}{\tan^2 x} = \dfrac{1}{\tan^2 x}$
c) $\operatorname{sen}^3 + \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x = \operatorname{sen} x$
d) $\left(1 + \dfrac{\cos^2 \mathrm{x}}{\operatorname{sen}^2 \mathrm{x}}\right) \cdot \operatorname{sen}^2 x = 1$

Respuestas y/o comentarios

a) R/ $\frac{2}{\text{sen}^2 x}$ ……………valor numérico v.n= $\frac{25}{8}$

b) R/ $\tan^2 x$

En este caso, como solo disponemos del valor del coseno, basta escribir tanx en función de cosx, para ello debemos recordar la identidad

$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}\,(x \neq 90^0)$

$\therefore \tan^2 x= \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ y sustituyendo tendremos que v.n= $\frac{1}{\left(\frac{5}{13}\right)^2}$ -1= $\frac{169}{25} - 1 = \frac{144}{25}$

2-

a) $\frac{1}{\text{sen}^2 x}$

b) 1

c) 1

Trabajo individual

Demostrar que:

1-(1 +$\tan^2 x$)· (1-$\cos^2 x$)=$\tan^2 x$

2- $\frac{1}{1+\text{sen}x} + \frac{1}{1-\text{sen}x} = \frac{2}{\cos^2 x}$

3- $\frac{1}{\cos^2 x} - \tan \frac{1}{1-\text{sen}x} = \frac{2}{\cos^2 x}$

Ejercicios sobre identidades trigonométricas.

Debes recordar que:

Para demostrar una identidad puedes transitar por varios caminos

Pues podemos asumir dos caminos clásicos

1- Trabajar con un miembro y realizando transformaciones lógicas arribar al otro.

2- Trabajar con ambos, por separados, y llegar al mismo resultado

Para demostrarla debes escoger el miembro en el cual comenzaremos a trabajar, que generalmente será el que mas posibilidades de transformación nos brinde.

1-Probar que se cumple:

a) (1-senx+cosx)^2=2(1-senx) (1+senx)

b) $\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \cdot \frac{1+\frac{1}{\tan^2 x}}{\frac{1}{\tan^2 x}} = \tan^2 x$

c) (senx+cosx)^2+(senx-cosx)^2 = 2

d) $\frac{\tan x + \frac{1}{\tan^2 y}}{\frac{1}{\tan x} + \tan y} = \frac{\tan x}{\tan y}$

e) $\tan^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 y} = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \tan^2 y$

Comentarios sobre las respuestas y/o soluciones

Las transformaciones que se realizan en el desarrollo de la demostración de la identidad no siempre conducen al camino correcto, pueden existir trayectorias que no conduzcan a la racionalidad de la solución, es ahí donde debemos encaminar nuestros esfuerzos para lograr habilidades en el manejo y operatividad de las identidades.
Cada estudiante escoge el camino a seguir para lograr el objetivo.

a) fíjate que se trata de un trinomio al cuadrado, por lo que si no sabes la regla entonces bastaría multiplicar una vez por el mismo y luego agrupar términos semejantes
$(a+b+c)^2= a^3+ b^3+c^3+2(ab+ac+bc)$

Trabajo individual
Demuestre que las siguientes igualdades son ciertas
a) $\cos^2 x+\text{sen}^2 x=1- 2\text{sen}^2 x$

b) $\tan x+ \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{1}{\text{sen}x \cdot \cos x}$

c) $\text{sen}x\ (1+\tan x)+\cos x(1+ \dfrac{1}{\tan x}) = \dfrac{\text{sen}x + \cos x}{\cos x.\text{sen}x}$

d) $\dfrac{\text{sen}x}{1+\cos x} + \dfrac{1}{\tan x})= \dfrac{1}{\text{sen}x}$

e) $1-\tan^2 x= 2- \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Tablas trigonométricas
No siempre es posible calcular con ángulos notables ni determinar las razones como se hizo anteriormente con varios de ellos, es muy engorroso e inexacto, es por eso que en el trabajo con las razones trigonométricas se utilizan valores que han sido calculado y con suficiente precisión. En estas tablas el valor de la razón aparece en la intersección de la fila que corresponde al número de grados y la columna que corresponde a las décimas. Existen tablas que en la misma página aparecen los valores del seno y del coseno, teniendo en cuenta que cada valor corresponde al seno de un ángulo y al coseno del ángulo complementario, para el seno los grados aparecen en la columna del extremo izquierdo y crecen de arriba hacia abajo y para el coseno los grados aparecen en la columna del extremo derecho crecen de abajo hacia arriba. En la tabla solo aparecen las cifras decimales,la parte entera que es 0 para todos los valores se escribe únicamente en la columna que corresponde a 0 décimas.

seno

G	,0	,1	,2	...	,6	,7	,8	,9	
0	0,0000	0,0017	0035	...	0105	0122	0140	0157	0175	89
1	0,0175	0192	0209	...	0279	0297	0314	0332	0349	88
2	0,0349	0366	0384	...	0454	0471	0488	0506	0523	87
3	0,0523	0541	0558	...	0628	0645	0663	0680	0698	86
4	0,0698	0715	0732	...	0802	0819	0837	0854	0872	85
5	0,0872	0889	0906	...	0976	0993	1011	1028	1045	84
6	0,1045	1063	1080	...	1149	1167	1184	1201	1219	83
7	0,1219	1236	1253	...	1323	1340	1357	1374	1392	82
...										
39	0,6293	6307	6320	...	6374	6388	6401	6414	6428	50
40	0,6428	6441	6455	...	6508	6521	6534	6547	6561	49
41	0,6561	6574	6587	...	6639	6652	6665	6678	6691	48
42	0,6691	6704	6717	...	6769	6782	6794	6807	6820	47
43	0,6820	6833	6845	...	6896	6909	6921	6934	6947	46
44	0,6947	6959	6972	...	7022	7034	7046	7059	7071	45
		,9	,8	...	,4	,3	,2	,1	0	G

coseno

Veamos como “buscar “ en la tabla

1- Busca en la tabla :

a) $sen32^0$

b) $cos35^0$

c) $sen47,5^0$

d) $cos\ 59,3^0$

a) En este caso en la columna más a la izquierda en la tabla encontramos la fila que comienza con 32 y en la intersección con la columna encabezada por “,0 “ encontramos el valor buscado: 0,5299, luego $sen32^0$= 0,5599.

b) En este caso se trata del coseno y debemos buscar 35 en la columna más a la derecha en la tabla, no aparece en esta página si no en la siguiente .En la intersección de eta fila con la columna en cuyo pie aparece ,0 encontramos el valor buscado: 8192. Luego cos 35^0= 0,8192 seno

G	,0 ...	,7	,8 ...	1	
30	5000	5105	5120	5150	59
31	5150	5255	5270	5299	58
32	5299	5402	5417	5446	57
33	5446	5548	5563	5592	56
34	5592	5693	5707	5736	55
35	5736	5835	5850	5878	54
	(1,0)...	,3	,2 ...	,0	G

coseno

a)

seno

G	,0 ...	,5	,6 ...	1	
45	7071	7133	7145	7193	44
46	7193	7254	7266	7314	43
47	7314	7373	7385	7431	42
	....				
53	7986	8039	8049	8090	36
54	8090	8141	8151	8192	35
	,5		,4	,0	G

coseno

c) La fila que su extremo izquierdo comienza por 47 aparece en la intersección de esta fila y la columna en cabezada por ",5" encontramos 7373.Luego sen47,5^0 = 0,7373.
d) Análogamente se llega a que cos 59,3^0= 0,5105.

Es conveniente aclarar que si los ángulos aparecen con una precisión mayor que las décimas , se hace necesario redondear y en ese caso se está introduciendo un error, esto significa que no todas las cifras de la tabla se pueden asumir correctas, en estos casos sólo resultan correctas tres de las cuatro que da la tabla y eso hace que la precisión del resultado final quede limitada a tres cifras significativas. Existen otras tablas que tienen un mayor número de cifras más precisas.

Por ejemplo, si buscáramos sen 54,18^0 debemos redondear la amplitud a las décimas, que es la precisión de la tabla y obtenemos 54,2^0.En la tabla encontramos sen54,2^0=0,8111. Como no podemos garantizar tantas cifras damos el resultado con tres: sen54,2^0=0,811
A continuación veremos el procedimiento cuando se nos presente lo siguiente:
-Buscar cos 77^{0}20′

En este caso debemos expresar los minutos como una fracción decimal de grado.

Tenemos $20' = \left(\frac{20}{60}\right)^0$ =0,333^0,luego cos77^{0}20′= cos77,333^0 y redondeando hasta la décimas obtenemos 77,3^0.

$\therefore$cos 77,3^0=0,2198 y cuando redondeamos resulta 0,220.

Debes tener en cuenta que en la práctica la mayor parte de los números que surgen son valores aproximados como los de este ejemplo, sin embargo, mantenemos el convenio de escribir el signo de igualdad en todos los casos.

En el caso de tangente y cotangente la estructura de la tabla es similar, aunque debemos recordar que no siempre la parte entera es cero, ya que los ángulos mayores que 45^0 sus tangentes son mayores que 1.

A continuación te proponemos lo siguiente:

1-Calcula $\dfrac{\text{sen}35{,}2^0 + \cos 57^0}{\tan 57^0}$

2- En el ΔABC rectángulo en C , se tiene que c=12,3 y α = 67,3^0. Calcula a.

Comentarios

1- 0,728 (todos los valores utilizados han sido redondeados a tres cifras)

2-11,4 (en este caso se trata de valores que proceden de mediciones con tres cifras significativas, el resultado debe tener también tres cifras significativas)

Trabajo independiente

Recuerda que: No siempre tenemos a mano una calculadora personal, es por eso que debemos estar bien preparados para cualquier eventualidad.

1- Busca en la tabla los siguientes valores y compáralos con el resultado de tu calculadora personal

a) sen14^0

b) sen3^0

c) cos76^0

d) cos23,3^0

e) sen23,12′

f) tan71,85^0

g) sen20,15′

2- Halla una solución de las siguientes ecuaciones:

a) sen 25,4^0=y

b) cos2^{0}37′ = x

Resolución de ecuaciones trigonométricas sencillas

Te proponemos resolver ecuaciones trigonométricas sencillas, pero para ellos debes tener bien presentes lo estudiado sobre razones trigonométricas y uso de tablas, ya que, en su mayoría los ángulos con los que trabajarás no son notables.

1- Resolver si $0^0 \leq$ x 90^0

a) senx = $\frac{1}{2}$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
c) sen x = 0,5240
d) tanxα = 0,904
e) cos x= 0,81

Comentarios
a) 30^0, esta razón no es necesario buscarla en la tabla y/o **cp (** calculadora personal) ya que corresponde a un ángulo notable
b) 30^0, esta razón no es necesario buscarla en la tabla y/o **cp (** calculadora personal) ya que corresponde a un ángulo notable
c) $31{,}6^0$
d) 42^0
e) $35{,}9^0$

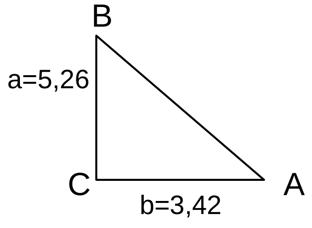
2- Los catetos a y b de un triángulo rectángulo miden 5,26 cm y 3,42 cm .Calcula el ángulo β.

3- La proyección horizontal de una fuerza es 41 N. Si su módulo es 50 N, ¿cuál es el ángulo que forma con la horizontal?

4- Resolver si $0^0 \leq x\ 90^0$
a) 4senx – 1= senx
b) $\cos^2 x = \frac{3}{4}$

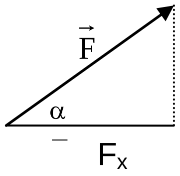
Comentarios
1-
a) 30^0, esta razón no es necesario buscarla en la tabla y/o **cp (** calculadora personal) ya que corresponde a un ángulo notable
b) 30^0, esta razón no es necesario buscarla en la tabla y/o **cp (** calculadora personal) ya que corresponde a un ángulo notable
c) $31{,}6^0$
d) 42^0
e) $35{,}9^0$

2-
R/33^0
En este caso los datos representan valores procedentes de mediciones con tres cifras significativas, la respuesta debemos darla con 3 cifras



En la figura se aprecia que tan $\beta = \frac{3,42}{5,26} = 0,650$ y en la tabla ó cp encontramos que corresponde a 33^0

3- R/ $34,9^0$



Sea α el ángulo que forma la fuerza con la horizontal se aprecia que $\cos\alpha = \frac{F_x}{|F|} = \frac{41}{50} = 0,82$, bastaría buscar en la tabla la sucesión de cifras 0,820 y encontramos $\alpha = 34,9^0$

4-
a) $x = 30^0$
Al agrupar términos semejantes nos queda una razón trigonométrica conocida.

b) $x = 30^0$
Coincidentemente el ángulo es el mismo, pero lo que importa es el trabajo que se realiza para llegar a él, en este caso nos interesaría llegar a cosx=……por lo que pasando de potencia a radical obtenemos que:
$\cos x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (nos interesaría solo el valor positivo)

Trabajo independiente
1- Halle una solución para las siguientes ecuaciones
a) $2\cos^2 x + 2 = 3$
b) $10\,\text{sen}^2 x + 3 = 2\,\text{sen}^2 x + 10$
c) $\cos^2 x - \cos x = 0$
d) $2\text{sen}^2 x - \text{sen} x = 0$

Comentarios sobre las soluciones
1- 45^0
2- $69,3^0$
En este caso debes fijarte que después de agrupar términos semejantes y despejar resulta que $\text{sen}^2 x = \frac{7}{8} = 0,875$, aun faltaría encontrar $\sqrt{0,875} = 0,9354$
$\therefore$ senx=0,9354
3- 0^0, 90^0
Primeramente debes aplicar tus conocimientos del álgebra para transformar la expresión en un producto, en este caso debes fijarte que puedes extraer factor común **cosx ,**, es decir
cosx (cosx-1)=0, y de aquí resultan dos ecuaciones sencillas:
cosx=0 y cos x=1
4- 0^0, 30^0
El procedimiento es análogo

Resolución de ecuaciones trigonométricas sencillas

Continuaremos el trabajo anterior para desarrollar habilidades en la resolución de ecuaciones trigonométricas que requieran más trabajo algebraico en el camino para encontrar definitivamente sus soluciones.

1- Encontrar los valores de x, $0^0 \leq x \leq 90^0$ que satisfagan las siguientes ecuaciones

a) $(senx+\cos x)^2$ - 2senxcox - 2senx=0

b) sen^2x - 3senx+2=0

c) $2sen^2x$ -4= 5 cosx

d) 3 $\cos^2x$= 7 – senx

e) 3 $\tan^2x$=1 + 2 tanx

f) $2\cos^2 x + 4sen^2 x = 3$

g) $\cos^2 x - \frac{1}{2} = sen^2 x$

h) $4\cos x = \frac{1}{\cos x}$

i) $\tan x = \frac{3}{\tan x}$

soluciones y/o comentarios

1-

a) 30^0

Después de efectuar el binomio al cuadrado debes fijarte que $sen^2x+\cos^2x$= 1 (identidad fundamental) y luego de reducir términos semejantes resulta $senx = \frac{1}{2}$

b) 90^0

Estamos en presencia de un trinomio que al descomponerlo resulta:

(senx-2) (senx-1)= 0, obteniendo senx=2 ó senx=1

En el caso de senx=2 es imposible (ya habíamos discutido que los valores del seno no sobrepasaban el valor 1, ya que era la razón entre un cateto y la hipotenusa.

El otro caso senx= 1 ya es conocido.

c) S= { }

Al transformar toda la expresión en función de una sola función (cosx) obtenemos la ecuación cuadrática $2\cos^2x$+5cosx+2=0 obteniéndose

Cosx=-$\frac{1}{2}$ ó cosx=-2

d) x=90^0

El trabajo es análogo, se obtiene $3sen^2x$-7sen+4=0 y al descomponer en factores resulta: (3senx-4) (senx-1)=0, llegando a:

$senx = \frac{4}{3}$ (n.t.s) ó senx=1 x=90^0 **nota: n.t.s significa "no tiene solución"**

e) 45^0

Obtenemos una ecuación de segundo grado que arroja lo siguiente:

tanx=-3 (n.t.s.) y tanx=1 x=45^0

f) x= 45^0

g) $x=60^0$

Esta ecuación tiene dos caminos de acceso a su solución:

Podemos convertir toda la expresión a otra equivalente que dependa del coseno ó a otra que dependa del seno , pero en ambos casos, aunque las expresiones resultantes no tengan la misma sintaxis arrojarán siempre las mismas soluciones.

h) $x= 60^0$

i) $x=60^0$

Trabajo independiente

Para el estudio independiente te proponemos lo siguiente:

1-Los catetos de un triángulo rectángulo ABC miden respectivamente:
1,02 cm y 3,93cm , determine la amplitud de sus ángulos interiores agudos.

2-La hipotenusa c y el cateto b de un triángulo rectángulo ABC miden respectivamente 5,23 cm y 2,41 cm ,determine la amplitud del ángulo α.

3- Resuelva

$$\frac{3}{\cos x}-2=\cos x$$

Soluciones y/o comentarios

1- $75{,}4^0$ y $14{,}6^0$

2- $62{,}6^0$

3- 0^0

En este caso estamos en presencia de una ecuación fraccionaria por lo que debemos "eliminar" el denominador para que nos resulte mucho más fácil, esto lo conseguiremos multiplicando ambos miembros por cosx obteniendo:

$3-2\cos x=\cos^2 x$,que es una ecuación de segundo grado resultando, luego del trabajo correspondiente:

$\cos x=-3$ (n.t.s) ó $\cos x=1$

Resolución de ecuaciones trigonométricas sencillas

Continuaremos desarrollando habilidades en la resolución de ecuaciones Trigonométricas sencillas.

1-Encontrar los valores de x, $0^0 \leq x \leq 90^0$ que satisfagan las siguientes ecuaciones

a) $3(1+\cos x)=2\operatorname{sen}^2 x$

b) $4 - 4\cos x=3\operatorname{sen}^2 x$

c) $6-6\cos^2 x=2+\operatorname{sen} x$

d) $\tan x-\dfrac{1}{\tan x}=1$

e) $\tan^2 x+\dfrac{1}{\cos x}=1$

f) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x}=\dfrac{1}{3}$

g) $2\operatorname{sen} x-\sqrt{3}\tan x=0$

h) $\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2\text{sen}x}{\cos x} + 1 = 0$
g) senx- 3cosx = 0
h) sen2x=1

Respuestas y/o comentarios
a)-$\varnothing$, en este caso no podemos encontrar soluciones que satisfagan las condiciones

b) 0^0 , $70{,}5^0$

c) $41{,}8^0$

d) $58{,}3^0$
debes fijarte que es una ecuación fraccionaria, al eliminar el denominador llegarás a una ecuación cuadrática que ya conoces el procedimiento para resolverla.

e) 0^0 , todo es análogo al anterior trabajo.

f) $17{,}5^0$
En este caso, como puedes “multiplicar cruzado” y llegarás a una ecuación cuadrática

g) $71{,}6^0$
debes fijarte que para obtener una razón puedes transponer hacia el miembro derecho 3cosx y dividir luego toda la expresión por cosx obteniendo de esa forma tanx=3 y al buscarlo en la tabla ó en tu calculadora personal obtienes aproximadamente $71{,}6^0$

h) 45^0
De forma intuitiva puedes darte cuenta que el valor de x debe ser 45^0 para que multiplicado por 2 nos de 90^0 que es precisamente el ángulo cuyo seno es 1.
Pero esto se puede interpretar de esta otra manera:
Debes preguntarte cual es el ángulo cuyo seno es 1 , es evidente que la respuesta a esta pregunta es 90^0, luego escribiremos:
sen2x=1
 2x= 45^0
Pero como estamos buscando el valor de “x” solo restaría despejar y obtener x=45^0.

Trabajo independiente
1-Una fuerza de 60N y su proyección horizontal de 24 N forman un ángulo ϕ .¿qué amplitud tiene dicho ángulo?

2-La proyecciones horizontal y vertical de una fuerza $\vec{F}$ son de 35N y 42N respectivamente. Determina el ángulo que forma la fuerza $\vec{F}$ con la horizontal.

3- Resuelva:
$$\frac{1}{1-\text{sen}^2 x} + \tan^2 x - 3 = 0$$

Soluciones y/o comentarios
1- 66^0
2- 50^0
3- 45^0

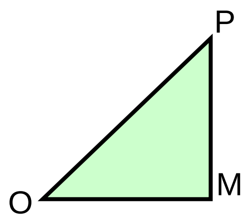
En este caso debes fijarte que $\frac{1}{1-\text{sen}^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$

Por lo que substituyendo nos quedaría:
$\tan^2 x + 1 + \tan^2 x - 3 = 0$
resultando tanx=1…y esto se cumple cuando $x=45^0$.

Razones trigonométricas de ángulos obtusos

Hasta ahora hemos realizado el estudio de las razones trigonométricas de ángulos entre 0º y 90º incluyendo éstos, pero los mismos no son los únicos ángulos con los que es necesario trabajar. Por ejemplo, conocemos de la existencia de triángulos obtusángulos,
¿será posible determinar las razones trigonométricas del ángulo obtuso de este tipo de triángulo?

Para continuar con el estudio de las razones trigonométricas del resto de los ángulos es necesario introducir nuevas definiciones las que se estudiarán en el presente epígrafe.



Consideremos un triángulo OMP rectángulo en M.

Si tomamos como unidad de medida la hipotenusa $\overline{OP}$ de este triángulo y la hacemos girar alrededor del extremo O en el sentido positivo (contrario al movimiento de las agujas del reloj), su otro extremo P describirá una circunferencia de radio igual a la unidad de longitud (OP).

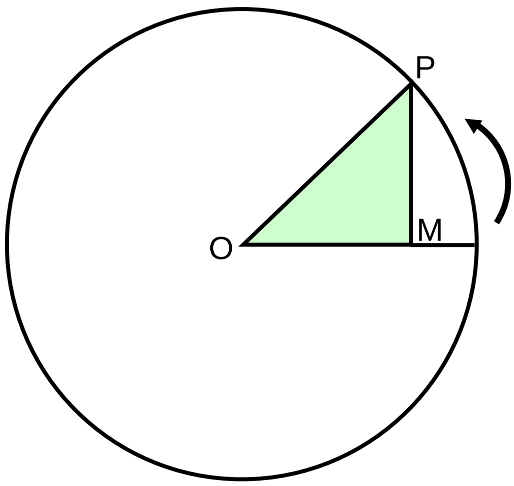


Fig 1

La circunferencia descrita de este modo recibe el nombre de circunferencia trigonométrica y el círculo determinado por ella se llama círculo trigonométrico.

De ahora en adelante el círculo trigonométrico será una figura importante para obtener las razones trigonométricas de otros ángulos, así como para deducir nuevas propiedades de ellas.

Anteriormente se ilustró cómo definir las razones trigonométricas en un plano coordenado. Esta idea puede ser utilizada para definir razones trigonométricas en ángulos que no son agudos.

En la figura 1 se representó convenientemente un triángulo rectángulo en un sistema de coordenadas rectangulares. Para llevar a la práctica esta idea representamos un círculo trigonométrico en un sistema de coordenadas rectangulares.

En este sistema todo ángulo puede ser colocado (y de manera única) de forma tal que su vértice coincida con el origen de coordenadas, uno de sus lados (llamado lado inicial) coincida con la semirrecta positiva OX y que el otro lado (llamado lado terminal) quede ubicado (a partir del lado inicial) en la zona barrida en sentido contrario a las manecillas del reloj.

De esta forma, el lado terminal de cada ángulo interseca en un único punto a la circunferencia y podemos asociar al ángulo ese punto de una manera unívoca. Esto nos permite definir las razones trigonométricas usando las coordenadas de esos puntos.

Para escribir las razones trigonométricas expresamos en función de las coordenadas de P, los lados del triángulo que se forma al proyectar el punto P sobre el eje x (figura 3)

En este caso $\overline{OQ} = x$, $\overline{PQ} = y$, $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Es importante observar que r siempre es positivo).

Luego vamos a formar las razones trigonométricas para ángulos en los diferentes cuadrantes.

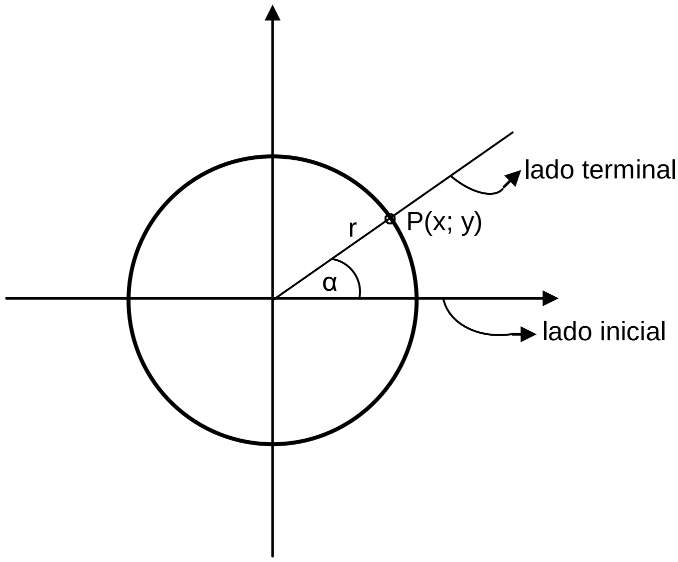


Fig. 2

Para ángulos [0º; 90º]:

$$\text{sen}\,\angle POQ = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos\angle POQ = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\tan\angle POQ = \frac{y}{x}, \quad \cot\angle POQ = \frac{x}{y}$$

$$\sec\angle POQ = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x},$$

$$\csc\angle POQ = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} \quad (x, y \neq 0)$$

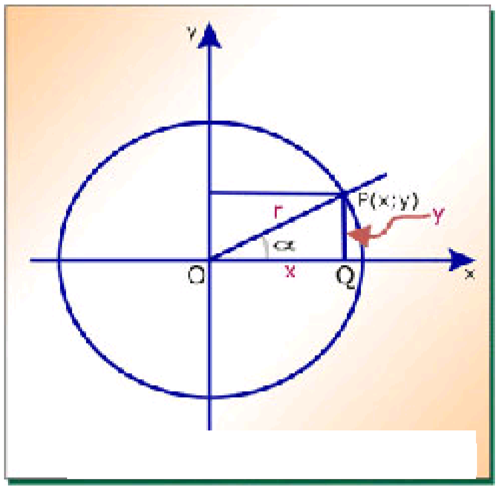


Fig.3

Obsérvese que estas razones son las mismas que se habían definido anteriormente.

Consideremos ahora ángulos en el intervalo [90º; 180º] (II cuadrante).

Al proyectar el punto P sobre el eje "x" se obtiene un triángulo rectángulo similar al que se lograba en el primer cuadrante (figura.4).

Las razones trigonométricas del ángulo POQ serían:

$$\operatorname{sen}\angle POQ = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos\angle POQ = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

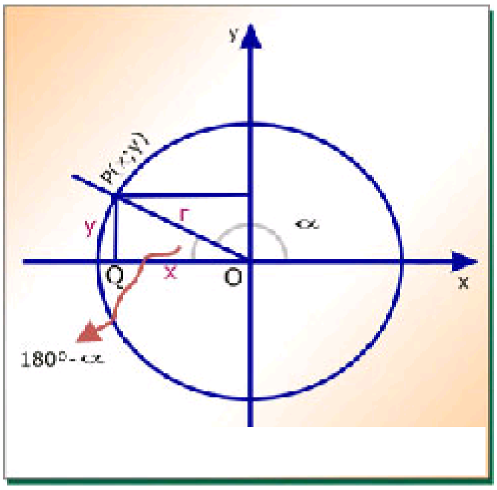


Fig. 4

$$\tan\angle POQ = \frac{y}{x}, \quad \cot\angle POQ = \frac{x}{y}$$

$$\sec\angle POQ = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

$$\csc\angle POQ = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} \quad (x,\, y \neq 0)$$

En este caso la abscisa del punto es negativa y la ordenada positiva, es decir, $x < 0$ e $y > 0$.

Si el ángulo está en el III cuadrante [180º; 270º] (figura.5) entonces para el ángulo POQ tenemos:

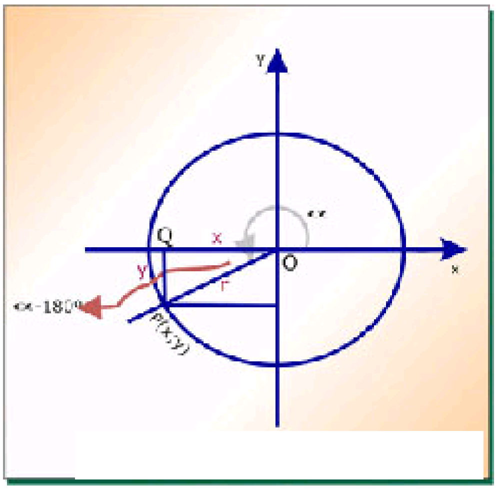


Fig.5

$$\operatorname{sen}\angle POQ = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\cos\angle POQ = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\tan\angle POQ = \frac{y}{x}, \quad \cot\angle POQ = \frac{x}{y}$$

$$\sec\angle POQ = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

$$\csc\angle POQ = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} \quad (x,\, y \neq 0)$$

Observe que en este caso $x < 0$ e $y < 0$.

Para un ángulo del intervalo [270º; 360º], o sea, del IV cuadrante (figura.6).

Las razones trigonométricas del ángulo POQ serían:

$$\operatorname{sen}\angle POQ = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\cos\angle POQ = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\tan\angle POQ = \frac{y}{x}, \quad \cot\angle POQ = \frac{x}{y}$$

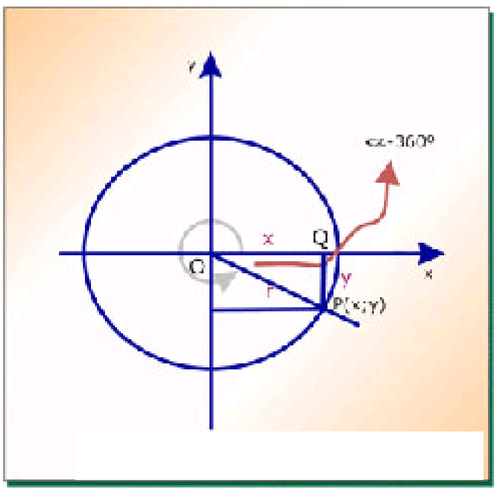


Fig.6

$\sec\angle POQ = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$, $\csc\angle POQ = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$ (x, y ≠ 0).

Observe que en este caso x > 0 e y < 0.

Como se observa en todos los casos, las razones trigonométricas en función de las coordenadas del punto de intersección del lado terminal del ángulo y la circunferencia trigonométrica tienen la misma estructura, solo se diferencian en el signo de las coordenadas del punto que dependen de la posición de este en el plano coordenado. Por lo que definimos:

Definición:

Sean α un ángulo y P(x;y) el punto que le corresponde en la circunferencia trigonométrica de radio r, entonces r=$\sqrt{x^2+y^2}$ y definimos:

senα=$\frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ cosα=$\frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ tanα=$\frac{y}{x}$ ($\alpha \neq 90^0$; $\alpha \neq 270^0$)

Con esta definición las razones trigonométricas pueden ser negativas, pero el seno y el coseno en módulo no pueden ser mayores que 1

$$\boxed{-1 \leq \text{sen}\ \alpha \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1}$$

Veamos un ejemplo:

Calcular las razones trigonométricas de 150^0

Sea P(x;y) el punto que corresponde al ángulo 150^0 en la circunferencia y P′ su proyección sobre el eje x .

Te puedes dar cuenta que P se encuentra en el II cuadrante por lo que $\angle$POP′=30^0 y trabajando en el Δ POP′rectángulo en P′ se tiene que :

y=$\frac{1}{2}$r y x=$-\frac{\sqrt{3}}{2}$r (debes notar que en el II cuadrante x≤ 0

luego:

$$\text{sen}150^0 = \frac{y}{r} = -\frac{\frac{1}{2}r}{r} = \frac{1}{2} \quad (= \text{sen}30^0)$$

$$\cos 150^0 = \frac{x}{r} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}r}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (= \cos 30^0)$$

$$\tan 150^0 = \frac{y}{x} = -\frac{\frac{1}{2}r}{-\frac{\sqrt{3}}{2}r} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (= -\tan 30^0)$$

Como puedes observar las razones de 150^0 coinciden en valor absoluto con las de 30^0.

Además este ejemplo ilustra que ellas pueden ser positivas o negativas y que su signo depende de los signos de las coordenadas de los puntos en los diferentes cuadrantes.

En resumen:

El seno es positivo donde lo es “y”, es decir , I y II cuadrantes
El coseno es positivo donde lo es “X”, es decir, I y IV cuadrantes.
La tangente es positiva donde ambas coordenadas tiene el mismo signo, es decir , I y III cuadrantes.

Ejercicio 1:
Calcula las razones trigonométricas de:
a) 120^0
b) 240^0
c) 315^0

Respuestas y/o Comentarios:

a) Sen120^0= $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cos120^0=$-\frac{1}{2}$ tan120^0= $-\sqrt{3}$

debes fijarte que 120^0 y 60^0 son ángulos suplementarios por lo que las razones de 120^0 coinciden modularmente con las de 60^0 , solo tienes que tener en cuenta que por encontrarse en el II cuadrante sólo el seno sería positivo.

b) Sen240^0= $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ cos240^0=$-\frac{1}{2}$ tan240^0= $\sqrt{3}$

En este caso, el punto P estaría en el III cuadrante por lo que el ángulo POP′ tendría una amplitud de 60^0, esto quiere decir que las razones de 240^0coicidirían modularmente con las de 60^0, solo tendrías que tener en cuenta que en este cuadrante seno y coseno son negativos.

c) Sen315^0= $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ cos315^0=$\frac{\sqrt{2}}{2}$ tan315^0= -1

En este caso, el punto P estaría en el IV cuadrante por lo que el ángulo POP′ tendría una amplitud de 45^0, esto quiere decir que las razones de 315^0coicidirían modularmente con las de 45^0, solo tendrías que tener en cuenta que en este cuadrante seno y tangente son negativos.

Trabajo individual
1-Halle las razones trigonométricas de
a) 135^0
b) 210^0
c) 300^0
respuestas y/o comentarios

a) Sen135^0= $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cos135^0=$\frac{\sqrt{2}}{2}$ tan315^0= 1

b) Sen210^0= $-\frac{1}{2}$ cos210^0=$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ tan315^0= $\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) Sen300^0= $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ cos300^0=$\frac{1}{2}$ tan315^0= $\sqrt{3}$

Ejercicios y problemas sobre razones trigonométricas

A continuación te proponemos ejercicios y problemas para que puedas adquirir habilidades en el manejo de las razones trigonométricas de ángulos menores que 360^0.

1- Si senθ=$-\frac{1}{2}$ entonces:

a)__ $\theta\in$IIC b) __ $\theta\in$II y IIIC c) __θ $\in$II C y IVC d)__ $\theta\in$III C y IV C

2- Si senα < 0 y cosα > 0 entonces:
a)__ $\alpha\in$ I C b) __$\theta\in$II C c)__ $\theta\in$III C d) __$\theta\in$IV C

3-Si tanα<0 y senα<0 entonces
a) ___$\alpha\in$ II C b)___ $\alpha\in$ II C c)___$\alpha\in$ II C y IV C d)__ $\alpha\in$ III C

4-Analice la veracidad de cada una de las siguientes combinaciones.
a)___ senα>0 , cos$\alpha\alpha$ <0 y tanα <0
b)___ senα<0 , cosα >0 y tanα >0
c)___ senα>0 , cos$\alpha\alpha$ >0 y tanα <0

5-De las siguientes combinaciones señale cuales son verdaderas. Fundamente en caso de de ser falsas.
a) __ senδ>0 ,cosδ=0 y tanδ no definida
b) __ senδ<0 ,tanδ=1 y -1< cosδ <0
c) __ senδ=0 ,cosδ=0 y tanδ=0

6- En cada uno de los casos determina las razones trigonométricas del ángulo θ bajo las condiciones dadas:

a) senθ=$\frac{3}{4}$ y $\theta\in$ II C

b) cosθ=$-\frac{1}{3}$ y senθ <0

Respuestas y/o comentarios
1- d
2- d
3- b
4- a) V
b) F
c) F
5-
a)V (necesariamente δ estaría en I y/o II C y solamente cosδ sería 0 en 90^0 y para este ángulo la tangente no existe)

b) V (necesariamente δ estaría en IIIC por lo que δ sería 225^0
c) F
En este caso la tangente no estaría definida

6-

a) Cosθ=$-\frac{\sqrt{7}}{4}$ tanθ= $-\frac{3\sqrt{7}}{7}$

Debes recordar la identidad $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$, esta identidad involucra seno y coseno de un mismo ángulo, basta sustituir por el valor de senθ=$\frac{3}{4}$ y despejar cosθ, pero debes tener en cuenta que $\theta\in$ II C por lo que tomaríamos el valor negativo.

b) senθ=$\frac{2\sqrt{2}}{3}$ y tanθ=$\frac{3\sqrt{7}}{7}$

El trabajo es similar, solo debes darte cuenta que bajo las condiciones dadas θ se encontraría en el III C y en este caso senθ sería menor que cero y la tangente positiva.

Trabajo independiente

1-Si P(-4;8) es un punto de una circunferencia que pertenece al lado terminal del ángulo x

a) En qué cuadrante se encontraría el ángulo x?

b) Calcula senx, cosx, y tanx.

Ejercicios y problemas sobre razones trigonométricas

Continuaremos desarrollando habilidades en el cálculo trigonométrico a través de la resolución de ejercicios y problemas donde estén presentes las razones trigonométricas.

1-En cada uno de los incisos siguientes se da un punto de la circunferencia trigonométrica que pertenece al lado terminal de un ángulo X. Determina las razones trigonométricas de dicho ángulo y el cuadrante al que pertenece en cada caso.

a) $r = 2$ y $P(1;\sqrt{3})$

b) $r = 2$ y $P(0;2)$

c) $r = \sqrt{2}$ y $P(-\sqrt{2};0)$

2- En cada uno de los siguientes casos determina las razones trigonométricas de dicho ángulo θ bajo las condiciones exigidas.

a) $\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ y $\cos\theta < 0$

b) $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ y $\text{sen}\,\theta < 0$

c) $\tan\theta = -\frac{3}{4}$ y $\cos\theta > 0$

3-Conocidos $\tan\alpha = \frac{2}{3}$ y $180^0 < \alpha < 270^0$. Calcula senα y cosα.

4- En la tabla siguiente se dan valores de las razones trigonométricas para un ángulo α en determinado intervalo. Determina en cada caso el valor pedido

	$180^0<\alpha<360^0$	$90^0<\alpha<180^0$	$90^0<\alpha<270^0$
dado	$\cos\alpha = \frac{3}{4}$	senα=0,4	senα=0,1
Se busca	senα	cosα	tanα

5- Calcula

$$\sqrt{\frac{\tan 180^0 . \text{sen}\,270^0 - \cos 180^0 . \text{sen}\,90^0}{-4\,\text{sen}\,270^0 + 5\cos 360^0}}$$

Respuestas y/o comentarios

1-

a) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos x = \frac{1}{2}$ $\tan x = \sqrt{3}$ $x \in IC$

b) senx=1 cosx= 0 tanx= no definida x es un ángulo axial

c) senx= 0 cosx=-1 tanx= 0 x es un ángulo axial

2-

a) $\theta \in$ II C $\cos\theta = -\frac{3}{2}$ $\tan\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

b) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\tan\theta = 2\sqrt{2}$

c) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5}$ $\cos\theta = \frac{4}{5}$

3- $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$ $\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$

	$180^0<\alpha<360^0$	$90^0<\alpha<180^0$	$90^0<\alpha<270^0$
dado	$\cos\alpha = \frac{3}{4}$	senα=0,4	senα=0,1
Se busca	senα=$-\frac{\sqrt{7}}{4}$	cosα=$-\frac{\sqrt{21}}{5}$	tanα=$-\frac{\sqrt{11}}{33}$

5- $\frac{1}{3}$

Trabajo independiente

1- En la tabla siguiente se dan valores de las razones trigonométricas para un ángulo α en determinado intervalo. Determina en cada caso el valor pedido

	$0^0<\alpha<180^0$	$90^0<\alpha<270^0$	$270^0<\alpha<360^0$	$90^0<\alpha<180^0$
dado	$\cos\alpha = -\frac{1}{4}$	senα=$-\frac{1}{5}$	cosα=$\frac{2}{5}$	senα=$\frac{3}{10}$
Se busca	senα=	cosα	tanα	tanα

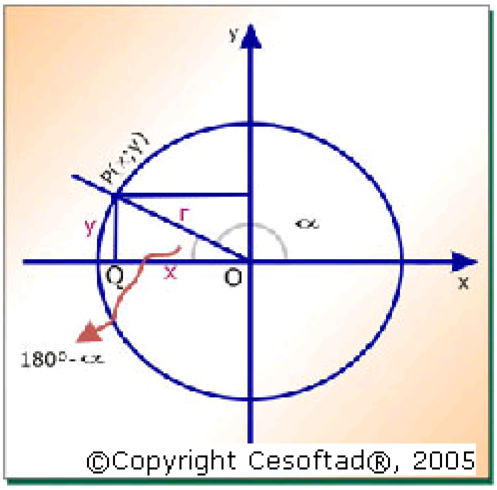
2-Si a=30^0, b=180^0;c=90^0 y d=270^0, calcula

a) $\frac{\operatorname{sen}^2 a + 2\cos b}{\tan^2 b + \operatorname{sen} c}$

b) $\sqrt{\frac{\cos^2 a + 2\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} c + \tan b}}$

Fórmulas de reducción

Hasta ahora hemos calculado las razones trigonométricas de algunos ángulos obtusos utilizando los valores correspondientes de ciertos ángulos agudos; estas ideas pueden generalizarse para reducir el cálculo de razones trigonométricas a los ángulos agudos.



Teorema 1:
Si α es un ángulo agudo entonces se cumple:
a) $\text{sen}(180^0-\alpha)= \text{sen}\alpha$
b) $\cos(180^0-\alpha)= - \cos\alpha$
c) $\tan(180^0-\alpha)= -\tan\alpha$

La demostración de este teorema es casi evidente por lo mismo que hemos venido trabajando en el trabajo de razones trigonométricas de ángulos obtusos ya que si nos fijamos en la figura tendremos :

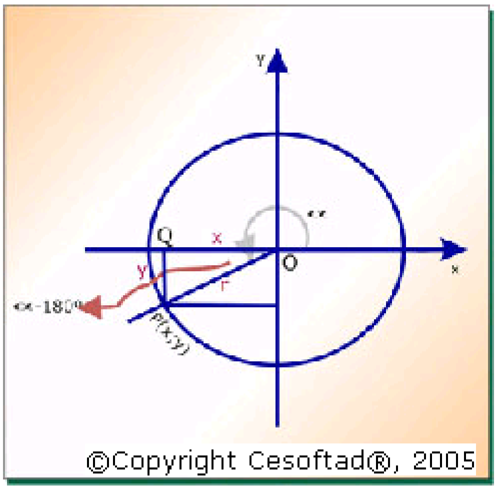
$$\text{sen}(180^0-\alpha)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\text{sen}\alpha$$

$$\cos(180^0-\alpha)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos\alpha$$

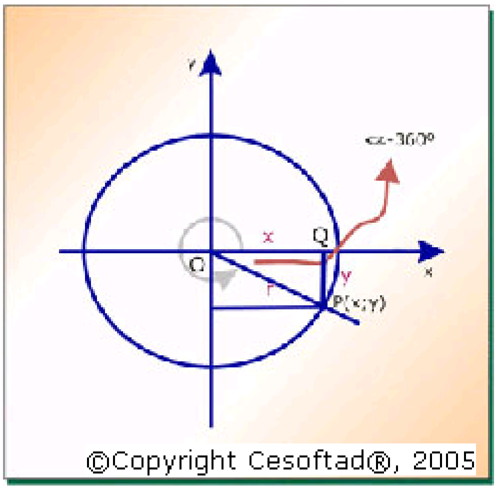
$$\tan(180^0-\alpha)=\frac{y}{x}=-\tan\alpha$$

Observa que por ser α un ángulo agudo entonces $180^0-\alpha$ es un ángulo del II C.
En la práctica , para calcular las razones trigonométricas de un ángulo del II C se resta de 180^0 y se toman las razones del ángulo agudo obtenido con el signo que le corresponde en el II C.

Ejemplo1:
Calcula $\cos 153{,}7^0$
R/ Como este ángulo es el del II C entonces calculamos su suplemento
$180^0-153{,}7^0= 26{,}3^0$
$\therefore \cos 153{,}7^0= \cos(180^0-26{,}3^0) = -\cos26{,}3^0= -0{,}8965$



Teorema 2:
Si α es un ángulo agudo entonces se cumple:
a) $sen(180^0+\alpha)= -sen\alpha$
b) $cos(180^0+\alpha)= - cos\alpha$
c) $tan(180^0+\alpha)= tan\alpha$



Teorema 3:
Si α es un ángulo agudo entonces se cumple:
a) $sen(300^0-\alpha)= -sen\alpha$
b) $cos(300^0-\alpha)= cos\alpha$
c) $tan(300^0-\alpha)= -tan\alpha$

La demostración de estos últimos teoremas puedes realizarla como trabajo independiente, son análogas a la demostración del Teorema 1 de la clase.

Veamos dos ejemplos donde se apliquen estos teoremas

Ejemplo 2:
Calcular $tan231,4^0$
R/ $231,4^0$ es un ángulo del III C entonces calculamos $231,4^0 -180^0 = 51,4^0$ y como la tangente es positiva en este cuadrante podemos escribir que:
$tan231,4^0=tan51,4^0= 1,2527$

Ejemplo3:
Calcula $sen321,2^0$
R/ $321,2^0$ es un ángulo del IV C entonces calculamos $360^0 - 321,2^0= 38,8^0$
Luego: $sen321,2^0= -sen38,8^0= -0,6266$

Podemos resumir que para calcular las razones trigonométricas de un ángulo obtuso hallamos su diferencia con el más próximo entre los valores 180^0 y 360^0, las razones trigonométricas coincidirán en módulo con las de la diferencia y tendrán el signo que corresponde al cuadrante. Para esto es conveniente esbozar el ángulo en un sistema de coordenadas para una mejor comprensión de la situación.

Trabajo Independiente
1- Completa la siguiente tabla para que al final quede en tus manos un resumen de las fórmulas de reducción.

	$180^0-\alpha$	$180^0+\alpha$	$360^0-\alpha$
sen			
cos			
tan			

2- Calcula los valores siguientes:
a) sen 135^0
b) sen 121^0
c) cos 315^0
d) sen 312^0
e) tan$149{,}9^0$

Respuestas y/o comentarios

1-

	$180^0-\alpha$	$180^0+\alpha$	$360^0-\alpha$
sen	senα	-senα	-senα
cos	-cosα	-cosα	cosα
tan	- tanα	tanα	- tanα

2-

a) sen135^0=sen 45^0=$\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Sen121^0=sen 59^0=0,8572

c) Cos315^0= cos 45^0=$\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) tan$149{,}9^0$= - tan $30{,}1^0$= - 0,5797

Ejercicios y problemas sobre fórmulas de reducción

1- Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\frac{\cos x}{\cos(180^0-x)}-\frac{\operatorname{sen}(360^0-x)}{-\operatorname{sen} x}$

b) $\frac{\operatorname{sen}(180^0+a)}{\operatorname{sen} a}+\frac{\cos(90^0-a)}{\operatorname{sen} a}$

c) $\frac{\operatorname{sen}(180^0+30^0)}{\tan(90^0-45^0)}\cdot\frac{\tan(360^0-60^0)}{\cos(180^0-45^0)}$

d) $\tan 210^0\cdot\cos 210^0\cdot\frac{1}{\operatorname{sen} 210^0}$

e) $\frac{\cos 120^0\cdot\cos 225^0}{\left(1+\frac{1}{\cos 240^0}\right)\cdot\operatorname{sen} 225^0}$

f) $\frac{\operatorname{sen} 210^0.\tan(90^0-30^0)\cdot\cos(-300^0)}{\frac{1}{\cos 315^0}}$

2-Prueba que:

a) $\cos 330^0 - \operatorname{sen} 60^0 = 0$

b) $\cos 225^0 - \tan 210^0 \cdot \operatorname{sen} 300^0 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$

c) $\dfrac{\tan 45^0 - \dfrac{1}{\tan 150^0}}{\cos 210^0 - \dfrac{1}{\cos 60^0}} = -\dfrac{6\sqrt{3}+2}{13}$

d) $\operatorname{sen}(90^0 - x) \cdot \operatorname{sen}(180^0 + x) + \cos(90^0 - x) \cdot \cos(360^0 - x) = 0$

Respuestas y/o comentarios

1- En todos estos incisos debes tener bien presentes la forma que adoptan los ángulos en cada uno de los cuadrantes, el signo de la razón trigonométrica correspondiente y los valores de los ángulos notables.

a) 0

b) 0

c) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

d) 1

e) $\frac{1}{2}$

f) $-\frac{\sqrt{6}}{8}$

Trabajo independiente

1- Si A=tan150^0; B=cos 210^0; C= sen315^0 y D = cos0^0 entonces $\frac{3A+2B}{D \cdot C}$ es:

1__ $-\frac{12}{\sqrt{6}}$ 2__ $2\sqrt{6}$ 3___- $\frac{2}{\sqrt{6}}$ 4 ___ $-\sqrt{6}$

2-Resuelve las ecuaciones siguientes en el intervalo que se indica

a) senx= 0,5 $90^0 < x < 270^0$

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $90^0 \le x \le 270^0$

c) $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $180^0 \le x \le 360^0$

d) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $0^0 \le x \le 360^0$

Respuestas y/o comentarios

1- 2

2-

a) 150^0 senx en este intervalo solo es positivo en $90^0 < x < 180^0$ por lo que la solución sería un ángulo del segundo cuadrante, por supuesto . el ángulo agudo cuya razón trigonométrica es esa corresponde a 30^0 y aplicando fórmula de reducción nos quedaría 150^0.

b) 135^0
en este inciso pasa lago similar al anterior, solo puede tener solución en el segundo cuadrante , y no es difícil darse cuenta que" tiene que ver" con 45^0, por lo que aplicando fórmula de reducción obtenemos 135^0.

c) 330^0

d) 60^0 y 300^0
En este caso existirán dos ángulos que cumplan con las condiciones del problema , uno estaría situado en el I C y el otro en el IV C , ya que en estos cuadrantes el coseno es positivo

Resolución de ecuaciones sencillas en el intervalo [0^0;360^0]

A continuación vamos a resolver ecuaciones cuyas soluciones pueden ser ángulos agudos y/o obtusos donde tenemos que tener presentes los signos de las razones trigonométricas y las identidades fundamentales estudiadas anteriormente.

1- Resuelve las ecuaciones siguientes en el intervalo $0^0 \leq x \leq 360^0$
a) cos x= 0,5
b) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4}$
c) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\tan x = \frac{3}{\tan x}$
e) $3\operatorname{sen} x = 2 - 2\operatorname{sen}^2 x$
f) $3\operatorname{sen}^2 x + 3\cos x = 0$
g) $\cos^2 x - \frac{1}{2} = \operatorname{sen}^2 x$
h) $\frac{3}{\cos x} - 2 = \cos x$

i) $\tan^2 x + \frac{1}{\cos x} = 1$

2- Demuestra que en un triángulo ABC se cumple:
a) $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\beta+\gamma)$
b) $\cos\alpha = -\cos(\beta+\gamma)$

Respuestas y/o comentarios
1-
a) $x=60^0$ y $x= 300^0$
Recuerda que coseno es positivo en el IC y en el IV C, la solución del primer cuadrante es directa, pero para obtenerla del cuarto cuadrante debemos aplicar fórmula de reducción.

b) 30^0,150^0,210^0 y 330^0

$\operatorname{sen}x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$, esto equivale a $\operatorname{sen}x = \frac{1}{2}$ ó $\operatorname{sen}x = -\frac{1}{2}$
esto quiere decir que podemos encontrar soluciones en todos los cuadrantes.

c) 240^0 y 300^0
Observa que sen x es negativo en los cuadrantes III y IV , pero parav poder aplicar las fórmulas de reducción debes trabajar con un ángulo del primer cuadrante , es decir , un ángulo agudo, ese precisamente sería aquel cuyo seno es $\frac{\sqrt{3}}{2}$, y sería 60^0.

d) 60^0,120^0,240^0 y 300^0
Fíjate que es similar al inciso b)

e) 30^0 y 150^0

f) 120^0 y 240^0

g) 30^0,150^0,210^0 y 330^0

h) 0^0 y 360^0

i) 0^0,120^0,240^0 y 360^0

2- En este problema debes tener que la suma de loa ángulos interiores de cualquier triángulo es 180^0 por lo que si:
$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ entonces $\beta + \gamma = 180^0 - \alpha$

Trabajo independiente:
1- Resuelve las ecuaciones siguientes en el intervalo $0^0 \leq x \leq 360^0$
a) $2\tan x + \sqrt{5} = 0$
b) $3 - 7\cos x = 6\operatorname{sen}^2 x$
c) $12 - 5\operatorname{sen}x = 12\cos^2 x + 2$
d) $\tan^2 x - 3\tan x = 2 - \tan^2 x$
e) $\frac{1 + \operatorname{sen}x}{3\cos x} = \cos x$
f) $\frac{5\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = 2\tan x$
2- Demuestre que en un triángulo ABC se cumple:
a) $\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}(\alpha + 2\beta + \gamma)$
b) $\tan\alpha = -\tan(\beta + \gamma)$

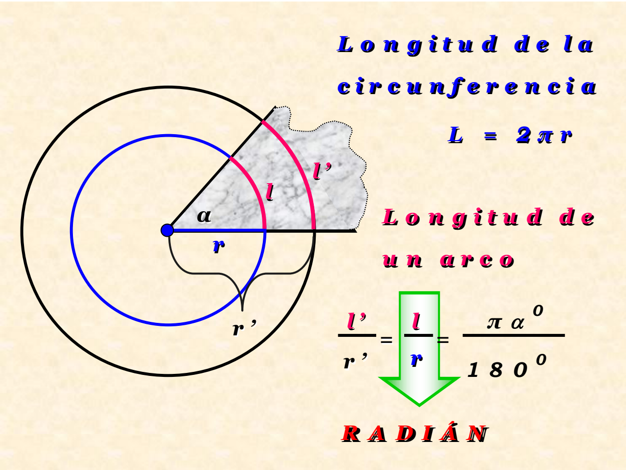
Respuestas y/o comentarios
1-
a)$131,8^0$, $311,8^0$
b) $109,5^0$, $250,8^0$
c) $41,8^0$, $138,2^0$,$194,5^0$,$345,5^0$
d) $63,4^0$, $153,4^0$, $243,4^0$, $333,4^0$
e) $41,8^0$, $138,2^0$

f) 0^0,180^0, $203{,}6^0$, $333{,}4^0$,360^0

Sistema circular de medida de ángulos.

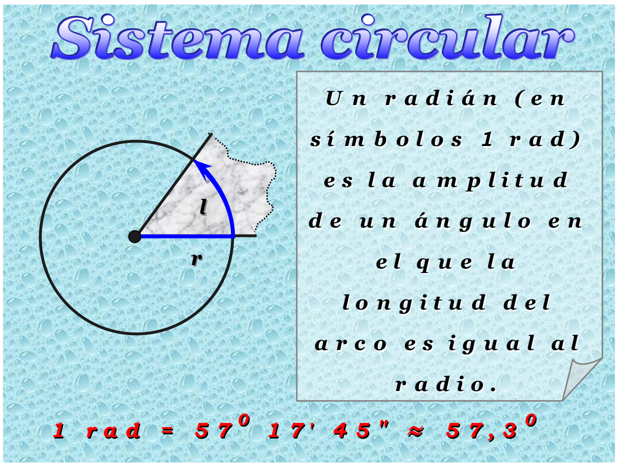
El sistema sexagesimal de medida de ángulos que conoces hasta este momento tiene limitaciones. En matemática se usa con mucha frecuencia otro sistema: el sistema circular. En este sistema se utiliza, para medir el ángulo, la razón entre la longitud del arco de una circunferencia, interceptada por el ángulo y el radio de esta circunferencia. Esta razón puede utilizarse porque es constante para un mismo ángulo, cualquiera sea el radio de la circunferencia empleada.

Como es sabido, la longitud de un arco de circunferencia es proporcional al radio, si denotamos por l la longitud del arco de circunferencia, por α^0 la amplitud del ángulo en el sistema sexagesimal y por r el radio de la circunferencia tendremos :



Debes fijarte que dicha razón depende solamente de la amplitud del ángulo

Por tal motivo a continuación definiremos el radián



Esta definición establece la unidad del sistema circular de medida de ángulo y significa que para calcular la medida de un ángulo en este sistema se calcula la razón entre la longitud del arco y el radio: $\frac{l}{r}$

Veamos dos ejemplos:

Ejemplo1:

Para un ángulo de 36^0 la medida en radianes sería:

$$\frac{l}{r} = \frac{\pi r^0}{180^0} = \frac{\pi \cdot 36^0}{180^0} = \frac{\pi}{5}$$

Ejemplo 2
Para un ángulo de 75^0 sería:
$$\frac{l}{r}=\frac{\pi r^0}{180^0}=\frac{\pi\cdot 75^0}{180^0}=\frac{5\pi}{12}$$

Si denotamos por α_{rad} la amplitud del ángulo en el sistema circular tendremos entonces que: $\alpha_{rad}=\frac{\pi}{5}$ y $\alpha_{rad}=\frac{5\pi}{12}$ respectivamente.

Loa razonamientos anteriores pueden ser utilizados para convertir la medida de los ángulos de un sistema a otro; si denotamos por α_{rad} la medida en el sistema circular del ángulo α y por α^0 a su medida sexagesimal tendremos entonces que :

$$\boxed{\pi_{rad}=\frac{\pi\cdot\alpha^0}{180^0}\qquad \pi^0=\frac{\alpha_{rad}\cdot 180^0}{\alpha}}$$

1- Calcula la medida en el sistema circulara de:
a) un ángulo llano
b) un ángulo de 20^0

R/
a) 180^0
luego podemos concluir que cualquiera sea el radio tendremos:

$$\frac{l}{r}=\frac{\pi\cdot 180^0}{180^0}=\pi$$
$\therefore$La medida de un ángulo llano es π

b) $\frac{\pi}{9}$
2- Expresa en el sistema sexagesimal:
a) $\frac{\pi}{6}$
b) 4,57

R/
a) 30^0
b) 262^0 (aunque 4,57 puede considerarse como un valor exacto, la respuesta debe tener 3 lugares pues se utiliza una aproximación para π (3,14) con 3 lugares.
En la práctica es conveniente recordar de memoria la tabla de conversión para las medidas de los ángulos notables por la continua utilización que hacemos de estos.

3- Completa la siguiente tabla:

grad	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
rad								

Trabajo independiente:

1- Expresa en radianes las cantidades de amplitud siguientes dadas en grados sexagesimales.

a) 15^0
b) 315^0
c) 42^0
d)300^0
e) 210^0
f) $70^0,15'$

2- Determina la medida en grados sexagesimales de los siguiente ángulos expresados en radianes:

a) $\frac{5\pi}{4}$
b) $\frac{11\pi}{6}$
c) $\frac{5\pi}{12}$
d) 3,76
e) 1,16

3- Si un arco de circunferencia mide $\frac{2}{3}$ del radio,¿cuál es la medida de su ángulo central correspondiente.

Respuestas y/o comentarios

1-

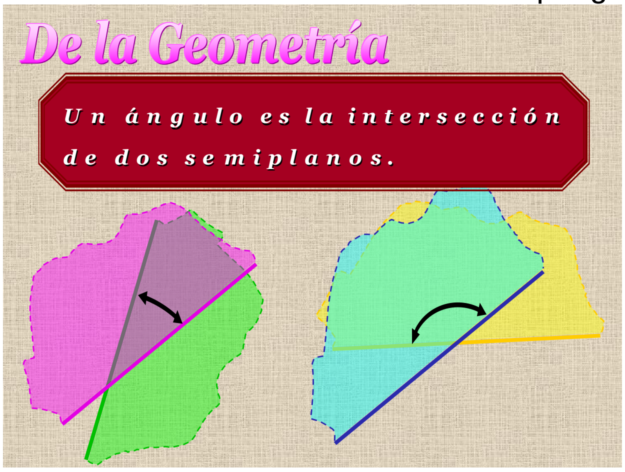
a) $\frac{\pi}{12}$
b) $\frac{7\pi}{4}$
c) $\frac{7\pi}{30}$
d) $\frac{5\pi}{3}$
e) $\frac{7\pi}{6}$
f) 1,23

2-

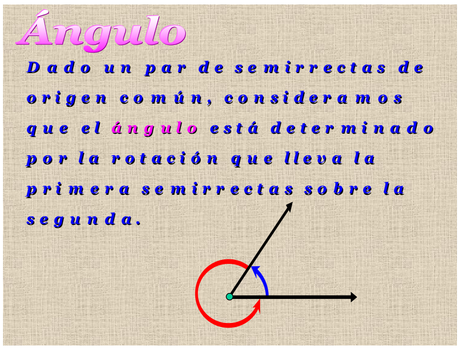
a) 225^0
b) 330^0
c) 75^0
d)216^0
e) $66,5^0$

Generalización del concepto de ángulo

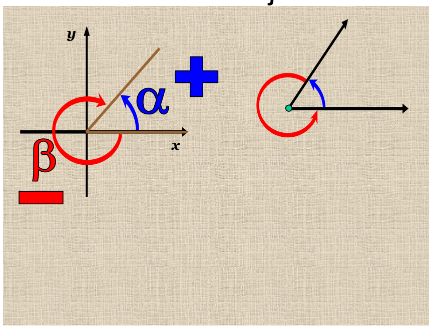
Hasta ahora hemos utilizado el concepto geométrico ángulo



Con este concepto las medidas de los ángulos tienen todas el mismo signo y toman valores entre 0^0 y 360^0 (0 y 2π). Este concepto es suficiente para resolver todos los problemas que se plantean en la geometría; sin embargo , en la práctica se necesita trabajar con las razones trigonométricas de valores mayores o que son números negativos



En nuestro caso consideraremos ángulos con vértices en el origen de coordenadas y el lado inicial será el semieje positivo de las x; en estas condiciones cada semirrecta puede ser resultado de dos rotaciones; una en sentido contrario a las manecillas del reloj y la otra en el sentido de las manecillas del reloj.



En la figura de la izquierda la semirrecta ha determinado dos ángulos , uno que le llamaremos α y otro que le llamaremos β.
En el caso de α la rotación es contraria a las manecillas del reloj y β es a favor del movimiento de las manecillas

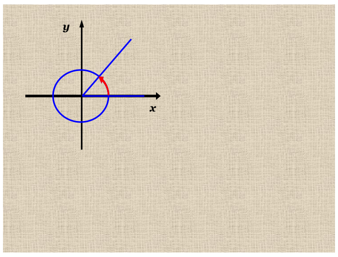
Cuando el ángulo es obtenido por una rotación de sentido contrario a las manecillas del reloj lo consideramos positivo y al determinado por una del mismo sentido que las manecillas del reloj lo consideraremos negativo

Veamos lo siguiente:

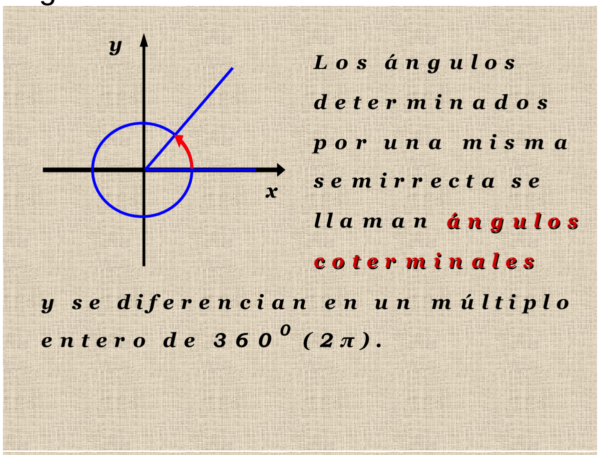
Imaginemos que hemos construido un ángulo agudo $\alpha=30^0$ al trazar una semirrecta, pero seguidamente rotamos esta semirrecta 360^0 llegando a la misma posición en que estaba originalmente

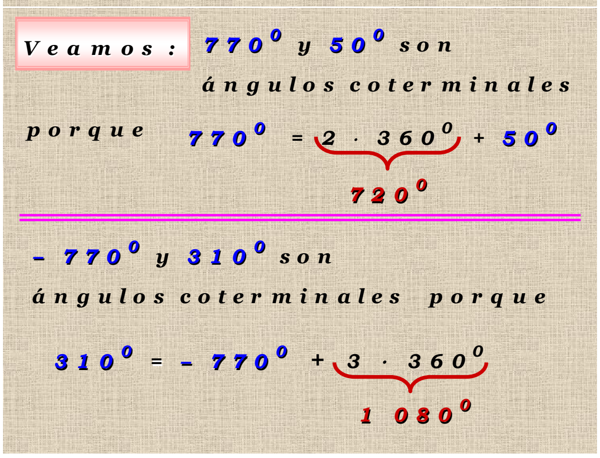
¿Qué ha pasado?

Hemos construido un nuevo ángulo (390^0) sin embargo “aparentemente” no hay diferencia con el de 30^0, estos dos ángulos difieren en 360^0. Esta rotación, donde la semirrecta puede llegar a su posición final se puede realizar infinitamente.



Por todo lo anterior la misma semirrecta determina infinitos ángulos positivos y negativos





Ejercicio 1:

Determina para cada uno de los siguientes ángulos,un ángulo coterminal entre 0^0 y 360^0 ó entre 0 y 2π.

a) 1938^0

b) $\frac{17\pi}{5}$

c) -560^0

R/

a) 138^0

Debes darte cuenta que 1938=5.360 +138 luego el único ángulo que satisface es 138^0 pues $1938=5.360^0$

Lo que hicimos fue dividir 1938 entre 360 y el resto sería el ángulo que estamos buscando.

b) $\frac{7\pi}{5}$

El múltiplo de 2π más próximo es el propio 2π, luego

$$\frac{17\pi}{5} - 2\pi = \frac{7\pi}{5}$$

c) 160^0

Para obtener un ángulo que satisfaga esas condiciones debemos sumar el primer múltiplo de 360^0 que exceda a 560^0 (que es el módulo del valor dado).

En las clases anteriores hemos visto que las razones trigonométricas de un ángulo dependen solamente de las coordenadas de un punto situado en el lado terminal. Esto significa que se pueden calcular las razones trigonométricas de ángulos cualesquiera utilizando las definiciones conocidas.

En la práctica procedemos como se indica a continuación:

Para calcular las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera, buscamos un ángulo del intervalo fundamental $[0^0;360^0]$ ó $[0;2\pi]$ que sea coterminal con él y calculamos sus razones trigonométricas.

Ejercicio 2:

Calcula las razones trigonométricas de:

a) -45^0

b) $\frac{8\pi}{3}$

c) $793,5^0$

d) 13,62

R/

a) $\operatorname{sen} -45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos -45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \tan -45^0 = -1$

$$\operatorname{sen}(-45^0) = \operatorname{sen}(-45^0 + 360^0) = \operatorname{sen}(360^0 - 45^0) = -\operatorname{sen} 45^0$$

$$\cos(-45^0) = \cos(-45^0 + 360^0) = \cos(360^0 - 45^0) = \cos 45^0$$

$$\tan(-45^0) = \tan(-45^0 + 360^0) = \text{y} \tan(360^0 - 45^0) = -\tan 45^0$$

b)

$\operatorname{sen}\frac{8\pi}{3} = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ya que $\frac{8\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3}$ son coterminales

$$\cos\frac{8\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{8\pi}{3} = \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

c)
sen $793,5^0$ = sen$73,5^0$ = 0,9588 date cuenta que 793.5=2.360+73,5
cos $793,5^0$ = cos$73,5^0$ = 0,2840
tan $793,5^0$ = tan$73,5^0$ = 3.3759

d) El valor dado se encuentra en el sistema circular, para buscar un ángulo del intervalo fundamental le restamos el múltiplo más próximo de 2π (6,28) . Para encontrarlo dividimos 6,28 =2,…… la parte entera e 2. entonces 13,48 - 2.6,28=0.92y para calcular las razones trigonométricas lo expresamos en el sistema sexagesimal y buscamos entonces

$$\operatorname{sen} 0{,}92 = \operatorname{sen}\left(\frac{180^0}{\pi} \cdot 0{,}92\right)^0 = \operatorname{sen} 52{,}7^0 = 0{,}796$$

análogamente cos0,92=0,606 y tan0,92=tan$52,7^0$=1.31

Trabajo independiente

1- Considera el origen de coordenadas como vértice de los ángulos cuyas amplitudes son las siguientes:45^0,135^0,710^0., -315^0.-430^0

2- Representa gráficamente los ángulos generados en cada uno de los conjuntos siguientes, para K=0,$\pm$1;$\pm$2

Generalización del concepto de ángulo. Ejercicios

De todo el trabajo que realizamos anteriormente clase incluyendo los ejercicios del trabajo independiente podemos resumir lo siguiente:

Sen(x+k.360^0)= senx cos(x+k.360^0)= cosx tan(x+k.180^0)= tanx	Sen(x+k.2π)= senx cos(x+k.2π)= cosx tan(x+k.π)= tanx

Observa que en el caso de la tangente, debido a la fórmula de reducción,,Los valores se repiten cada media vuelta.

Por otra parte estamos en condiciones de conocer el siguiente teorema

Teorema:
Para todo ángulo α se cumple:
Sen(-α)=-senα
cos(-α)=cosα
Sen(-α)=-tanα

La demostración de este teorema es similar al ejercicio 2a) de la clase anterior.
Es significativo destacar que este teorema 1 reduce el cálculo de las razones trigonométricas al caso de ángulos positivos pues, aunque han sido demostradas para ángulos del intervalo fundamental, las fórmulas de reducción son válidas para ángulos cualesquiera.
Por ejemplo:
Calcula sen(-987^0)
Según lo visto anteriormente podemos escribir que sen(-987^0)= - sen(987^0)=
= -sen(267^0)= 0,999

Por otra parte , al retomar la resolución de ecuaciones entonces debemos darnos cuenta que el conjunto solución de una ecuación es infinito como se muestra en el siguiente ejemplo:
Resolver senx=1
En el intervalo principal ó fundamental (como quieran llamarlo) se tiene una única solución $x=90^0$ ó $x=\frac{\pi}{2}$. Cada vez que se suma al ángulo 360^0 ó 2π se obtiene un ángulo coterminal y el valor del seno se repite; resultan entonces las igualdades $sen(90^0+k.360^0) = sen90^0=1$ ó $sen(\frac{\pi}{2}+k2\pi) = sen\frac{\pi}{2}=1$ y entonces el conjunto solución es:

$\{ 90^0+k.360^0, k\in\Re\}$ ó $\{ \frac{\pi}{2}+k.2\pi, k\in\Re\}$

En el conjunto solución hay que incluir todos los ángulos coterminales con las soluciones del intervalo fundamental.
A continuación te proponemos los siguientes ejercicios para que apliques todo lo estudiado.
1-Determina para cada uno de los siguientes ángulos un ángulo coterminal en el intervalo $[0^0; 360^0]$ ó [o;2π]
a) 4380^0
b)3675^0
c)-1573^0
d)-157^0
e) 22π
f)-17π

2- Determina para cada uno de los siguientes ángulos la razón trigonométrica que se indica
a) $x= -1235^0$ cosx
b) $x= 5390^0$ tanx
c) $x= -\frac{16\pi}{5}$ senx
d) x= 0,85 senx

Respuestas y/o comentarios
1-
a) 60^0
b) 75^0
c) 227^0
d) 203^0
e) 0
f) π

2-
a) -0,9063
b) -0,1763
c) 0,588
d) 0,751

Definición de las funciones trigonométricas. La función Seno.

En estudios anteriores trabajaste con el concepto de función.
Debes recordar que había una correspondencia biunívoca de un conjunto A en otro B donde a cada elemento de A le correspondía un único elemento de B
Además trabajaste con la siguiente definición de **función**

Una función f: X → Y es un conjunto de pares ordenados tal que cada $x \in X$ aparece como la primera coordenada de solo un par ordenado.

•¿Será el conjunto $f = \{(x;y) \mid y = \text{sen } x \text{ , } x \in \Re\}$ una función?
Es evidente que cada número real representa la medida en radianes de un ángulo, esto significa que al número real se pueden hacer corresponder las razones trigonométricas de ese ángulo, por lo que podemos afirmar que esa correspondencia es una función

Definición:

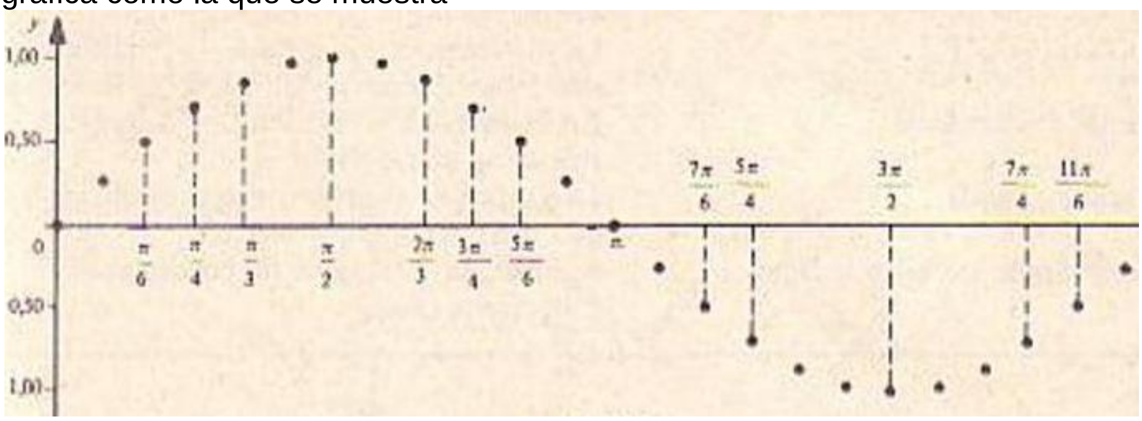
Se llama **función seno** a la función que a cada número real x le asocia senx.

Es decir , la función está formada por los pares ordenados (x ; senx) con $x \in \Re$
Y como puede ser cualquier x entonces tiene como dominio al conjunto de los números reales.
Debes recordar que $|\text{senx}| \leq 1$ luego la función **no puede tomar valores** fuera del intervalo [-1:1]

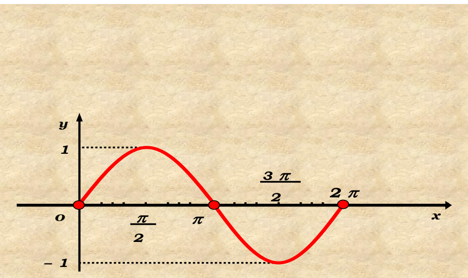
Como la función seno satisface sen(x+k2)=senx, $k \in \Re$ basta representarla en un intervalo de longitud 2π (ya que se repiten sus valores nuevamente.
Para hacerlo en el intervalo $(0;2\pi)$ calculemos algunos valores y lo representemos en una tabla como la siguiente:

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$
senx	0	0,26	0,5	0,71	0,87	0,97	1,0	0,97	0,87	0,71	0,5	0,26
x	π	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{12}$
senx	0	-,26	-,5	-,71	-,87	-.97	-1	-,97	-,87	-,71	-,5	-,26

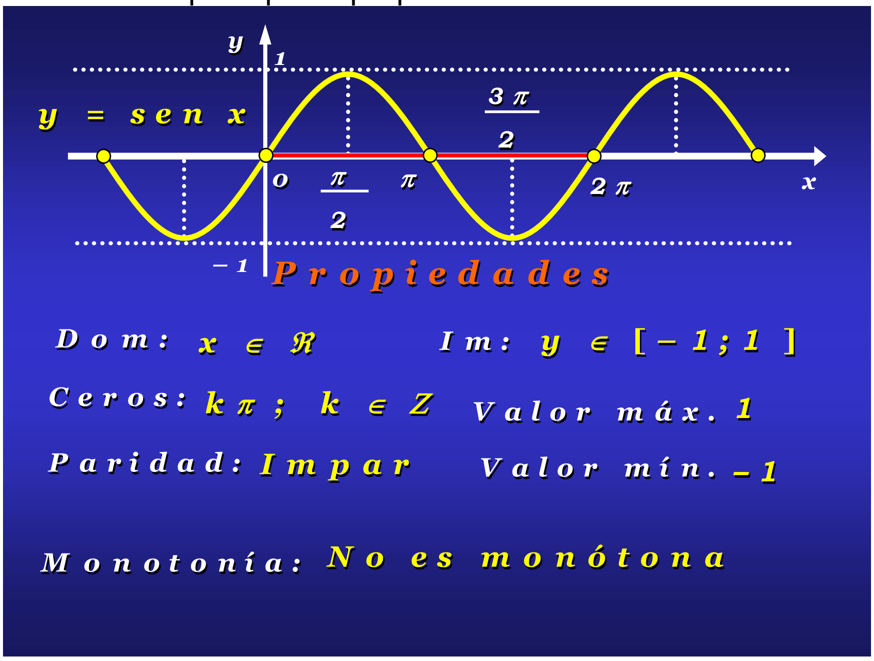
Al representar estos valores en un sistema de coordenadas se obtiene una gráfica como la que se muestra



Si aumentamos el número de puntos se obtiene una idea más aproximada de la gráfica de la función seno.



Esto es en sí la representación de la función seno en el intervalo de amplitud principal.
Veamos sus principales propiedades



Fíjate que su gráfica es una oscilación que se mantiene acotada entre -1 y 1.
La gráfica corta al eje x en $0, \pi, 2\pi, 3\pi$, 4π ………$k\pi$, es por eso que en lugar de **ceros aparece compactado en $k\pi$.**
Si recuerdas la definición de función impar $f(-x) = - f(x)$ y su interpretación geométrica(la gráfica era simétrica respecto al origen) entonces puedes comprender que $f(x) = \text{sen}x$ es Impar

Con respecto a la monotonía , al observar la gráfica , puedes darte cuenta que aunque no es monótona, en cada intervalo se alternan los intervalos de monotonía

Hemos dejado para último momento lo referente a período principal , como sabemos , todos los ángulos coterminales con uno dado tienen el mismo seno $\text{Sen}(\alpha+k2\pi)=\text{sen}\alpha$, $k\in\Re$. Esta igualdad representa una propiedad de la función seno que es un caso particular de una propiedad general

Definición:

Una función real f es periódica si existe un número real T, tal que para todo elemento x del dominio de la función se cumple que $f(x)= f(x+T)$ .El número T recibe el nombre de período de la función.

Después de esto se puede afirmar que la función seno es periódica, cualquier múltiplo de 2π es un período de la función seno.
En la gráfica puede observarse la periodicidad porque puede obtenerse "repitiendo" indefinidamente la gráfica de cualquier intervalo de longitud 2π.
Estos hechos permiten entender mucho mejor por qué las ecuaciones trigonométricas tiene infinitas soluciones.

Trabajo Independiente

1- ¿Cuáles de los siguientes números pueden ser valores de la función seno?
a) 0,5
b) 3
c) $\sqrt{2}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) -1
f) -1,5
g) $-\frac{1}{2}$

2- Analiza la monotonía de la función seno en el intervalo dado:
a) $\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$
b) $\left[\frac{7\pi}{6};2\pi\right]$

Definición de la función coseno, representación geométrica y propiedades.

Anteriormente conociste la función seno, nuevamente trabajaste con el concepto de función y recordaste que había una correspondencia biunívoca de un conjunto A en otro B donde a cada elemento de A le correspondía un único elemento de B, en otras palabras:
Una función f: $X \rightarrow Y$ es un conjunto de pares ordenados tal que cada $x \in X$ aparece como la primera coordenada de solo un par ordenado.
Al igual que se analizó con la correspondencia en el caso de la función de seno
•¿Será el conjunto f = $\{(x;y) \mid y = \cos x,\ x \in \Re\}$ una función?
Es evidente que cada número real representa la medida en radianes de un ángulo, esto significa que al número real se pueden hacer corresponder las razones trigonométricas de ese ángulo, por lo que podemos afirmar que esa correspondencia es una función

Definición:

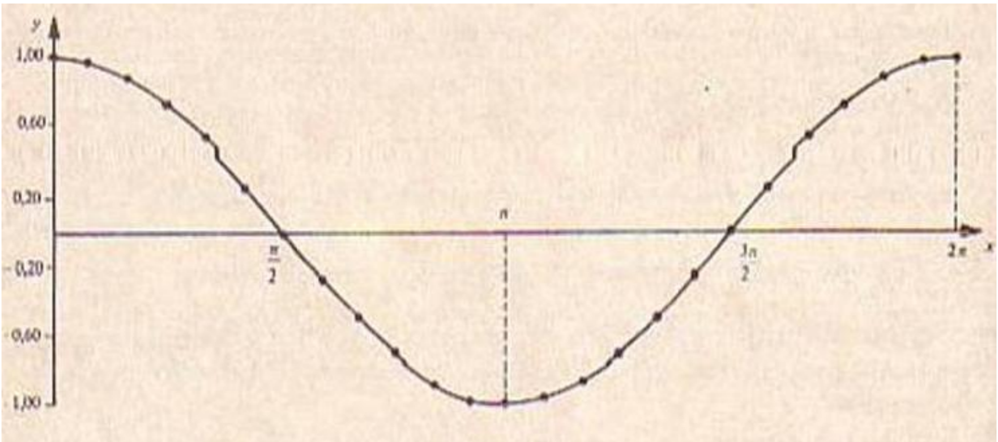
Se llama **función coseno** la función que a cada número real x le asocia cosx

Es decir , la función está formada por los pares ordenados (x ; cosx) con $x \in \Re$
Y como puede ser cualquier x entonces tiene como dominio al conjunto de los números reales.
Debes recordar que $|\cos x| \leq 1$ luego la función **no puede tomar valores** fuera del intervalo [-1:1]

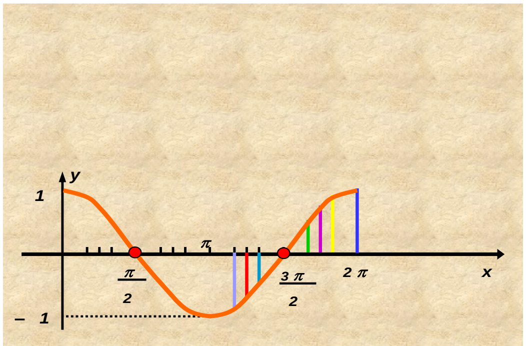
Como la función coseno satisface cos(x+k2)=cosx, $k \in \Re$ basta representarla en un intervalo de longitud 2π (ya que se repiten sus valores nuevamente.
Para hacerlo en el intervalo $(0;2\pi)$ calculemos algunos valores y lo representemos en una tabla como la siguiente:

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$
cosx	1	0,97	0,87	0,71	0,5	0,26	0	-,26	-0,5	-,71	0,5	-,97
x	π	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{12}$
cosx	-1	-,9,7	-,8,7	-,71	-,5	-.2,6	0	0,26	0,5	0,71	0,87	0,97

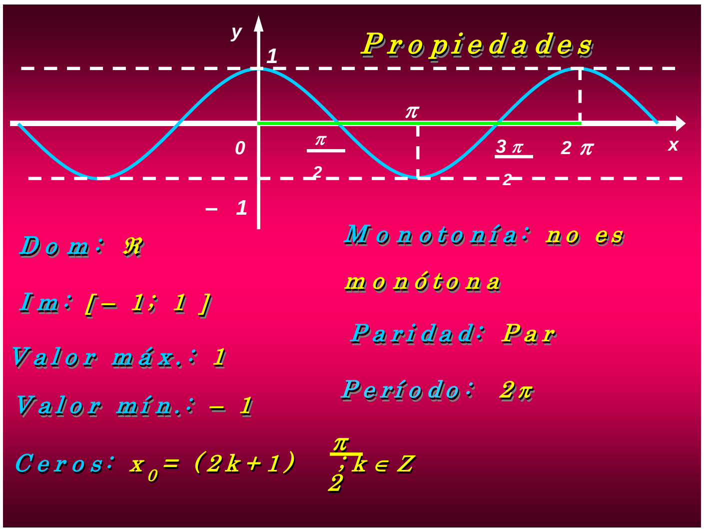
Al representar estos valores en un sistema de coordenadas se obtiene una gráfica como la que se muestra



Si aumentamos el número de puntos se obtiene una idea más aproximada de la gráfica de la función coseno.



Esto es en sí la representación de la función coseno el intervalo de amplitud principal.
Veamos sus principales propiedades



Fíjate que su gráfica es una oscilación que se mantiene acotada entre -1 y 1.

La gráfica corta al eje x en $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ ....(2k+1)$\frac{\pi}{2}$ es por eso que en lugar de **ceros aparece compactado en (2k+1)**$\frac{\pi}{2}$

Si recuerdas la definición de función par f(-x) = f(x) y su interpretación geométrica (la gráfica era simétrica respecto al eje "y") entonces puedes comprender que f(x) = cosx es par.

Con respecto a la monotonía , al observar la gráfica , puedes darte cuenta que aunque no es monótona, en cada intervalo se alternan los intervalos de monotonía

Similarmente a lo que sucedía con la función seno en el caso del período principal , como sabemos , todos los ángulos coterminales con uno dado tienen el mismo coseno

$\cos(\alpha+k2\pi)=\cos\alpha$, $k \in \Re$. Esta igualdad representa una propiedad de la función coseno afirmándose que la función coseno es periódica, cualquier múltiplo de 2π es un período de la función coseno.

En la gráfica puede observarse la periodicidad porque puede obtenerse "repitiendo" indefinidamente la gráfica de cualquier intervalo de longitud 2π.

Estos hechos permiten entender mucho mejor por qué las ecuaciones trigonométricas tienen infinitas soluciones.

Trabajo Independiente

1- ¿Cuáles de los siguientes números pueden ser valores de la función coseno?

a) 0,5

b) 3

c) $\sqrt{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) -1

f) -1,5

g) $-\frac{1}{2}$

2- Analiza la monotonía de la función coseno en el intervalo dado:

a) $\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$

b) $\left[\frac{7\pi}{6};2\pi\right]$

Definición de la función tangente, representación geométrica y propiedades.

•¿Será el conjunto f = $\{(x;y)$ | y = tanx , x$\in\Re\}$ una función?

Es evidente que cada número real representa la medida en radianes de un ángulo, esto significa que al número real se pueden hacer corresponder las razones trigonométricas de ese ángulo, por lo que podemos afirmar que esa correspondencia es una función

Definición:

Se llama **función tangente** la función que a cada número real x le asocia tanx

Es decir , la función está formada por los pares ordenados (x ; tanx) con x$\in\Re$

Sin embargo tanx no está definida en todo $\Re$ ya que los valores de x que anulan cosx indefinen el cociente. Por esta razón el dominio no será todo $\Re$, ella no estaría definida en los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$.

Por otra parte para la función tangente se cumple que tan($\alpha+\pi$)= tanα, por lo que basta representarla en un intervalo de longitud π.

Para una mejor compresión, al no estar definida en los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$ escogeremos el intervalo $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ con el objetivo de que esté definida en todos los puntos.

Como la función coseno satisface cos(x+k2)=cosx, k$\in\Re$ basta representarla en un intervalo de longitud 2π (ya que se repiten sus valores nuevamente.

Para hacerlo en el intervalo (0;2π) calculemos algunos valores y lo representemos en una tabla como la siguiente:

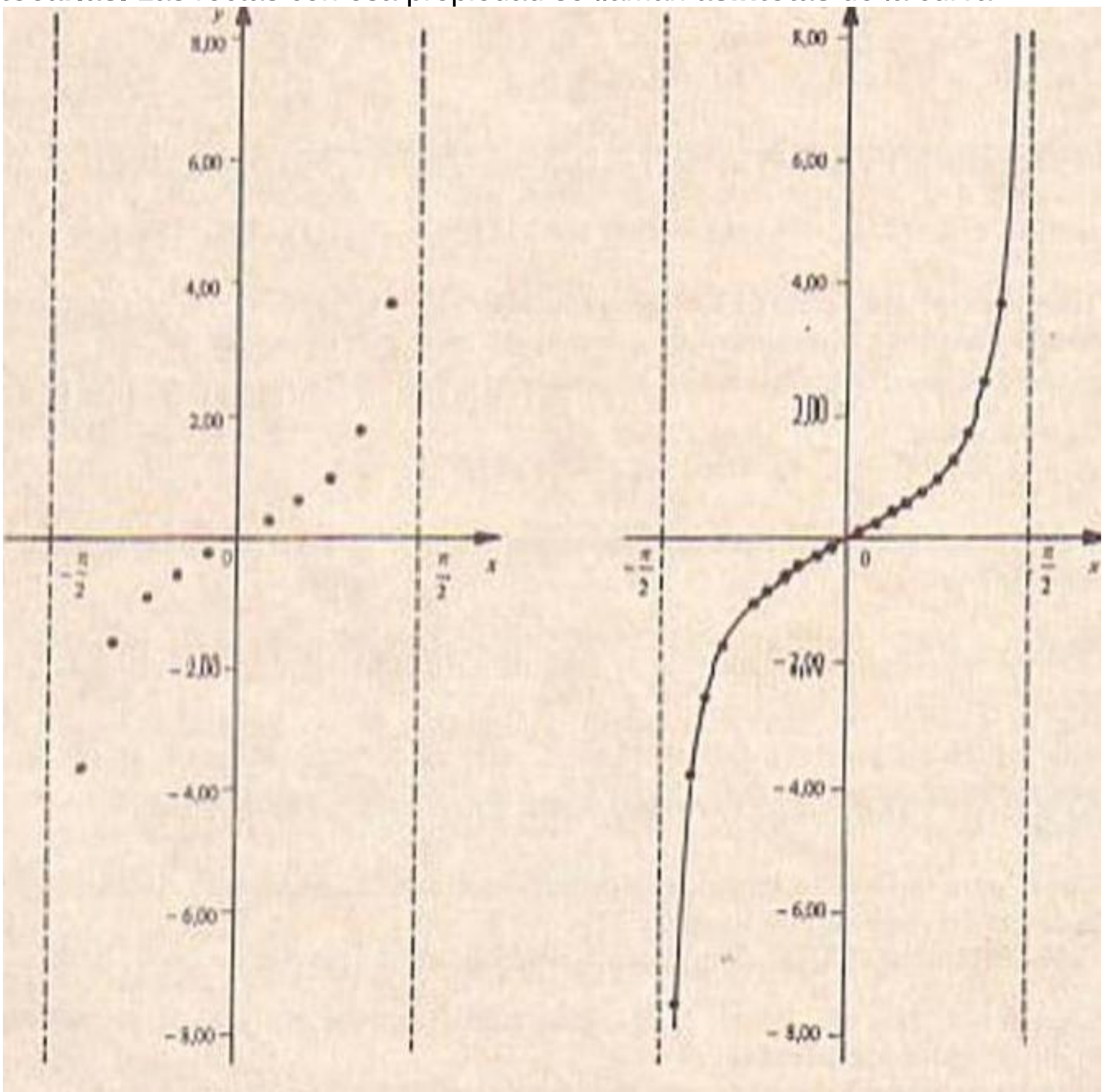
x	$-\frac{5\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{12}$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$
tanx	-3,7	-1,7	-1	-5,8	-2,7	0	0,27	0,58	1	1,7	3,7

Al representar estos valores en un sistema de coordenadas se obtiene una gráfica como la que se muestra, aunque si aumentamos el número de puntos se obtiene una idea más aproximada de la gráfica de la función tangente.

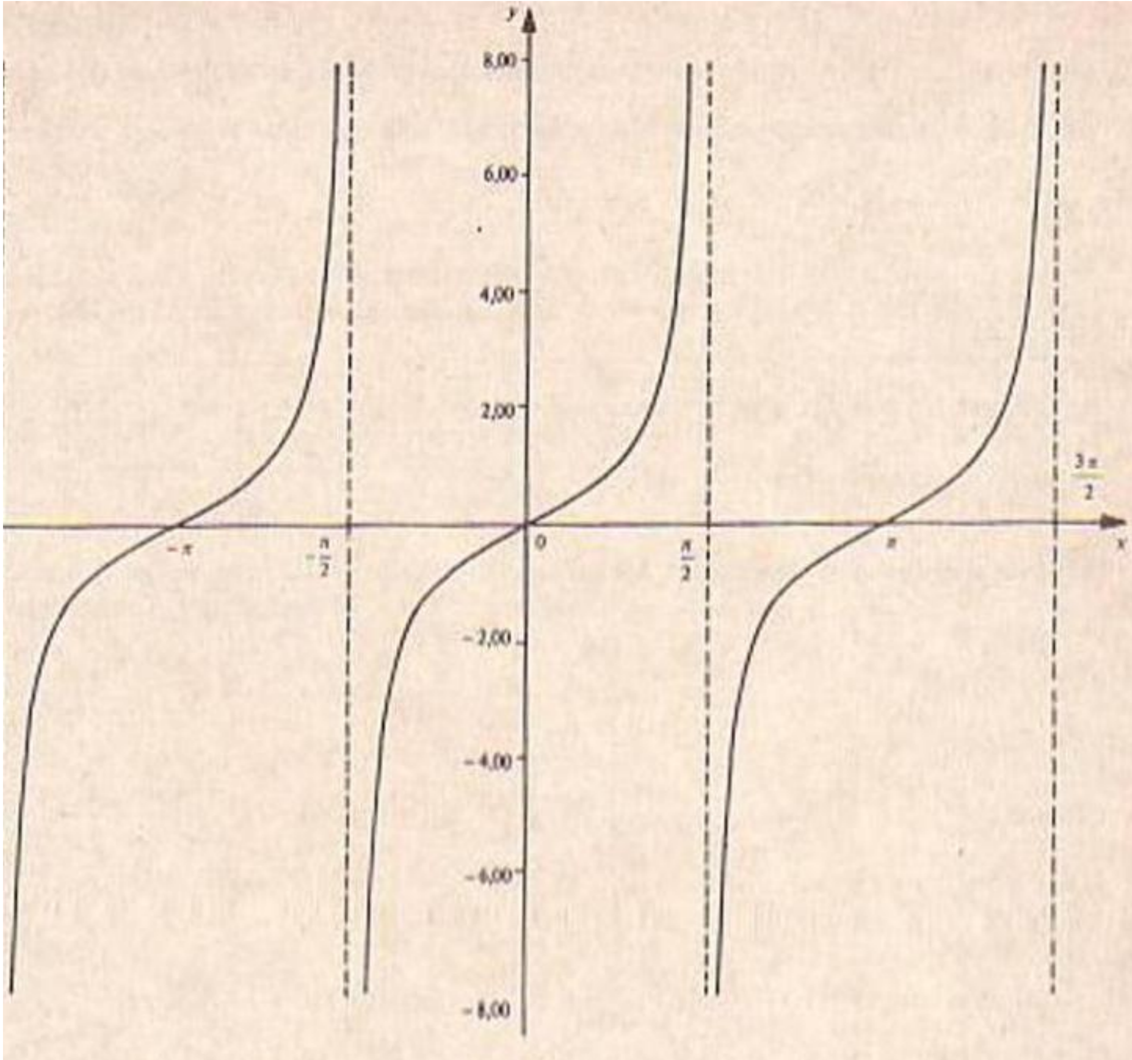
Sin embargo en este caso aparece una dificultad que no la tuvimos anteriormente:

determinar como es la gráfica para valores próximos a $\frac{\pi}{2}$ y a $-\frac{\pi}{2}$.

En estudios posteriores vas a estar en condiciones de demostrar que la gráfica es una curva que contiene todos los puntos , y se aproxima a las rectas perpendiculares al eje “x” en $\frac{\pi}{2}$ y en $-\frac{\pi}{2}$ **indefinidamente sin llegar a tocarlas.** Las rectas con esa propiedad se llaman **asíntotas** de la curva.



La gráfica de la función en todo $\Re$, se obtiene trasladando la gráfica obtenida en ambos sentidos indefinidamente



De esta gráfica se pueden obtener algunas propiedades de esta función:

Dominio $\Re \backslash\ (2k+1)\frac{\pi}{2}$;k$\in$ Z,……	La tangente no está definida en los puntos que excluimos
Imagen: $\Re$………………………	La proyección cubre el eje "y"
Ceros: kπ, k$\in$Z………………….	En esos puntos la gráfica corta al eje "x"
Valor máximo : no tiene ………	Toma todos los valores reales
Valor mínimo: no tiene ……….	Toma todos los valores reales
Paridad: impar …………………	La gráfica es simétrica respecto al orígen
Período: kπ, k$\in$Z ……………..	tan(α+kπ)=tanα

Es interesante darse cuenta que en cada intervalo que no contiene múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$ la función es creciente; sin embargo, la tangente **no es monótona** porque al pasar de uno de esos intervalos a otro no crece. Veamoss un ejemplo:

$\frac{\pi}{3} < \pi$ pero $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} > 0 = \tan\pi$

Trabajo Independiente

1- Calcula los valores que se indican

a) tan $\frac{\pi}{4}$

b) tan $\frac{5\pi}{4}$

c) tan7

2- Resuelva las ecuaciones:

a) tanx= $\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) tanx=-6

c) tanx=0,0524

Respuestas y/o comentarios

a) 1 ($\frac{\pi}{4}$ es un ángulo notable)

b) tan $\frac{5\pi}{4}$ = tan $\frac{\pi}{4}$ =1

c) tan7=tan(2.3,14+0,72) =tan$\left(0{,}72.\frac{180}{\pi}\right)^0$=tan41,$3^0$=0,877

2-

a) $\{\frac{\pi}{6}+k\pi;k\in Z\}$

Definición de la función Cotangente, representación geométrica y propiedades.

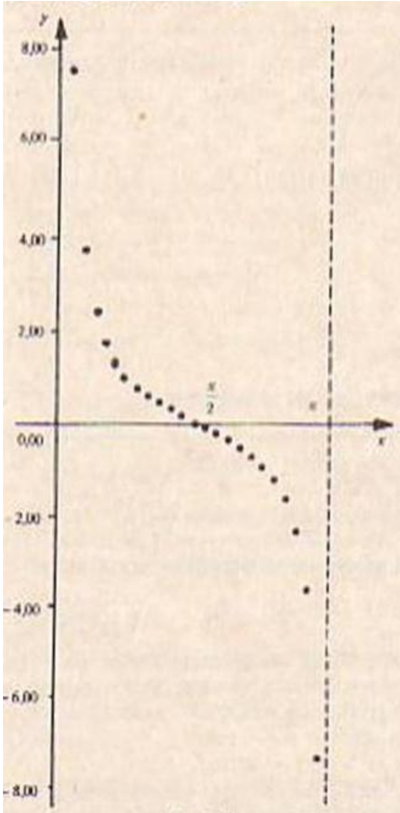
Muchas veces se usa la función definida por la igualdad cotx = $\frac{1}{\tan x}$ para valores de x tales que tanx≠0.

A continuación vamos a representar gráficamente y analizar sus propiedades análogamente a lo que hicimos con la función tangente.

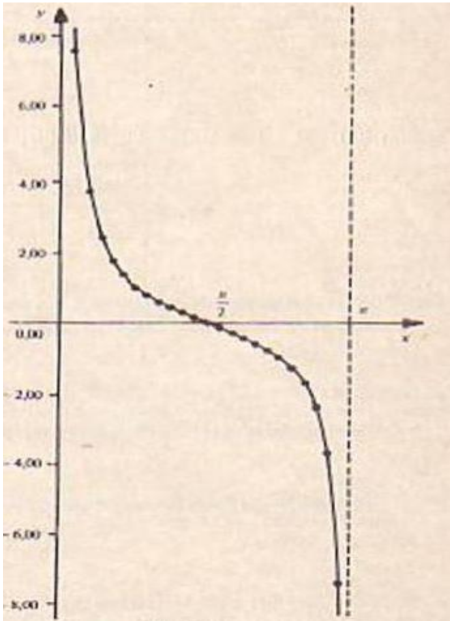
Como tanx tiene período π, basta representarla en un intervalo de longitud π y como tanx = 0 (la función cotx no está definida en 0) escogemos el intervalo (0;π).

x	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$
cotx	3,7	1,7	1	0,58	0,27	0	-,28	-,58	-1	-1,7	-3,7

Al representar en un sistema de coordenadas los pares contenidos en la tabla anterior es evidente que obtenemos una gráfica como la siguiente:

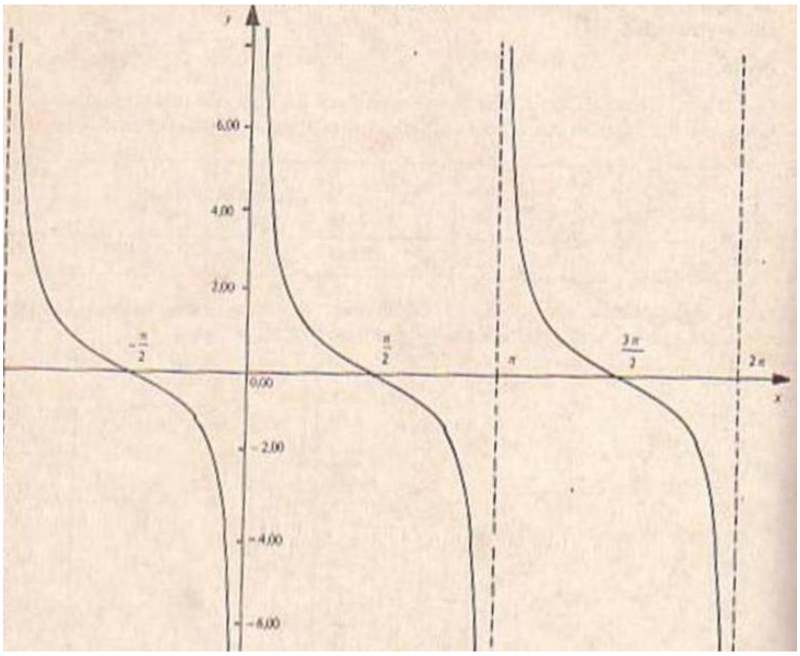


Ya todos conocemos que la gráfica de la tangente es una curva, por la misma razón la gráfica de la nueva curva debe ser una curva que contenga los puntos encontrados, es decir



Debes fijarte que , por analogía con lo visto en el estudio de la función tangente las rectas x=0 y x=π son asíntotas.

Ahora bien , bastaría trasladar la gráfica obtenida en ambos sentidos para obtener una aproximación mucha más completa.



A continuación definiremos esta nueva función
Definición:

Se llama **función cotangente** la función que a cada número real x le asocia cotx

Es decir , la función está formada por los pares ordenados (x ;cotx) con $x \in \Re$
Debemos tener muy en cuenta que cotx no está definida en todo $\Re$ ya que los valores de x que anulan senx indefinen el cociente. Por esta razón el dominio no será todo $\Re$, ella no estaría definida en $k\pi$.
A continuación , tal y como hemos hecho con las funciones anteriores haremos un resumen de sus propiedades:

De esta gráfica se pueden obtener algunas propiedades de esta función:

Dominio $\Re \setminus \{ k\pi \}$……………….. En los puntos excluidos tanx=0
Imagen: $\Re$……………………… La proyección cubre el eje “y”
Ceros: $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $k \in Z$…………… En esos puntos la gráfica corta al eje “x”
Valor máximo : no tiene ……… Toma todos los valores reales
Valor mínimo: no tiene ………. Toma todos los valores reales
Paridad: impar ………………… La gráfica es simétrica respecto al origen
Período: $k\pi$, $k \in Z$ …………….. $\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$
Monotonía: decreciente (en cada intervalo que no contiene puntos de indefinición)

A continuación te proponemos los siguientes ejercicios:
1- ¿Posee la función f(x) = cotx ceros en los intervalos siguientes:
a) $-\pi \le x \le 2\pi$
b) $0 \le x \le \frac{5\pi}{3}$
c) $\frac{5\pi}{3} \le x \le \frac{11\pi}{6}$
2- Determine el signo de la función f(x) = Cotx en los siguientes intervalos
a) $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{3\pi}{4}$

b) $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$

Respuestas y/o comentarios

1-

a) sí, $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$

b) sí, π

c) no

2-

a) positivo para $\frac{\pi}{3} \leq x < \pi$ negativo para $\pi < x < \frac{3\pi}{4}$

b) negativo para $-\frac{\pi}{6} \leq x < 0 < \pi$ ó $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

positivo para $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ ó $\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$

Trabajo independiente

1-Representa gráficamente la función f(x) = cotx en los intervalos siguientes:

a) $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$

b) $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}$

2- Representa gráficamente la función f(x) = 2 senx

Oscilaciones armónicas

Numerosos fenómenos físicos se pueden describir mediante ecuaciones de la forma:

$y=a\text{sen}(\omega t+\varphi)$ $y = a\cos(\omega t+\varphi)$

Estas son las **ecuaciones de las oscilaciones armónicas** que no es nuestro objetivo estudiarlas físicamente , solamente queremos que observes que estos fenómenos físicos son descriptos mediante ecuaciones que al parecer te resultan familiares y que en este encuentro profundizaremos matemática en ellas.

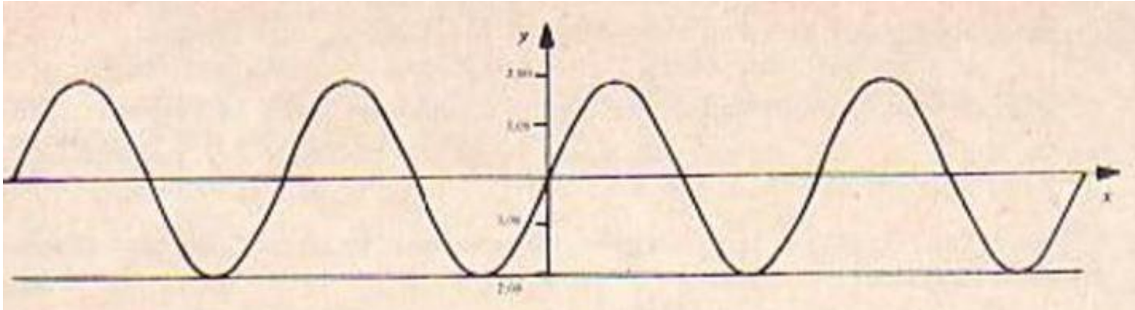
La representaciones gráficas de estas funciones definidas por ellas son **sinusoides** y para trazarlas y analizarlas se utilizan las propiedades de las funciones trigonométricas estudiadas.

En el trabajo independiente del pasado encuentro se había propuesto la representación gráfica de y=2senx, vamos a retomar ese problema:

y=2senx

¿qué representa el factor 2?

-sabemos que el factor 2 representa una dilatación en el sentido del eje “y”, es decir , la gráfica de la función se obtiene duplicando las ordenadas de la función seno



¿cuáles serían las propiedades que podemos obtener de esta gráfica?
Es evidente que su dominio es $\Re$
Al dilatarse entonces la oscilación alcanza los valores -2 y 2, es decir el valos máximo es 2 y el valos mínimo es -2, por tal motivo tendremos:
Imagen: [-2;2]
Con respecto a la función y=senx los puntos de corte con respecto al eje “x” se mantienen por lo que podemos concluir que:
Ceros:$x=k\pi,\ k\in Z$
¿cuál sería su período?
En este caso no varía con respecto a la función y=senx por lo que se mantiene $k2\pi$.
Ahora bien , retomando los valores extremales de la oscilación,
¿Para qué valores de x alcanzará estos valores?
Veamos:
Un simple análisis nos conlleva a observar que el valor 2 se alcanza para x= $\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2};\frac{9\pi}{2};\frac{13\pi}{2}$........

Esto se resumiría en $(4k+1)\frac{\pi}{2}$, es decir , esto serían los puntos donde la función alcanza el máximo valor

Un análisis similar nos conlleva a que los puntos de mínimo serían $(4k+3)\frac{\pi}{2}$

Como análisis propuesto dejamos el estudio del signo de la función y del crecimiento.

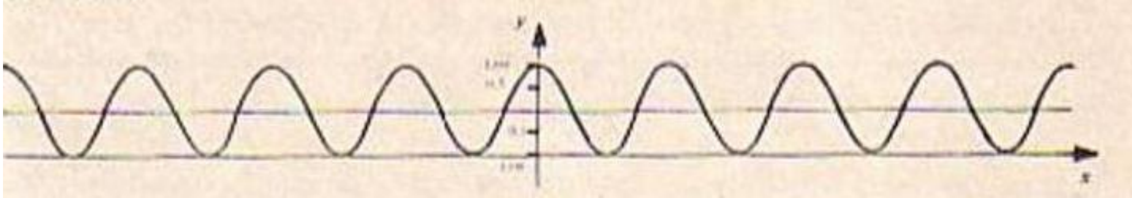
Debes fijarte que todas estas propiedades se han obtenido apoyándonos en la gráfica y propiedades de la función seno.

A continuación proponemos la representación gráfica y el análisis de las propiedades de la función definida por la ecuación:
Y=cos2t
En este caso
¿Qué reprenda el factor 2?
-El factor 2 representa una contracción en el eje “x” ; es decir, la gráfica se obtiene dividiendo por 2 las abscisas en la gráfica de la función coseno.
¿Cómo comprobarlo?
- En este caso podemos construir una tabla, por ejemplo:

X	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$
2x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
Cos2x	1	0,87	0,50	0	-0,5	-,87	-1	-,87	-0,5	0	0,50	0,87

Debes fijarte que cada valor del coseno lo toma en una abscisa que es la mitad de la que corresponde al coseno, por ejemplo:

toma el valor $\frac{1}{2}$ en $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3}$ y el cociente toma valor $\frac{1}{2}$ en $\frac{\pi}{3}$. De esta forma se obtiene un período completo en el intervalo [0;π] que se obtiene dividiendo en dos partes al intervalo [0;2π] .



De esta gráfica podemos obtener las propiedades de la función:

Dom: $\Re$

Imagen: [-1;1]

Ceros: x= $(2k+1)\frac{\pi}{4}$; k∈Z…se obtienen dividiendo por 2 los ceros de y=cosx

Paridad: par

Período: $\frac{k2\pi}{2} = k\pi$ ………se divide por 2 el período

Valor máximo: 1

Puntos de máximo: x= $\frac{k2\pi}{2} = k\pi$ …se dividen por 2 los puntos de máximo

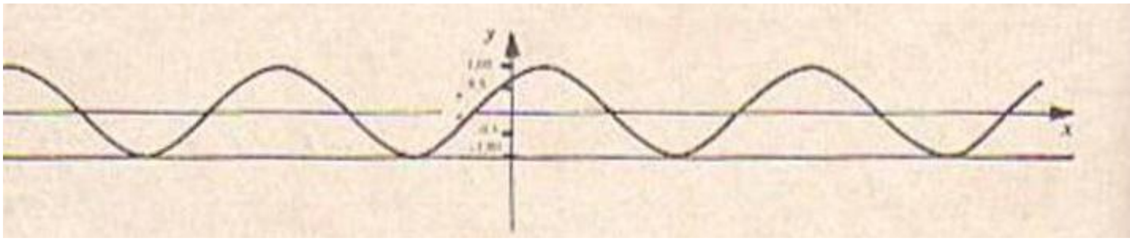
Puntos de mínimo: x= $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ .. se dividen por 2 los puntos de mínimo.

Veamos el siguiente:

Representar gráficamente y analizar las propiedades de la función definida por la ecuación y=sen$\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$

¿qué representa el sumando $\frac{\pi}{4}$?

-Ya sabemos que representa una traslación de $\frac{\pi}{4}$ unidades en el sentido negativo del eje, luego la gráfica se obtiene desplazando la gráfica de la función seno, $\frac{\pi}{4}$ unidades a la izquierda



¿cuáles serían las propiedades que se pueden obtener a partir de la gráfica?

Dom: $\Re$

Imagen: [-1;1]

Ceros: x=kπ-$\frac{\pi}{4}$=(4k-1)$\frac{\pi}{4}$ k∈Z…debes fijarte que se le resta $\frac{\pi}{4}$ a los ceros de la función seno.

Paridad: no tiene

Período: $k2\pi$
Valor máximo: 1

Puntos de máximo: $x=(4k+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=(8k+1)\frac{\pi}{4}$

Valor mínimo: -1

Puntos de mínimo: $x=(4k+3)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=(8k+5)\frac{\pi}{4}$

Fíjate que se resta $\frac{\pi}{2}$ a los puntos de máximo y mínimo de la función.

Es importante que te des cuenta de lo siguiente:
De la misma forma que los casos particulares puede investigarse el caso genera, sin embargo no lo haremos así. En cada oportunidad que sea necesario nos apoyaremos en el análisis del gráfico teniendo en cuenta las siguientes observaciones:

En las funciones definidas por ecuaciones de la forma:

$y=A\text{sen}(\omega t+\varphi)$ $\qquad$ $y=A\cos(\omega t+\varphi)$

|**A**| recibe el nombre de **amplitud de la oscilación**, es el módulo de los valores máximo y mínimo de la función

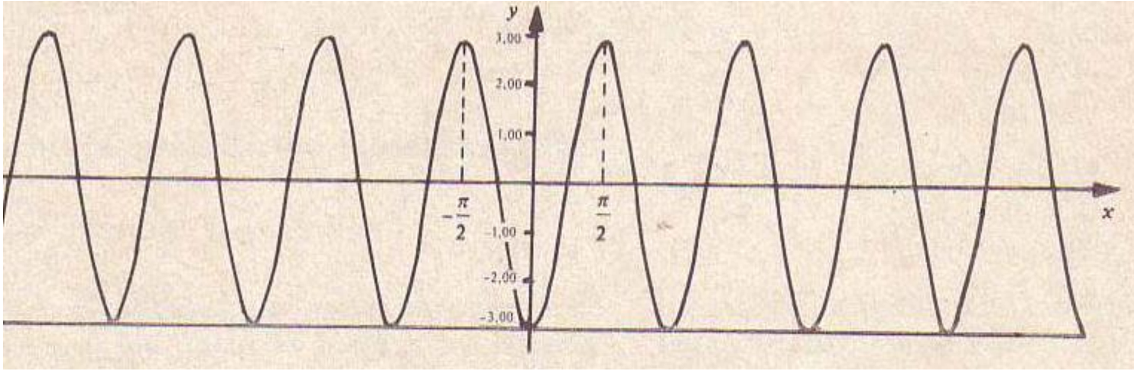
ω está relacionada con el período por la ecuación $\omega=\frac{2\pi}{T}$ y recibe el nombre de **frecuencia angular**

φ representa el valor del argumento cuando t=0.Se llama **ángulo de fase inicial.**

Veamos otro ejemplo:
Representar gráficamente la función definida por la ecuación
$y=3\cos(2t-\pi)$. Determina su amplitud, período y ángulo de fase inicial.
Es obvio que si la comparamos con la ecuación dada con la forma general de las ecuaciones de las oscilaciones armónicas obtenemos:
$|A|=3$; es la amplitud y la imagen será [-3;3]

$\omega=2$; el período será: $T=\frac{k2\pi}{2}=K\pi$

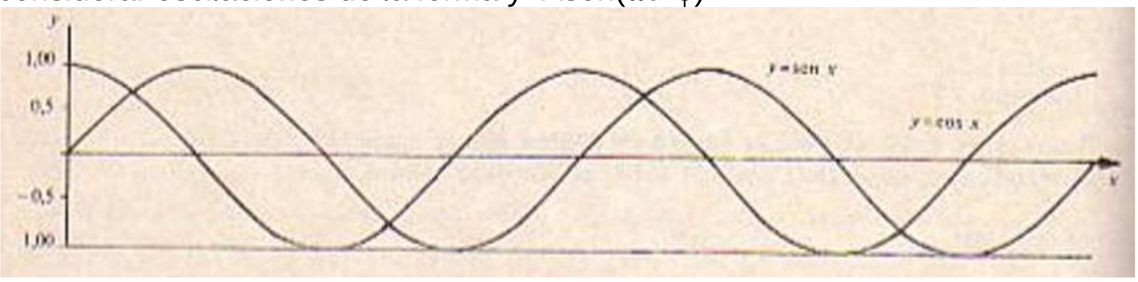
$\varphi=-\pi$ es el ángulo de la fase inicial.
Para representar la función debemos tener en cuenta que su gráfica está comprendida entre las rectas y=3 y y=-3 . Cuando t=0, $y=\cos(-\pi)=\cos\pi=1$ (la fase inicial es $-\pi$) ,luego la gráfica está desplazada. Para hallar el desplazamiento escribimos $y=\cos(2t-\pi)=\cos(t-\frac{\pi}{2})$ y esto significa que la gráfica se ha desplazado $\frac{\pi}{2}$ unidades o sea medio período a la derecha (porque φ es negativo). La función está "atrasada" respecto al coseno (para t=0 su argumento es negativo)



Por otra parte, si observas detenidamente la gráfica te puedes dar cuenta que la gráfica del coseno es la misma del seno pero desplazada $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda.

El seno se "retrasa" respecto al coseno en la cuarta parte de un período.

La gráfica es la misma con un desfasaje de $\frac{\pi}{2}$ y es , por tanto, suficiente considerar oscilaciones de la forma y=Asen(ωt+φ)



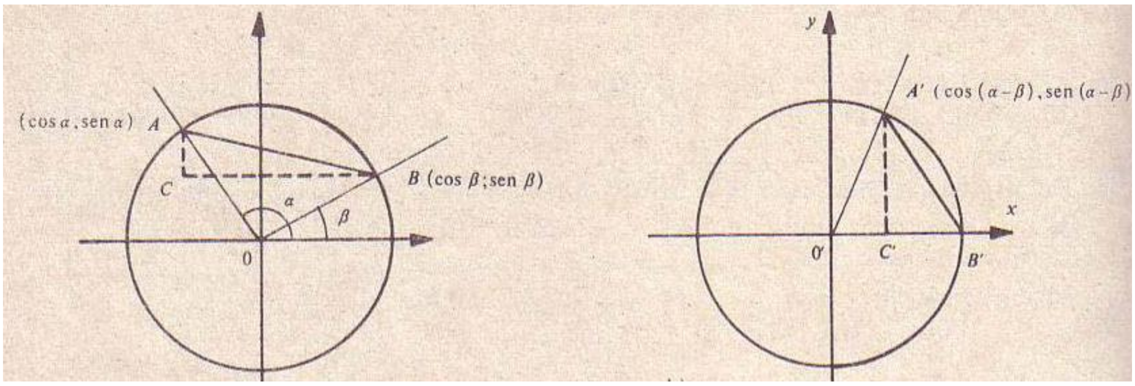
Fórmulas de adición para las funciones seno y coseno.

Las identidades trigonométricas que hemos estudiado hasta estos momentos relacionan los valores de las funciones de un mismo ángulo, sin embargo en la práctica se necesitan identidades que relacionen las funciones de dos ángulos Comenzaremos por enunciar el siguiente teorema que posteriormente demostraremos:

Teorema 1

Para todo par de ángulos α y β se cumple:
cos (α-β) = cos α. cosβ + senα.senβ

¿cómo demostrar esta proposición?
Para esto consideremos en un sistema de coordenadas una circunferencia unitaria (radio 1) con centro en el origen y representemos de dos formas diferentes el ángulo α-β.



No es difícil darse cuenta que $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$
De la igualdad de estos triángulos se deduce que $|AB| = |A'B'|$
Por otra parte el ΔABC es rectángulo de donde tendremos que:

$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2}$ pero $|AC| = |\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta|$ y $|BC| = |\cos\alpha - \cos\beta|$

Sustituyendo obtenemos que:

$|AB| = \sqrt{|\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta|^2 + |\cos\alpha - \cos\beta|^2}$ ……..(1)

Análogamente en el $\Delta\ A'B'C'$ obtenemos que:

$|A'B'| = \sqrt{|1-\cos(\alpha-\beta)|^2 + |\operatorname{sen}(\alpha-\beta)|^2}$ ……….(2)

De (1) y (2) se deduce que :

$|\cos\alpha - \cos\beta|^2 + |\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta|^2 = |\operatorname{sen}(\alpha-\beta)|^2 + |1-\cos(\alpha-\beta)|^2$

Desarrollando algebraicamente esta igualdad tendremos que:
$\cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta) = 2 - 2\cos\alpha.\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta = 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$
finalmente obtenemos:
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta$.

Veamos un ejemplo donde podemos aplicar lo anterior:

Calcula $\cos\frac{\pi}{12}$ conocidas las funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{6}$

R/ ¿Cómo escribir $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{6}$ en función de $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{6}$?

-es evidente que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$

$\therefore \cos\frac{\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}.\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

Veamos otra proposición:

Teorema 2

Para todo par de ángulos α y β se cumple:
a) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta$
b) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta$
c) $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta$

Demostración:
a) Observemos que $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta))$, y apoyándonos en la demostración del teorema 1 tendremos :
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}(-\beta)$
$= \cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta$ ya que $\cos(-\beta) = \cos\beta$ y $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}\beta$
b) En este caso recordemos que
$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right] =$ $\cos\left[(\frac{\pi}{2} - \alpha) - \beta\right] = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha).\cos\beta + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha).\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta$

c) En este caso , ¿de que manera podemos escribir el argumento como una suma?
Pues $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}(\alpha+(-\beta)) =$………fácilmente llegamos a lo pedido.

Trabajo Independiente

1-Calcula $\operatorname{sen}75^0$ utilizando los valores de las razones trigonométricas de los ángulos notables.

2- Simplifica $\operatorname{sen}(x+30^0) + \cos(x+60^0)$

3- Dado $\operatorname{sen}\pi = \frac{5}{13}$; $\operatorname{sen}\beta = \frac{12}{13}$ y sabiendo que ambos ángulos son agudos, halla $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ y $\cos(\alpha+\beta)$.

Respuestas y/o soluciones

1- $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$
2- cos x

3- Como α y β son ángulos agudos , sus cosenos son positivos:
$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$ $\cos\beta = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}$
Aplicando las fórmulas de adición resulta que :
$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta$
$= \left(\frac{5}{13}\right).\left(\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{5}{13}\right).\left(\frac{5}{13}\right) = 1$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta$
$= \left(\frac{12}{13}\right).\left(\frac{5}{13}\right) - \left(\frac{5}{13}\right).\left(\frac{12}{13}\right) = 0$

Fórmulas de adición para la funciones tangente y cotangente.

Anteriormente se vieron las fórmulas de adición de las funciones seno y coseno y sus demostraciones, se analizaron varios ejemplos de sus aplicaciones.
Continuaremos el trabajo pero dedicado en este caso a la funciones tangente y cotangente.
Comenzaremos por enunciar el siguiente teorema

Teorema

Si α y β son dos ángulos tales que $\tan\alpha$, $\tan\beta$ y $\tan(\alpha+\beta)$ están definidas se cumple:

a) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

b) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

Veamos la demostraciones de estas nuevas proposiciones.

a) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}$

¿Qué hacer para “acercarnos” al miembro derecho de nuestra proposición?

-Lógicamente tendríamos que tener cocientes de senos y cosenos para obtener las tangentes de los ángulos α y β, y esto solo lo lograríamos dividiendo el numerador y el denominador por la expresión **cosα·cosβ** resultando:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

b) Dejamos la demostración para el trabajo independiente ya que se demuestra en forma completamente análoga a como se realizó l demostración a).

Veamos a continuación el siguiente ejercicio

1- Prueba que $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cdot\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$

Como es sabido $\cot x=\dfrac{1}{\tan x}$

Luego $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{\tan(\alpha+\beta)}=\dfrac{1}{\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}}=\dfrac{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$

Dividiendo numerador y denominador por $\tan\alpha\cdot\tan\beta$ tenemos:

$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{1}{\tan\alpha\cdot\tan\beta}-1}{\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}}$$ y como $\cot x=\dfrac{1}{\tan x}$ tendremos

$$=\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$$

Después de haber realizado este ejercicio podemos tener presente este resultado como una nueva proporción a memorizar

$$\boxed{\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}}$$

Proponemos como trabajo independiente cot(α-β).

2- Simplifica

$$\frac{\tan(\frac{2\pi}{9}) + \tan(\frac{\pi}{9})}{1 - \tan(\frac{2\pi}{9}) \cdot \tan(\frac{\pi}{9})}$$

R/

Si comparamos con la fórmula para tan(α+β) podemos reconocer que:

$$\frac{\tan(\frac{2\pi}{9}) + \tan(\frac{\pi}{9})}{1 - \tan(\frac{2\pi}{9}) \cdot \tan(\frac{\pi}{9})} = \tan\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{\pi}{9}\right) = \tan\frac{3\pi}{9} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Observa que de esta forma puedes obtener el valor de la expresión en forma exacta y rápida, sin usar calculadoras ni tablas, claro , siempre que estemos lidiando con valores que conducen a ángulos axiales ó notables.

Trabajo independiente

1- Calcula sin hacer uso de tablas ni calculadoras personales el seno , el coseno y la tangente de los siguientes ángulos.

a) 75^0 b) 105^0

2- Simplifica las siguientes expresiones

a) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} + \alpha) + \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha)$

b) $2\cos(\frac{\pi}{6} - \beta) - \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3} + \beta)$

3- Si $\operatorname{sen}\beta = \frac{3}{5}$ y $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ $0^0<\alpha,\beta<90^0$ halla

a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$

b) $\tan(\alpha - \beta)$

Respuestas y/o soluciones

1-

a) sen75^0= $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ cos75^0= $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ tan75^0= $2 + \sqrt{3}$ cot75^0= $2 - \sqrt{3}$

b) sen105^0= $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ cos105^0= $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ tan105^0= $-2 - \sqrt{3}$ cot105^0= $\sqrt{3} - 2$

2- a) $\sqrt{2}(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\beta$

3- a) $\frac{56}{65}$ b) $-\frac{16}{63}$

Funciones trigonométricas del ángulo duplo

Lo fundamental es reconocer que utilizando las fórmulas de adición se pueden expresar las funciones trigonométricas del duplo de un ángulo en términos de las funciones trigonométricas de dicho ángulo.

A continuación presentaremos el teorema y posteriormente pasaremos a demostrarlo tal y como hemos hecho en las clases anteriores

Teorema

Se cumple:

a) $\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$

b) $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$

c) $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \quad \alpha\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2}; \quad \alpha\neq(2r+1)\dfrac{\pi}{4}; \quad k,r\in Z$

Demostración:

En estos casos basta expresar 2α como $\alpha+\alpha$ y realizar un ligero trabajo algebraico.

Veamos:

a) $\operatorname{sen}2\alpha=\operatorname{sen}(\alpha+\alpha)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$

b) $\cos2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$

c) En este caso si $\alpha=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}; k\in Z$ $\tan\alpha$ no está definida, si $\alpha=(2r+1)\dfrac{\pi}{4}; r\in Z$ el denominador se anula. Para los restantes valores de α puede escribirse:

$$\tan2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Es muy importante realizar las siguientes observaciones:

•No basta solo memorizar este teorema donde se recogen tres proposiciones importantes que se utilizarán con mucha frecuencia en el trabajo venidero.

Debemos saber diferenciar la sintaxis y la semántica de cada una de ellas, es decir , lo primero se refiere a la manera de escribirla y lo segundo es el significado.

Por ejemplo:

a)sen2x=2senxcosx

Si observas los argumentos de las funciones te darás cuenta que podemos interpretar que representan un ángulo y su duplo, ó un ángulo y su mitad, depende desde el punto de vista de la interpretación (esto es la parte semántica del problema)

b)sen4x= 2 sen2x· cos2x

En este caso 4x es el duplo de 2x

Otros ejemplos pueden ser:

c) $\operatorname{sen}5x=2\operatorname{sen}\dfrac{5x}{2}\cdot\cos\dfrac{5x}{2}$

d) $\operatorname{sen}x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$

análogamente podemos interpretar las demás proposiciones.

• En el caso de

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

debemos tener en cuenta que como $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ entonces podemos expresar esta proposición en términos de seno ó de coseno

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha - 1$

$\cos 2\alpha=1-2\operatorname{sen}^2\alpha$

Ejercicios propuestos:

1- Si cosx=0,20 y x es agudo, calcula sen2x, cos2x y tan2x

2-Simplifica:

$$\frac{\operatorname{sen}2\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}} \quad \theta \neq k\pi, k\in Z$$

3- Calcula $\operatorname{sen}15^0$, $\cos 15^0$ y $\tan 15^0$ utilizando las funciones trigonométricas de 30^0.

Respuestas y/o comentarios sobre las soluciones

1- si cosx=0,20 entonces $\operatorname{sen}x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-0{,}04} = 0{,}98$

Luego:

$\operatorname{sen}2x=2\operatorname{sen}x\cos x= 2\cdot 0{,}98\cdot 0{,}2=0{,}39$

$\cos 2x=\cos^2x-\operatorname{sen}^2x=(0{,}2)^2-(0{,}98)^2=-0{,}92$

$$\tan 2x = \frac{\operatorname{sen}2x}{\cos 2x} = \frac{0{,}39}{-0{,}92} = -0{,}43$$

2- 4 $\cos\theta$

3- Debes tener en cuenta que $\cos 2\alpha=1-2\operatorname{sen}^2\alpha$ por lo que podemos escribir

$$\cos 30^0 = \cos 2\cdot 15^0 = 1-2\operatorname{sen}^2 15^0$$

$$\therefore \operatorname{sen}^2 15^0 = \frac{1-\cos 30^0}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \operatorname{sen}15^0 = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Análogamente $\cos 15^0 = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

Luego $\tan 15^0 = \dfrac{\operatorname{sen}15^0}{\cos 15^0} = \ldots\ldots\ldots\ldots = 2-\sqrt{3}$

Trabajo independiente

1- Sabiendo que $sen\alpha = \frac{x}{5}$ y $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Calcula sen2α, cos2α y tan2α

2-Demuestra que $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 2sen\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2}$

3- Obtén a partir de las relaciones estudiadas fórmulas para

$sen3x; \cos 3x; sen\frac{x}{2}; \cos\frac{x}{2}$

Respuestas y/o soluciones

1- $sen2\alpha = \frac{2x\sqrt{25-x^2}}{25}$ $\qquad \cos 2\alpha = \frac{25-2x^2}{25}$ $\qquad \tan 2\alpha = \frac{2x\sqrt{25-x^2}}{2x^2-25}$

3-

sen3x=3senx-4sen^{3}x

cos3x=4cos^{3}x-3cox

$sen\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ $\qquad \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

Identidades trigonométricas

Anteriormente hemos encontrado con frecuencia igualdades que satisfacen todos los valores de la variable para los que tiene sentido, son las llamadas identidades.

Estas identidades desempeñan un importante papel en las transformaciones trigonométricas tanto en Matemática como en Ingeniería, por eso le dedicaremos una atención especial.

Es bueno recordar que:

Si f y g son funciones, el dominio de la igualdad f(x)=g(x) coincide con el dominio de la función f(x) – g(x)

Definición 1

Una ecuación de la forma f(x) = g(x) es una identidad si se satisface para cada x del dominio, los números reales que no pertenecen al dominio se llaman valores inadmisibles.

Veamos un ejemplo:

Prueba que: $\frac{\cos^2\alpha - sen^2\alpha}{\cos\alpha + sen\alpha} = \cos\alpha - sen\alpha$ es una identidad

El dominio de la igualdad es $x \in \Re$:x≠ senx+cosx=0 y para esos valores puede escribirse

$$\frac{\cos^2\alpha - sen^2\alpha}{\cos\alpha + sen\alpha} = \frac{(\cos\alpha + sen\alpha)(\cos\alpha - sen\alpha)}{\cos\alpha + sen\alpha} = \cos\alpha - sen\alpha$$

Observa que para los valores de α tales que cosα + senα=0 el miembro izquierdo no está definido y el miembro derecho sí, pero esos valores no pertenecen al dominio y por tanto no hay que considerarlos para decidir si es una identidad.

En la práctica, al comprobar que una igualdad es una identidad, no es necesario escribir los valores inadmisibles explícitamente, pero debe trabajarse con cuidado y garantizar que las transformaciones utilizadas son válidas en todo el dominio. Así por ejemplo, $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ **no puede ser sustituido** por senα en la comprobación de una identidad ya que la cadena de igualdades

$\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{\text{sen}^2\alpha}=\text{sen}\alpha$ solo es válida cuando sen$\alpha \geq 0$ pues

$\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{\text{sen}^2\alpha}=|\text{sen}\alpha|$ pero su dominio es $\Re$, **luego no es una identidad.**

En general, no es fácil verificar que una igualdad es una identidad, sin embargo, muchas veces es sencillo comprobar que una igualdad no es una identidad, pues es suficiente encontrar un valor del dominio que no la satisface.

Veamos:

Comprueba que la igualdad $\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\text{sen}\alpha$ no es una identidad.

R/ Basta encontrar un valor del dominio para el cual no se cumple la igualdad.

Tomemos, por ejemplo, $\alpha=\frac{3\pi}{2}$

$$\sqrt{1-\cos^2\frac{3\pi}{2}}=\sqrt{1}=1\neq -1=\text{sen}\frac{3\pi}{2}$$

Es muy importante tener en cuenta que el procedimiento del ejemplo anterior sólo sirve para comprobar que una igualdad no es una identidad pero no puede ser usado para demostrar que lo es.

1- Determina los valores inadmisibles de la variable en cada una de las siguientes expresiones:

a) $\frac{1}{\cos x}$

b) $\frac{1}{\text{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}$

c) $\frac{\cot x}{\cos x+1}$

d) $\frac{1}{\tan\theta-\cot\theta}$

2-Determina si las siguientes igualdades son identidades

a) $\text{sen}\theta=\tan\theta\cdot\frac{1}{\cos\theta}$

b) $\frac{\cos x}{\text{sen} x}-\tan x=2$

c) $\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\text{sen}^2 x$

Respuestas y/o comentarios

1-

a) $\left\{x=(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in Z\right\}$

b) $\left\{x=\frac{k\pi}{2}, k\in Z\right\}$

c) $\{x=k\pi, k\in\Re\}$

d) $\left\{x=\frac{k\pi}{2} \text{ ó } \quad x=(4k+1)\frac{\pi}{4} \quad \text{ó} \quad x=(4k+3)\frac{\pi}{4}; k\in Z\right\}$

2-

a) No, para $x=\frac{\pi}{4}$ no se cumple

b) No, para $x=\frac{\pi}{4}$ no se cumple

c) Si

Demostración de identidades trigonométricas.

Primeramente debes recordar las identidades fundamentales que debes trabajar y memorizarlas:

1- $\mathrm{sen}^2 x+\cos^2 x=1$ (identidad fundamental de la trigonometría)

de ésta se deducen: $\mathrm{sen}^2 x=1-\cos^2 x$ y $\cos^2 x=1-\mathrm{sen}^2 x$

2- $\mathrm{sen}(x\pm y)=\mathrm{senxcosy}\pm\mathrm{cosxseny}$

3- $\cos(x\pm y)=\mathrm{senxcosy}\pm\mathrm{cosxseny}$

4- $\tan 2x=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$

5- $\frac{1}{\cos^2 x}=\tan^2 x+1$

6-$\frac{1}{\mathrm{sen}^2 x}=\cot^2 x+1$

7- $\mathrm{sen}2x=2\mathrm{senxcosx}$

8- $\cos 2x=\cos^2 x-\mathrm{sen}^2 x$

Teniendo en cuenta (1) tendremos:

$\cos 2x=1-\cos^2 x$ y $\cos 2x=2\cos^2 x-1$

9-$tan2x=\frac{2tanx}{1-tan^2 x}$

Por otra parte debes recordar que si dos ángulos x e y son complementarios (x+y=90^0) entonces se cumple que:

$$sen(90°-x)=cosx$$
$$\cos(90°-x)=senx$$
$$\tan(90°-x)=cotx$$
$$\cot(90°-x)=tanx$$

Aunque no existen reglas de validez general para la demostración de identidades, pueden recomendarse dos procedimientos de trabajo. Ilustraremos estos procedimientos con ejemplos:

Procedimiento I : Trabajar en ambos miembros

Ejemplo 1:

Demuestra la identidad

$$\frac{\cos^2 x}{1-\mathrm{senx}}=1+\mathrm{senx}$$

R/

En el dominio de la identidad se tiene 1-senx≠0 (para que el denominador sea diferente de 0) entonces se pueden multiplicar ambos miembros por 1-senx y obtenemos

$\cos^2$x=(1+senx)·(1-senx)=1-sen^2x

Hemos transformado la identidad original en otra de la cual sabemos que es verdadera. Con esto **no** hemos demostrado la identidad, solo hemos inducido una vía para su demostración; la demostración se realiza **invirtiendo** los

pasos, es decir , comenzando con la igualdad conocida y terminando con la deseamos demostrar
$\cos^2 x=1-\text{sen}^2 x$
$\cos^2 x=(1-\text{sen}x)\cdot(1+\text{sen}x)=$
si $1-\text{sen}x\neq 0$, se divide en ambos miembros y resulta:

$$\frac{\cos^2 x}{1-\text{sen}x}=1+\text{sen}x$$

Para invertir los pasos debemos estar seguro de que todas las transformaciones realizadas pueden ser invertidas, si en alguna se introducen valores inadmisibles no pueden estar en el dominio de la identidad. Eso es lo que ocurre con los valores que anulan 1-senx.

Ejemplo2:
Demuestra la identidad:

$$\tan x+\cot x=\frac{2}{\text{sen}2x} \quad (x\neq\frac{k\pi}{2};k\in Z)$$

R/
En este caso se han indicado cuáles son los valores inadmisibles de la variable, en muchas ocasiones se hace así, de lo contrario debes analizar cuáles son. Para realizar la demostración, transformamos el miembroizquierdo

$$\tan x+\cot x=\frac{\text{sen}x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\text{sen}x}=\frac{\text{sen}^2 x+\cos^2 x}{\text{sen}x\cdot\cos x}=\frac{1}{\text{sen}x\cdot\cos x}$$

Y transformamos el miembro derecho

$$\frac{2}{\text{sen}2x}=\frac{2}{2\text{sen}x\cdot\cos x}=\frac{1}{\text{sen}x\cdot\cos x}$$

Hemos demostrado:

$$\tan x+\cot x=\frac{1}{\text{sen}x\cdot\cos x}=\frac{2}{\text{sen}2x} \qquad (x\neq\frac{k\pi}{2};k\in Z)$$

En este caso hemos utilizado solamente igualdades, eso garantiza que los pasos son reversibles.
Como puedes observar, este procedimiento consiste en lo siguiente:

a) Se transforma la identidad en otra conocida mediante sustituciones y transformaciones algebraicas que pueden afectar ambos miembros, bien sea en forma conjunta (ejemplo1) o independiente (ejemplo2)
b) Se invierten los pasos dados en a) y se deduce la identidad de otras conocidas; para hacerlo es necesario comprobar que los pasos de a) son verdaderamente reversibles. Hay que tener cuidado de que los valores que resultan excluidos al transformar sean valores inadmisibles.

Procedimiento II : Transformar un miembro en otro.

Ejemplo3:
Demuestra las identidades de los ejemplos 1 y 2 trabajando en un solo miembro.

$$\frac{\cos^2 x}{1-\text{sen}x}=1+\text{sen}x$$

En esta identidad escogemos para transformar, el miembro izquierdo ya que ofrece más posibilidades para simplificar:

$$\frac{\cos^2 x}{1-\operatorname{sen}x}=\frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{1-\operatorname{sen}x}=\frac{(1-\operatorname{sen}x)(1+\operatorname{sen}x)}{1-\operatorname{sen}x}$$

Como en el dominio 1-senx $\neq 0$, simplificamos y obtenemos:

$\frac{\cos^2 x}{1-\operatorname{sen}x}=1+\operatorname{sen}x$, como se quería.

Veamos la identidad del ejemplo2

$$\tan x+\cot x=\frac{2}{\operatorname{sen}2x} \quad (x\neq \frac{k\pi}{2}; k\in Z)$$

En esta también escogemos el miembro izquierdo que nos brinda mejores posibilidades

$\tan x+\cot x=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}$ (transformando en senos y cosenos pues hay que llegar a sen2x)

$$\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}=\frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\operatorname{sen}x\cdot\cos x}=\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}2x}{2}}=\frac{2}{\operatorname{sen}2x}$$

Como se aprecia, en la demostración de identidades es necesario recordar y utilizar:

-las identidades trigonométricas fundamentales.
-las fórmulas de reducción
-las operaciones con expresiones algebraicas
-la descomposición factorial
-la simplificación de expresiones algebraicas

En ocasiones, transformamos un miembro y “no llegamos” a obtener la expresión buscada, en este caso , te sugerimos transformar, por separado , el otro miembro hasta encontrar expresiones equivalentes.

Conclusión:

Te sugerimos que al demostrar identidades tengas en cuenta los consejos siguientes:

1-Inicia la demostración por el miembro que te da más posibilidades para transformar. Si no puedes decidirte, aplica el procedimiento de trabajar en ambos miembros(¡atiende a la reversibilidad de los pasos!)
2-Si es posible, utiliza la descomposición en factores o simplifica.
3- Si no se te ocurre un camino para empezar a transformar , reduce todas la´s funciones trigonométricas a senos y cosenos .
4- Ten cuidado de comprobar que todas las transformaciones son válidas en el dominio de la identidad.

Trabajo independiente

1- Prueba las siguientes identidades para los valores admisibles

a) $\tan^2\theta-\frac{1}{\cos^2\theta}=-1$

b) $\frac{\cos^2\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}+\frac{\cos^2\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}=2$

c) $\tan x + \cot x = \dfrac{2}{\operatorname{sen} 2x}$

d) $\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}{\tan^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^4 x}$

Respuestas y/o comentarios

a) No basta expresar a $\tan^2\theta$ en función de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, también debes tener en cuenta que $\cos^2\theta - 1 = -\operatorname{sen}^2\theta$

b) Para mayor comodidad, lo mejor sería extraer factor común y efectuar la suma.

c) El miembro a transformar es el izquierdo, expresando tanx y cotx en función de senos y cosenos y efectuar la suma tendremos:

$\dfrac{1}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$ sin embargo esto difiere del miembro derecho, pero ¿en qué radica tal diferencia?

Observa que por ejemplo, nos haría falta un"2" en el numerador, eso sería muy sencillo, solo bastaría multiplicar por "2" el numerador y el denominador (para no alterar la expresión) y ya con eso llegamos a obtener la expresión buscada.

d) Este ejercicio tiene más de trabajo algebraico, efectuar la suma del numerador y luego el cociente.

Demostración de identidades trigonométricas.

A contuinuación nos enfrentaremos a diferentes tipos de identidades donde podrás aplicar tus conocimientos sobre identidades, valores de razones trigonométricas de ángulos notables y axiales y las habilidades obtenidas en el trabajo algebraico en grados anteriores.

1-Demuestra la validez de las siguientes igualdades , para todo valor admisible de la variable.

a) $(\cos x + \operatorname{sen} x)^2 = \operatorname{sen} 2x + 1$

b) $\left(\cos\dfrac{x}{2} - \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\right)^2 = 1 - \operatorname{sen} x$

c) $\operatorname{sen}(60^0 + x) - \operatorname{sen}(60^0 - x) = \operatorname{sen} x$

d) $\tan(45^0 + a) - \tan(45^0 - a) = 2\tan 2a$

e) $\left(\cot x - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)^2 = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

f) $\cos^4\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha = \cos 2\alpha$

g) $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{1 - \cos 2x} = \dfrac{1}{\tan x}$

h) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1 + \operatorname{sen} 2\alpha} = \tan(\dfrac{\pi}{4} - \alpha)$

i) $\dfrac{1 + \operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = \dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

Soluciones y/o comentarios

1-

a) Desarrollando el binomio nos quedaría la identidad fundamental y la identidad correspondiente al ángulo duplo.

b) Es un trabajo similar a la anterior identidad
 Transformaremos el MI (miembro izquierdo) ,
Desarrollando el binomio al cuadrado nos quedaría
$\cos^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$. En este caso tenemos la identidad fundamental
$\cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 1$ y otra identidad conocida $2\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \operatorname{sen}2\frac{x}{2} = \operatorname{sen}x$

c) Es evidente que el MI es el que intentaremos trasformar, para esto desarrollaremos el seno de la suma y de la diferencia luego sustituiremos los valores de las razones trigonométricas del seno y el coseno de 60^0 y llegamos cómodamente a la expresión del miembro derecho.

d) Acá el trabajo es muy similar al desarrollado en el inciso anterior,, pero algebraica es mucho mas complicado, en este caso aplicando la identidad correspondiente a la tangente de la suma tendremos :

$$\tan(45^0 + a) - \tan(45^0 - a) = \frac{\tan 45^0 + \tan a}{1 - \tan 45^0 \cdot \tan a} - \frac{\tan 45^0 - \tan a}{1 + \tan 45^0 \cdot \tan a} = \frac{1 + \tan a}{1 - \tan a} - \frac{1 - \tan a}{1 + \tan a}$$

$$= \frac{1 + 2\tan a + \tan^2 a - 1 + 2\tan a - \tan^2 a}{(1 - \tan a)(1 + \tan a)} = \frac{2(\tan a + \tan a)}{1 - \tan a \cdot \tan} = 2\tan 2a = MD$$

e) Transformando el MI , te sugerimos primeramente efectuar la suma dentro del paréntesis y luego elevar al cuadrado, después de realizar esta sugerencia tendremos $\frac{(\cos x - 1)^2}{\operatorname{sen}^2 x}$, sin embargo no es conveniente desarrollar el binomio al cuadrado porque nos alejamos un tanto de la expresión del miembro derecho, fíjate que por ejemplo en el denominador del miembro derecho tenemos **1+cosx** y esa expresión la podremos obtener transformando **sen²x**
nos quedaría

$$\left(\cot x - \frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)^2 = \frac{(\cos x - 1)(\cos x - 1)}{1 - \cos^2 x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x - 1)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$$

Otra de las cosas que debes fijarte es que las expresiones **cosx-1** y **1-cosx** son expresiones opuestas , por lo que al simplificarse el resultado es **-1,** resultando:

$$\frac{(\cos x - 1)(\cos x - 1)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \frac{-(\cos x - 1)}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = MD$$

Soluciones y/o comentarios

1-
a) Desarrollando el binomio nos quedaría la identidad fundamental y la identidad correspondiente al ángulo duplo.

b) Es un trabajo similar a la anterior identidad
 Transformaremos el MI (miembro izquierdo) ,
Desarrollando el binomio al cuadrado nos quedaría

$\cos^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2}\mathrm{sen}\frac{x}{2} + \mathrm{sen}^2\frac{x}{2}$. En este caso tenemos la identidad fundamental $\cos^2\frac{x}{2} + \mathrm{sen}^2\frac{x}{2} = 1$ y otra identidad conocida $2\cos\frac{x}{2}\mathrm{sen}\frac{x}{2} = \mathrm{sen}2\frac{x}{2} = \mathrm{sen}x$

c) Es evidente que el MI es el que intentaremos trasformar, para esto desarrollaremos el seno de la suma y de la diferencia luego sustituiremos los valores de las razones trigonométricas del seno y el coseno de 60^0 y llegamos cómodamente a la expresión del miembro derecho.

d) Acá el trabajo es muy similar al desarrollado en el inciso anterior,, pero algebraica es mucho mas complicado, en este caso aplicando la identidad correspondiente a la tangente de la suma tendremos :

$$\tan(45^0 + a) - \tan(45^0 - a) = \frac{\tan 45^0 + \tan a}{1 - \tan 45^0 \cdot \tan a} - \frac{\tan 45^0 - \tan a}{1 + \tan 45^0 \cdot \tan a} = \frac{1 + \tan a}{1 - \tan a} - \frac{1 - \tan a}{1 + \tan a}$$

$$= \frac{1 + 2\tan a + \tan^2 a - 1 + 2\tan a - \tan^2 a}{(1 - \tan a)(1 + \tan a)} = \frac{2(\tan a + \tan a)}{1 - \tan a \cdot \tan} = 2\tan 2a = \mathrm{MD}$$

e) Transformando el MI , te sugerimos primeramente efectuar la suma dentro del paréntesis y luego elevar al cuadrado, después de realizar esta sugerencia tendremos $\frac{(\cos x - 1)^2}{\mathrm{sen}^2 x}$, sin embargo no es conveniente desarrollar el binomio al cuadrado porque nos alejamos un tanto de la expresión del miembro derecho, fíjate que por ejemplo en el denominador del miembro derecho tenemos **1+cosx** y esa expresión la podremos obtener transformando **sen²x** nos quedaría

$$\left(\cot x - \frac{1}{\mathrm{sen}x}\right)^2 = \frac{(\cos x - 1)(\cos x - 1)}{1 - \cos^2 x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x - 1)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$$

Otra de las cosas que debes fijarte es que las expresiones **cosx-1** y **1-cosx** son expresiones ¨opuestas¨, por lo que al simplificarse el resultado es **-1,** no es necesario realizar cambio de signo, resultando:

$$\frac{(\cos x - 1)(\cos x - 1)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \frac{-(\cos x - 1)}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \mathrm{MD}$$

f) $\cos^4\alpha - \mathrm{sen}^4\alpha = \cos 2\alpha$

Algebraicamente el MI puede interpretarse como diferencia de cuadrados, resultando:

$$(\cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x)(\cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x) = \cos^2 2x$$

g) $\frac{\mathrm{sen}2x}{1 - \cos 2x} = \frac{1}{\tan x}$

Transformando el MI (aplicando las identidades correspondientes de los ángulos duplos y un sencillo trabajo algebraico se llega a obtener el MD.

h) $\frac{\cos 2\alpha}{1 + \mathrm{sen}2\alpha} = \tan(\frac{\pi}{4} - \alpha)$

Este es un caso en el que es conveniente trabajar en ambos miembros

Transformando el MI tenemos:

$$\frac{\cos 2\alpha}{1+\operatorname{sen} 2\alpha}=\frac{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x+2\operatorname{sen} x\cos x}=\frac{(\cos x+\operatorname{sen} x)(\cos x-\operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x+\cos x)^2}=\frac{(\cos x-\operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x+\cos x)}$$

Transformando el MD nos quedaría

$$\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}-\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{sen}\alpha}{\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha+\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)}=\frac{(\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)}{(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)}$$

Como puedes apreciar hemos transformado cada miembro por separado obteniendo expresiones equivalentes.

i) $\frac{1+\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$

El trabajo es similar al anterior:
Transformando el MI tenemos:

$$\frac{1+\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}=\frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x+2\operatorname{sen} x\cos x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}=\frac{(\operatorname{sen} x+\cos x)^2}{(\cos x+\operatorname{sen} x)(\cos x-\operatorname{sen} x)}=\frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\cos x-\operatorname{sen} x}$$

transformando el MD:

$$\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=\frac{1+\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}=\frac{\frac{\cos x+\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\cos x}}=\frac{\cos x+\operatorname{sen} x}{\cos x-\operatorname{sen} x}$$

Sin embargo, pudimos transformar el MI y llegar al miembro derecho sin la necesidad de transformar ambos miembros, veamos:

$$\frac{1+\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}=\frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x+2\operatorname{sen} x\cos x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}=\frac{(\operatorname{sen} x+\cos x)^2}{(\cos x+\operatorname{sen} x)(\cos x-\operatorname{sen} x)}=\frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\cos x-\operatorname{sen} x}$$

si observamos, hemos arribado por diferentes caminos a expresiones equivalentes por lo que podemos decir que MI=MD
Sin embargo transformando en solo uno de los miembros podemos arribar al otro sin mucha dificultad, veamos como del miembro izquierdo podíamos llegar a lo buscado:

$$\frac{1+\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}=\frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x+2\operatorname{sen} x\cos x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}=\frac{(\operatorname{sen} x+\cos x)^2}{(\cos x+\operatorname{sen} x)(\cos x-\operatorname{sen} x)}=\frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\cos x-\operatorname{sen} x}$$

Si comparamos la ultima expresión después de las transformaciones con el miembro de la derecha podemos percatarnos que para obtener, por ejemplo, tanx bastaría dividir por **cosx** el numerador **pero para no alterar la expresión** también debemos dividir el denominador quedándonos:

$$\frac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\cos x-\operatorname{sen}x}=\frac{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x}-\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$$

Dejamos propuesto realizar el trabajo en el otro sentido.

Trabajo independiente

1- Demostrar las siguientes identidades para los valores admisibles de la variable.

a) $\frac{\text{sen}2x}{\cos 2x} = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

b) $\text{sen}3x = \text{sen}x(3-4\text{sen}^2 x)$

c) $\frac{\text{sen}^3 2x}{1+\cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x} = \tan x$

d) $\frac{1+\text{sen}x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1-\text{sen}x}$

Respuestas y/o comentarios

a) El trabajo es similar a las identidades realizadas en la clase.

b) Una simple observación nos lleva a cambiar al mismo argumento, en este caso podemos expresar 3x como 2x+x y tendremos:

$\text{sen}3x = \text{sen}x(2x+x) = \ldots$.y aplicando la identidad del seno de la suma, transformando todo a seno y por ultimo extrayendo factor común arribamos a lo deseado.

c) Es evidente que el miembro a transformar es el izquierdo.

Muchos estudiantes en este caso, en el numerador sustituyen sen2x por la identidad correspondiente, luego elevan al cubo y continúan en esa dirección. Pero otros, incursionan primeramente en el denominador para luego analizar el camino mas ventajoso.

Veamos el denominador: $1+\cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x$

Es fácil darse cuenta que estamos en presencia de un polinomio de grado 3 en función de cos2x , el cual se descompone por agrupamiento sin contratiempo alguno , es decir:

$1+\cos 2x - \cos^2 x(1+\cos 2x) = (1+\cos 2x)(1-\cos^2 2x) = (1+\cos 2x)\cdot \text{sen}^2 2x$

Y sustituyendo tenemos:

$$\frac{\text{sen}^3 2x}{(1+\cos 2x)\cdot \text{sen}^2 2x} = \frac{\text{sen}2x}{(1+\cos 2x)} = \frac{2\text{sen}x\cdot\cos x}{1+2\cos^2 x - 1} = \frac{2\text{sen}x\cos x}{2\cos^2 x} = \frac{\text{sen}x}{\cos x} = \tan x$$

d) $\frac{1+\text{sen}x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1-\text{sen}x}$

Estamos en presencia de una identidad que a los alumnos les resulta "compleja" a pesar de ser "tan menudita" , y que muchos se deciden a multiplicar "cruzado" sin tener en cuenta el rigor matemático que debemos tener en estos tipos de demostración.

¿por qué les resulta compleja?

Bueno, porque si nos decidimos a transformar el MI "no sabemos que hacer", lo mismo sucede si la decisión fuese por el derecho.

Pero veamos que hacer en estos casos:

Supongamos que queremos transformar el miembro derecho $\frac{1+\text{sen}x}{\cos x}$

Si nos fijamos en el miembro derecho, por ejemplo, en su numerador tenemos **cosx** que no lo está en el izquierdo, esto sugiere que debe "aparecer", pero , ¿Qué transformación debemos realizar para "tenerlo"?

Simplemente podemos multiplicar y dividir el numerador y denominador de nuestra expresión por **cosx** para poderlo lograr

$\frac{1+\text{senx}}{\cos x}=\frac{(1+\text{senx})\cdot\cos x}{\cos x\cdot\cos x}$ es evidente que nuestra expresión no resultó "alterada" con "esta maniobra", ahora debemos dirigir nuestra atención a que en el numerador "nos sobra" 1+senx ó en el denominador "debe aparecer" 1+senx , para ello bastaría transformar el denominador:

$$\frac{(1+\text{senx})\cdot\cos x}{\cos x\cdot\cos x}=\frac{(1+\text{senx})\cdot\cos x}{\cos^2 x}=\frac{(1+\text{senx})\cdot\cos x}{1-\text{sen}^2 x}=\frac{(1+\text{senx}).\cos x}{(1+\text{senx})(1-\text{senx})}=\frac{\cos x}{1-\text{senx}}$$

que es la expresión deseada.

Ejercicios sobre identidades trigonométricas.

Ahora integraremos lo visto hasta este momento en la trigonometría centrándonos en el desarrollo de habilidades en la demostración de identidades trigonométricas.

A continuación proponemos los siguientes ejercicios

1. Demuestra la siguiente identidad para los valores admisibles de la variable:

$$\frac{\cos 2x+2\cos x+1}{\cos x(\cos x+1)}=2$$

2-Se dan las funciones f(x) = $\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}{\tan(2\pi-x)}$ y g(x) = 2senxcosx.

Prueba que para todos los valores admisibles de la variable se cumple que: f(x) = - cosx.

3-Demuestre la siguiente identidad para los valores admisibles de la variable **x**

$$(1-\tan^2 x)(1-\text{sen}^2 x)=(1-\sqrt{2}\ \text{senx})(1+\sqrt{2}\ \text{senx})$$

4-En la siguiente igualdad indique cuatro valores inadmisibles de la variable del intervalo principal y demuestra la identidad siguiente:

$$\text{sen}2x=\frac{1}{\tan x+\cot 2x}$$

5-Dada la expresión $\frac{\text{sen}^3 x+\cos^3 x}{\text{sen}\,x+\cos x}=\frac{2-\text{sen}\,2x}{2}$

a)¿Para cuáles valores reales de $x\in[0;2\pi]$ no está definida?

b)Prueba que para todos los valores admisibles es una identidad.

6--Dada las expresiones

$$N=\frac{\tan 135^0+5\,\text{sen}\,450^0}{8\cos(-60^0)};\qquad M=1+\frac{2-4\cos^2 x}{\text{sen}\,2x}+\cot x-\tan x$$

a) Halla los valores inadmisibles de la expresión M.

b) Prueba que para todo valor x del dominio de M se cumple que M = N.

7-Tenemos la igualdad $\text{sen}\,4x=\frac{4\cos^2 2x}{\cot x-\tan x}$

a) Escriba cuatro valores inadmisibles de la variable.

b) Prueba que es una identidad para todos los valores admisibles de la variable

Respuestas y/o soluciones

1- $\dfrac{\cos 2x + 2\cos x + 1}{\cos x(\cos x + 1)} = 2$

Esta demostración es sencilla, el trabajo a desarrollar es análogo a varias demostraciones vistas en la clase anterior.

2-Se da la función f(x) = $\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\tan(2\pi - x)}$

Prueba que para todos los valores admisibles de la variable se cumple que:
f(x) = - cosx.

En este caso, transformando el MI debemos darnos cuenta que el numerador se transforma directamente en $\operatorname{sen} x$ y el denominador en $-\cot x$,(fíjate que el argumento responde a la forma de los ángulos en el IV cuadrante, de aquí tendremos que:

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\tan(2\pi - x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{-\cot x} = \frac{\operatorname{sen} x}{-\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{-\operatorname{sen} x} = -\cos x$$

3- $(1 - \tan^2 x)(1 - \operatorname{sen}^2 x) = (1 - \sqrt{2}\operatorname{sen} x)(1 + \sqrt{2}\operatorname{sen} x)$

Al transformar el MI tendremos:

$$(1 - \tan^2 x)(1 - \operatorname{sen}^2 x) = \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)(\cos^2 x) = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

Debes fijarte que la ultima expresión puede ser interpretada como una diferencia de cuadrados $1 - 2\operatorname{sen}^2 x$ que al descomponerla arribamos directamente a la expresión buscada.

4- $\operatorname{sen} 2x = \dfrac{1}{\tan x + \cot 2x}$

a) Nos están pidiendo "solo tres" valores inadmisibles que estén situados en el intervalo principal, basta observar que tanx se indefine si cosx=0 , por lo que $x = \frac{\pi}{2}$ y x=π serían dos de ellos, por otra parte cot2x se indefine para sen2x=0, luego el argumento puede ser 0 ó π "pero" estamos hablando del argumento y no del valor de la variable, en este caso x=0 ó $x = \frac{\pi}{2}$.

b) Para demostrar la identidad podemos transformar el MD, que en nuestro caso es que nos permite "mas libertad".

$$\frac{1}{\tan x + \cot 2x} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x}{2\operatorname{sen} x \cos x}} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}^2 x + 1 - 2\operatorname{sen}^2 x}{2\operatorname{sen} x \operatorname{cox}}} =$$

$$2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$$

5- Es evidente que los valores que indefinen son aquellos que anulan la suma senx+cosx, es decir, los valores para los cuales senx=-cosx y esto se puede interpretar de maneras distintas, por ejemplo son los mismos valores que hacen que tanx=-1 y serían en el II y III cuadrante , en este caso $\frac{3\pi}{4}$ y $\frac{7\pi}{4}$

$$\frac{\operatorname{sen}^3 x+\cos^3 x}{\operatorname{sen}x+\cos x}=\frac{2-\operatorname{sen}2x}{2}$$

Transformando el MI tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen}^3 x+\cos^3 x}{\operatorname{sen}x+\cos x}=\frac{(\operatorname{sen}x+\cos x)(\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2 x}{\operatorname{sen}x+\cos x}$$

Debiste darte cuenta que en el numerador tenemos una suma de cubos
Después de simplificar y aplicar la identidad fundamental nos queda:

$$\frac{(\operatorname{sen}x+\cos x)(\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2 x}{\operatorname{sen}x+\cos x}=1+\operatorname{sen}x\cos x$$

¿Cómo obtener el MD?

En clases anteriores nos habíamos referido a como proceder en estos casos, puedes observar que en la expresión que debemos obtener hay denominador "2" , pues bastaría dividir por "2" para obtenerlo y multiplicar el numerador por "2" el numerador para "no alterar" la expresión , obteniendo:

$$1+\operatorname{sen}x\cos x=\frac{2(1+\operatorname{sen}x\cos x)}{2}=\frac{2+2\operatorname{sen}x\cos x}{2}=\frac{2+\operatorname{sen}2x}{2}$$

6-

$$N=\frac{\tan 135^0+5\operatorname{sen}450^0}{8\cos(-60^0)};\qquad M=1+\frac{2-4\cos^2 x}{\operatorname{sen}2x}+\cot x-\tan x$$

Para calcular el valor de N, debes calcular

$\tan 135^0=-\tan 45^0=-1$, $\operatorname{sen}450^0=\operatorname{sen}90^0=1$ y $\cos(-60^0)=\cos 60^0=\frac{1}{2}$

por lo que N= 1
luego habría que demostrar que M=0, veamos:

$$1+\frac{2-4\cos^2 x}{\operatorname{sen}2x}+\cot x-\tan x=1+\frac{2-4\cos^2 x}{2\operatorname{sen}x\cos x}+\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}-\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$$

$$=\frac{2\operatorname{sen}x\cos x+2-4\cos^2 x+2\cos^2 x-2\operatorname{sen}^2 x}{2\operatorname{sen}x\cos x}=\frac{2\operatorname{sen}x\cos x+2-2\cos^2 x-2\operatorname{sen}^2 x}{2\operatorname{sen}x\cos x}$$

$$=\frac{2\operatorname{sen}x\cos x+2-2(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x)}{2\operatorname{sen}x\cos x}=\frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{2\operatorname{sen}x\cos x}=1$$

7- $\operatorname{sen}4x=\dfrac{4\cos^2 2x}{\cot x-\tan x}$

a) La búsqueda de cuatro valores no admisibles de la variable es similar al ejercicio 4.

b) En la demostración transformaremos el MD $\dfrac{4\cos^2 2x}{\cot x-\tan x}$

después de sustituir cotx y tanx por senos y cosenos, efectuar la diferencia del denominador, simplificar y acomodar el cociente tendremos:

$$\frac{4\cos^2 2x}{\cot x-\tan x}=4\cos 2x\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos x$$

Si desdoblamos el 4 como 2·2 tendremos:

$$2\cdot 2\cos 2x\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos x=2\cdot 2\operatorname{sen}x\cos x\cos 2x=\operatorname{sen}2\cdot 2x=\operatorname{sen}4x$$

Trabajo Independiente

1-Dada la siguiente igualdad $\frac{4sen^2x - \cos 2x + 1}{3sen2x} = \tan x$

a) Indique tres de sus valores inadmisibles

b) Demuestre que es una identidad para los valores inadmisibles de la variable.

2-Dada la siguiente igualdad $\frac{1 - \tan^2 2x}{1 + \tan^2 2x} = \cos(-4x)$

a) Halla los valores inadmisibles de su variable en el intervalo $0<x<2\pi$

b) Prueba que es una identidad para todos los valores admisibles.

Respuestas y/o comentarios

1- a) debes darte cuenta que en el miembro izquierdo el denominador no puede anularse por lo que todo se puede reducir a encontrar tres valores que anulen sen2x, esto sería:

sen2x=0 que equivale a $2x=k\pi$, $k\in R$

$$x = \frac{k\pi}{2}$$

de aquí evaluando k para tres valores enteros cualesquiera por ejemplo para k=0,1,2 obtenemos x=o, $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \pi$.

1b) Partiremos del miembro izquierdo:

MI=$\frac{4sen^2x - \cos 2x + 1}{3sen\,2x} = \frac{4sen^2x - 1 + 2sen^2x + 1}{6senxcosx} = \frac{6sen^2x}{6senxcosx} = \frac{senx}{cosx} = tanx = MD$

luego MI=MD

2-a) es análogo al 1-a)

2b) el miembro izquierdo nos da más posibilidades de trabajo, veamos:

$$MI = \frac{1 - \tan^2 2x}{1 + \tan^2 2x} = \frac{1 - \frac{sen^2 2x}{cos^2 2x}}{1 + \frac{sen^2 2x}{cox^2 2x}} = \frac{\frac{cos^2 2x - sen^2 2x}{cos^2 2x}}{\frac{cos^2 2x + sen^2 2x}{cos^2 2x}} = cos^2 2x - sen^2 2x = cos4x$$

pero cos(-x)=cosx entonces $cos4x = cos(-4x)$=MD

luego se cumple que MI=MD para todos los valores admisibles de la variable.

Aplicaciones de la trigonometría. Resolución de triángulos rectángulos

Veremos algunas aplicaciones de la trigonometría que no solo nos permiten calcular elementos de un triángulo, sino que mediante su uso, es también posible resolver, de un modo sencillo, muchos problemas de la vida práctica cuya solución presentaría grandes dificultades por otros métodos o sería imposible.

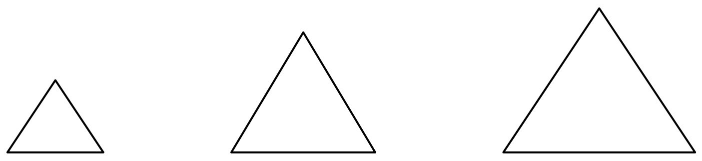
Comenzaremos recordando aspectos teóricos básicos sobre triángulos

-Todo triángulo tiene seis elementos fundamentales: tres lados y tres ángulos.

Sabemos que no todos los elementos de un triángulo pueden ser dados independiente pues existen ciertas relaciones que deben cumplirse. Estas relaciones ligan los elementos de modo que conocidos tres de ellos (uno de los cuales, al menos, debe ser un lado) es posible en ciertos casos calcular los restantes ya que:

Un triángulo está unívocamente determinado si se conocen:
a) Tres lados
b) Dos lados y el ángulo comprendido
c) Un lado y los dos ángulos adyacentes

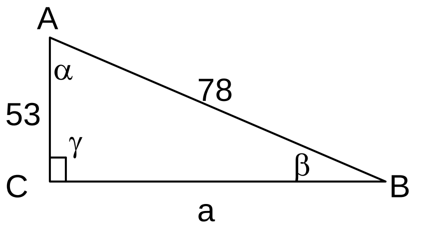
Esto se debe a que en cada uno de esos casos se puede aplicar uno de los criterios de igualdad de triángulos que garantiza su unicidad.
Debes tener muy en cuenta que **siempre es necesario conocer un lado.** Si se tienen los tres ángulos, el triángulo no está unívocamente determinad, pues todos los triángulos semejantes entre sí tiene tres ángulos respectivamente iguales. Por ejemplo, todos los triángulos equiláteros tienen sus tres ángulos iguales a 60^0



Resolver un triángulo es, conocidos tres de sus elementos, calcular todos los elementos desconocidos.

Ahora bien; si el triángulo es rectángulo solo es necesario conocer dos elementos pues uno es conocido siempre, el ángulo recto.

Ejercicios Propuestos:
1- Resuelve el triángulo de la figura:



S/
En ejercicios como este en el que los datos no proceden de mediciones(no representan cantidades de magnitud) generalmente , para mayor comodidad, consideraremos los datos como valores exactos.
En este triángulo conocemos la hipotenusa y un cateto. Para resolver el triángulo debemos hallar el otro cateto y los dos ángulos agudos.
Para calcular el cateto a podemos aplicar el Teorema de Pitágoras

$$a^2 = c^2 - b^2$$
$$a^2 = 78^2 - 53^2 = 3275$$
$$a = 57{,}2$$

Para calcular el ángulo β debemos utilizar una razón trigonométrica de este ángulo, la cual escogemos analizando cuál de ellas lo relacionaron los elementos dados, como conocemos el cateto opuesto y la hipotenusa utilizamos el seno de β.

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{c}$$

$sen\beta = \frac{53}{78} = 0{,}6795$ obteniéndose β= 42,8^0

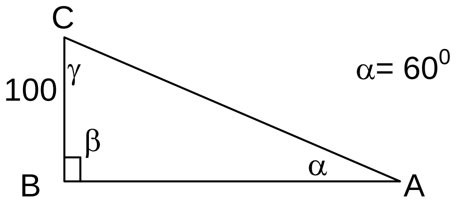
Para hallar el ,otro ángulo (α) seguimos el mismo procedimiento tomando en este caso la función coseno por ser la que lo relaciona con los datos.

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\cos\alpha = \frac{53}{78}$= 0,6795 obteniéndose α= 47,2^0

Quedando de esta manera “el triángulo resuelto”.

2- Calcula los elementos desconocidos en el triángulo



S/ Conocemos un cateto y un ángulo agudo.
Debemos calcular el otro ángulo aguado, la hipotenusa y el otro cateto.
Para calcular el ángulo desconocido (γ) aplicamos la relación γ=90^0-α de donde γ = 90^0-60^0=30^0.
Para calcular uno cualquiera de los lados desconocidos utilizamos, al igual que en el ejemplo anterior, una razón trigonométrica que relacione los elementos dados con el lado que queremos hallar.
Para la hipotenusa (b) utilizamos el coseno de α

$\cos\alpha = \frac{c}{b}$

De donde $b = \frac{c}{\cos\alpha} = \frac{100}{\cos 60^0} = \frac{100}{0{,}5} = 200$

Para hallar el cateto <u>a</u> utilizamos la tangente de α

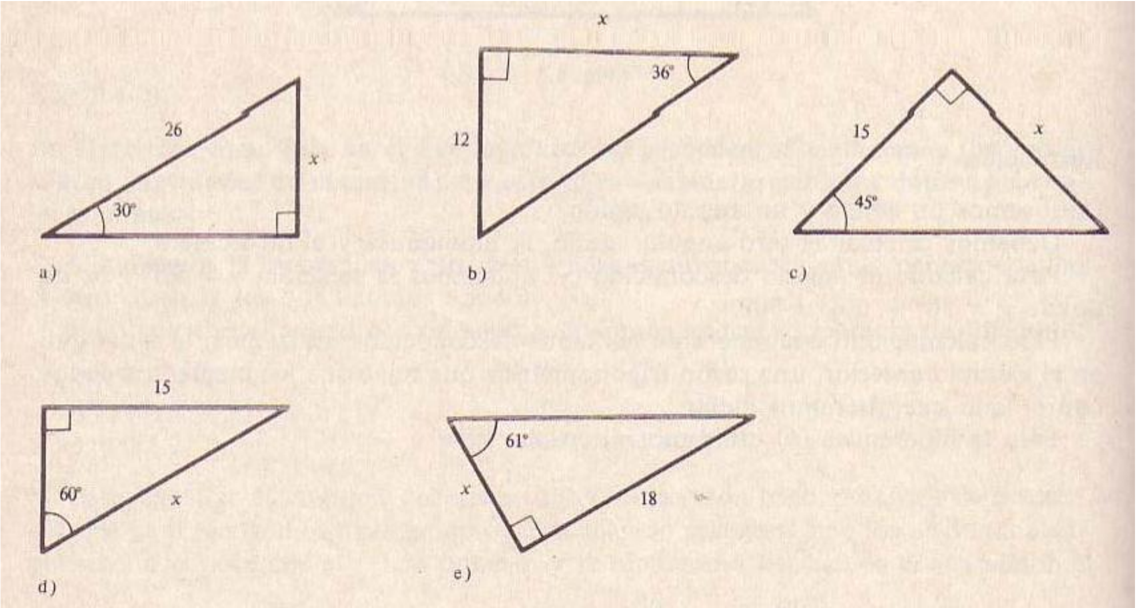
$\tan\alpha = \frac{a}{c}$ de donde a=c·tan60^0=100·$\sqrt{3}$ = 173 y el triángulo está resuelto.

Resumiendo:

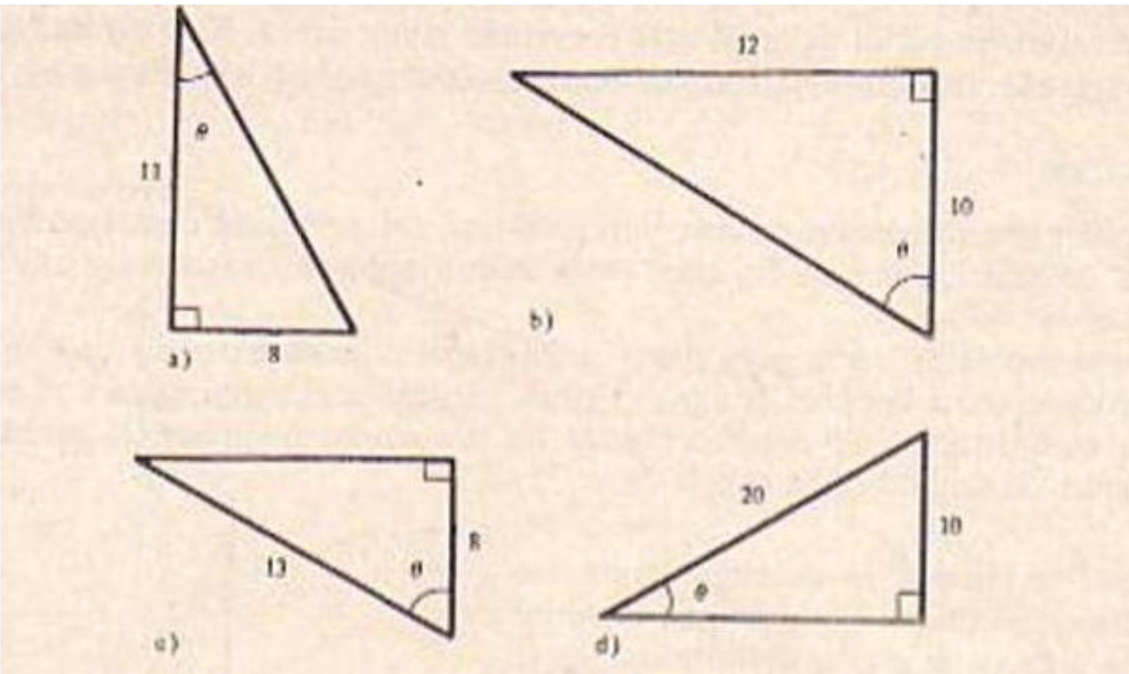
Para resolver un triángulo rectángulo debes seguir los siguientes pasos: 1-Dibujas un triángulo rectángulo señalando los elementos conocidos y desconocidos. 2-Cuando se conoce un ángulo agudo se puede calcular el otro ángulo agudo restándolo de 90^{0}ya que son complementarios. 3-Para hallar un elemento desconocido se escoge una relación que contenga dicho elemento y a otros dos conocidos, y se despeja en ella el elemento que se busca. La relación escogida puede ser una razón trigonométrica o el teorema de Pitágoras.

Trabajo Independiente

1- En los triángulos rectángulos siguientes halle la longitud del lado designado por “x” (el ángulo recto se indica en ella)



2-Halle la medida, en grados, del ángulo designado por θ



3- Halle el valor de "x" en cada uno de los casos siguientes:

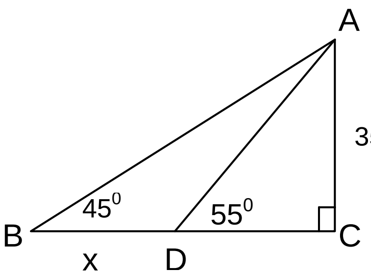


Fig A

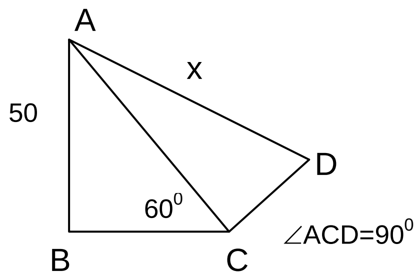


Fig B

Respuestas y/o soluciones

1-

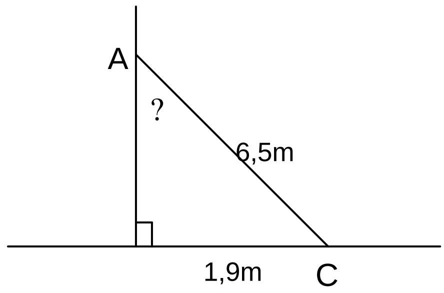
a) 13 b)16,5 c)15 d) 17,3 e) 10

2-
a)36^0 b) $50,2^0$ c) 52^0 d)30^0

3-
Fig A x= 10,5
Fig B x= 63,7

A continuación trataremos problemas vinculados con la realidad donde esté presente la resolución de triángulos rectángulos.
Comenzaremos por el siguiente ejemplo:

1- Una escalera de 6,5 m de largo está recostada a una pared. Si el pie de la escalera está separado de la pared 1,9 m, halla el ángulo formado por la escalera y la pared.
S/
Comenzaremos realizando una interpretación del problema mediante una modelación matemática de este. En estos casos es conveniente confeccionar una figura de análisis.
En el problema dado, para hacer la figura de análisis haremos una abstracción y consideraremos la pared como una línea vertical totalmente recta y el piso como una línea horizontal, sin irregularidades. De este modo, al cortarse la pared y el piso formarán un ángulo recto.



Nótese que para resolver el problema dado no es necesario resolver el triángulo completo ya que solo nos interesa calcular el ángulo que forma la escalera con la pared, o sea, el ángulo α.
Después de hecho este análisis solo nos resta hallar el elemento pedido, para ello utilizaremos el seno del ángulo α.
$\operatorname{sen}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{1,9}{6,5} = 0,292$, luego $\alpha = 17^0$
Por ultimo se debe dar la respuesta al problema planteado
Respuesta: El ángulo que forma la escalera con la pared es aproximadamente de 17^0.

Es bueno aclarar que:

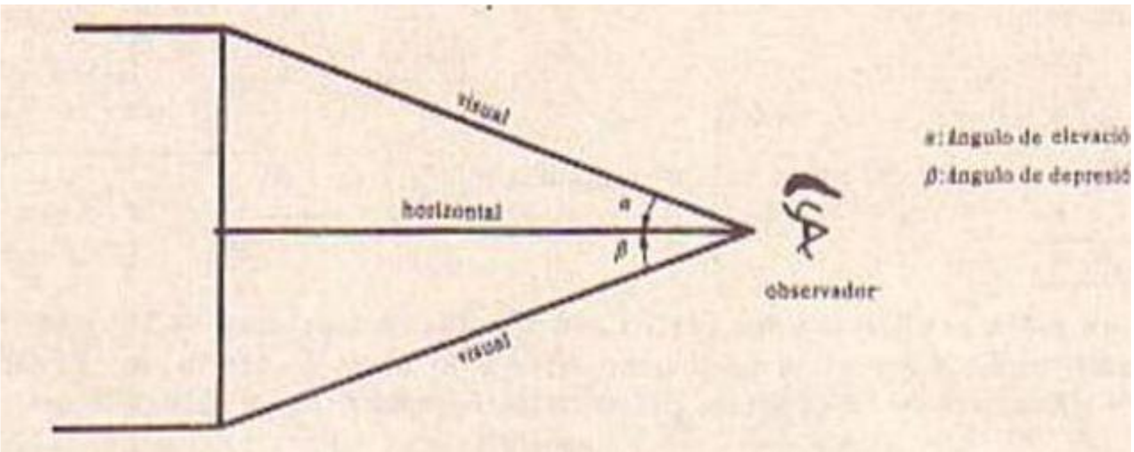
En los ejercicios de texto y problemas donde aparezcan cantidades de magnitud se realizarán los cálculos intermedios sin tener en cuenta la unidad correspondiente, pero en la respuesta si debe considerarse. En estos casos, los datos si son números aproximados luego para el cálculo y la respuesta se debe tener en cuenta que “cuando se calcula con valores aproximados la respuesta debe darse con tantas cifras significativas como el dato que menos número de cifras tenga. Los cálculos intermedios deben realizarse con una cifra significativa adicional; en caso de que esto sea muy engorroso, se pueden realizar con el mismo número que tenga la respuesta”

Antes de proponer los ejercicios restantes sería conveniente precisar algunas cuestiones del lenguaje que será utilizado.

ángulo de elevación: Es el ángulo formado por una línea horizontal y otra cualquiera no horizontal (por encima de la horizontal)

ángulo de depresión: Es el ángulo formado por una línea horizontal y otra cualquiera no horizontal (por debajo de la horizontal)

Cuando se trata de un observador, a esa línea no horizontal que va desde el ojo del observador al objeto se le llama **visual.**



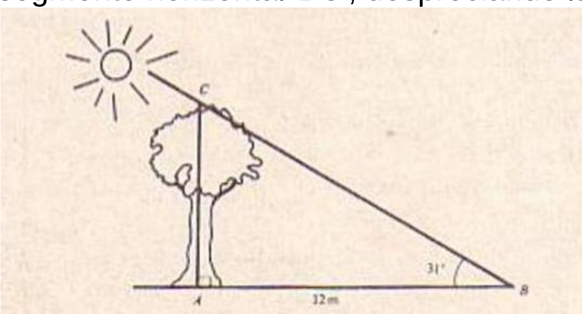
Antes de proponer el siguiente problema consideramos necesario hacer la siguiente aclaración:

ángulo de inclinación del Sol: Es el formado por uno cualquiera de sus rayos y la superficie de la Tierra, considerada horizontal.

2- Un árbol proyecta una sombra de 12 m de largo cuando el ángulo de inclinación del Sol es de 31^0. Halla la altura del árbol.

S/

Consideraremos la altura del árbol como un segmento vertical $\overline{AC}$ que pasa por su centro desde el extremo superior hasta el suelo, y la sombra, como un segmento horizontal $\overline{BC}$, despreciando las irregularidades del suelo.



El ángulo de inclinación del sol lo mediremos, en nuestro caso, como el formado por el suelo y un rayo de sol que pasa por el extremo B de la sombra y por el extremo superior C del árbol. De este modo se forma el ΔABC del cual conocemos el ángulo β (inclinación del sol) y el cateto $\overline{AB}$ (longitud de la sombra). Debemos hallar el cateto $\overline{AC}$ = h, es decir, la altura del árbol, para ello utilizamos:

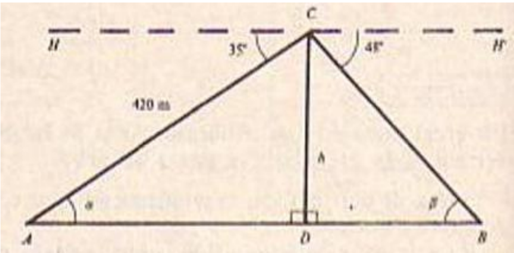
$h = \overline{AB} \cdot \tan\beta = 12 \cdot \tan 31^0 = 12 \cdot 0{,}601 = 7{,}2$

$\therefore$la altura del árbol es aproximadamente 7,2 m.

3- Desde un avión se observan dos barcos con ángulos de depresión de 35^0 y 48^0 respectivamente. Si la distancia del primer barco al avión es de 420 m, ¿a qué altura vuela el avión?, ¿ cuál es la distancia entre los barcos.

S/

Veamos una figura de análisis de la situación planteada



Los puntos A y B representan los barcos y C el avión, $\overline{CD} = h$ altura del avión

Tenemos:

$\overline{AC} = 420$

α=$\angle$ACH=35^0

β=$\angle$BCH´=48^0

Lo anterior es evidente por alternos entre paralelas

En ΔADC, rectángulo en tenemos que h=AC$\cdot$senα=241

Luego h=240 m

Además AD=h$\cdot$cos35^0=420$\cdot$0,819=344 m

En ΔCDB rectángulo en D tenemos

tanβ=$\dfrac{CD}{DB}$

$DB = \dfrac{CD}{\tan\beta}$

$DB = \dfrac{241}{\tan 48^0}$ =217

Pero AB=AD+DB

Luego AB==344+217=561

Respuesta: El avión vuela a una altura de 0,24 km y la distancia entre los barcos es de 0,56 km.

Trabajo Independiente

1- Una torre proyecta una sombra de 86,9 m de largo cuando la altura del Sol sobre el horizonte es de $56{,}5^0$.¿Cuál es la altura de la torre?

2- Un muchacho empinando papalote ha soltado 135 m de cuerda. El papalote se halla situado verticalmente sobre un punto que está a 75 m de distancia del muchacho. Admitiendo que la cuerda no forma onda y sin tener en cuenta la altura del muchacho, ¿a qué altura se encuentra el papalote y cuál es el ángulo de elevación?

3- Un poste se dobló de forma tal que su extremo choca con el piso y dista 8,75 m de la base del poste formando un ángulo de $40{,}4^0$ con el suelo. Halla la altura original del poste.

4-A través del telescopio de una batería antiaérea se observa un avión que se encuentra a 6,3 km de distancia del observador bajo un ángulo de $11,6^0$ ¿A qué altura vuela el avión en el momento de la observación?

Soluciones y/o respuestas
1- 131 m
2- 1,1 hm   ángulo 56^0
3- 19 m
4-1,3 km

Resolución de triángulos no rectángulos. Ley de los Senos.

En el caso de triángulos no rectángulos tendremos que familiarizarnos con nuevas herramientas que nos permitan acceder a su resolución..

Para resolver un triángulo no rectángulo necesitamos conocer como mínimo tres de sus elementos, ya que en este caso no tenemos ningún elemento conocido implícitamente. Uno de los elementos conocidos debe ser, como sabemos, al menos un lado. En el caso de estos triángulos necesitaremos algunos teoremas adicionales a los conocidos para triángulos rectángulos.

Teorema (Ley de los senos)

En todo triángulo, el cociente de la longitud de un lado y el seno del ángulo opuesto a ese lado, es constante e igual al duplo del radio de la circunferencia circunscrita.

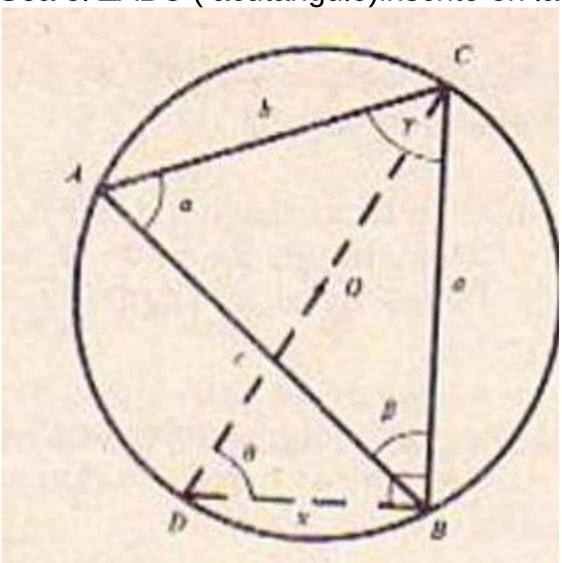
Veamos a continuación su demostración:

Debemos demostrar que en todo ΔABC se cumple:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} = 2R$$

Donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Sea el ΔABC (acutángulo)inscrito en la circunferencia de centro O y radio R



Trazando el diámetro CD se forma el ΔDBC rectángulo en β por estar inscrito en una semicircunferencia.

En ΔDBC tenemos que:

$a = CD \cdot sen\theta$…….(1)

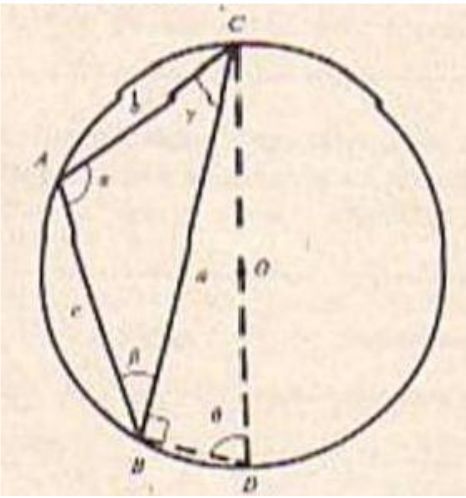
Pero CD= 2R y $\theta=\alpha$ por estar inscrito en el mismo arco ó cuerda, luego

$a = 2R\, sen\alpha$ sustituyendo en (1), de donde $\frac{a}{sen\alpha} = 2R$

Como esto puede hacerse con cualquier ángulo, trazando cada vez el diámetro que pase por su vértice, se obtiene

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} = 2R$$

Como todo triángulo se puede inscribir en una circunferencia, la demostración anterior es válida para cualquier tipo de triángulo. La única diferencia se presenta al considerar el ángulo obtuso de un triángulo obtusángulo.



En este caso, trazando el diámetro CD se obtiene el ΔCBD rectángulo en B en el cual tendríamos que $a=CD\cdot sen\theta$

Ahora bien: $\alpha + \theta = 180^0$ (por estar inscrito en dos arcos cuya suma es 360^0)

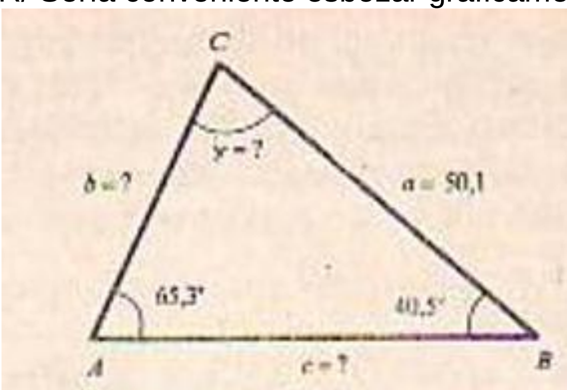
Luego $a=2R\cdot sen(180^0-\alpha)$

$a=2R\cdot sen\alpha$ y la demostración continúa de igual manera

Veamos un ejemplo:

1- Dados $\alpha=65{,}3^0$ $\beta=40{,}5^0$ y $a=50{,}1$; resuelve el triángulo ABC

R/ Sería conveniente esbozar gráficamente la situación:



Es muy evidente apoyándonos en la suma de ángulos interiores de un Δ darnos cuenta que $\gamma=74{,}2^0$

Como conocemos el lado a y el ángulo opuesto α podemos trabajar con la ley de los senos, aunque debemos escoger muy bien las razones de tal manera que no aparezca mas de un elemento desconocido. Así, para hallar el lado b utilizaremos:

$\frac{a}{sen\alpha}=\frac{b}{sen\beta}$ de donde b= $\frac{asen\beta}{sen\alpha}=\frac{50{,}1\cdot sen40{,}5^0}{sen65{,}3^0}=35{,}8$

análogamente para hallar c usamos:

$\frac{a}{sen\alpha}=\frac{c}{sen\gamma}$ de donde c= $\frac{asen\gamma}{sen\alpha}=\frac{50{,}1\cdot 0{,}962}{0{,}909}=53{,}1$

A continuación te proponemos los siguientes ejercicios:

1-Dado el ΔABC si :

a) a=35 b= 22 y α= 45^0. Halla β

b) α=40^0 b= 37 y γ= 32^0. Halla a.

Respuestas y/o comentarios

a) β=$26{,}4^0$

En este ejercicio hay una aplicación directa de la Ley de los senos ya que tienes dos ángulos, el lado que se opone a uno de estos lados y te proponen encontrar la longitud del otro lado que se opone al otro ángulo dado.

b) a=25

En este caso se necesita uno de los siguientes elementos para poder trabajar con la Ley de los senos:

-el lado que se opone al ángulo γ

-el ángulo que se opone al lado

Según los datos que tenemos a mano resulta muy fácil encontrar la amplitud del ángulo β por suma de ángulos interiores en el triángulo dado, una vez hallado β la ley de los senos se aplica directamente.

Trabajo Independiente

1- Dados α=30^0, a= 3 y b= 4. Calcula la amplitud del ángulo β.

2- Dados α=30^0, a= 3 y b= 7. Calcula la amplitud del ángulo β.

Respuestas y/o soluciones

a) Apliquemos la ley de los senos ya que disponemos de todos loes elementos para hacerlo

$$\frac{a}{sen\alpha}=\frac{b}{sen\beta}$$

Despejando, sustituyendo y calculando tendremos senβ=0,6667

Ahora nos tocaría resolver esta ecuación:

En nuestro caso β=$41{,}8^0$ ó β=$138{,}2^0$

Debes observar que estamos en presencia de dos soluciones y no podemos afirmar que el triángulo sea acutángulo, es decir, no sabemos si β es menor o mayor que 90^0.

Por lo tanto estamos en presencia de un ejercicio con dos soluciones posibles pues hay dos triángulos no congruentes con los valores dados de a, b y α.

b) En este caso obtenemos:

senβ= $\frac{bsen\alpha}{a}=\frac{7\cdot 0{,}5}{3}=1{,}17$

y esta ecuación no tiene solución, luego no existe β y por tanto no existe ningun triángulo que satisfaga las condiciones dadas.

Ley de los Senos. Ejercicios y Problemas

Es muy importante retomar los anteriores ejercicios y fijarnos que en ellos existe un caso en el cual se puede asegurar la existencia y unicidad de la solución.

Después de todo lo anterior estamos en condiciones de ver el siguiente teorema:

Un triángulo está determinado unívocamente si se conocen dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

Veamos su demostración:
Supongamos que del ΔABC se conocen dos lados a y b con a > b y el ángulo α opuesto al lado a, para que el Δ esté unívocamente determinado es suficiente que el ángulo β exista y sea único pues entonces: $\gamma=180^0-(\alpha+\beta)$, y se conocen dos lados y el ángulo comprendido, caso ya estudiado.
Trataremos de calcular la amplitud de β utilizando la Ley de los senos

$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$ resultando $\operatorname{sen}\beta=\frac{b}{a}\cdot\operatorname{sen}\alpha$ …..(1)

y como $\frac{b}{a}\cdot\operatorname{sen}\alpha < \operatorname{sen}\alpha < 1$ ya que $\frac{b}{a}<1$

existen dos ángulos β ($0^0<\beta<180^0$) que satisfacen la igualdad (1)
Por otra parte, como b < a resulta $\beta < \alpha$ y por tanto $\beta \le 90^0$ ya que en un triángulo hay a lo sumo, un ángulo obtuso.

De esta forma resulta que existe un único ángulo β, lo que significa que el ΔABC existe y es único.

Te proponemos a continuación el siguiente ejercicio.

1- Resuelve el triángulo ABC sin se sabe que a= 10,4; b= 8,6 y $\alpha=83,2^0$
R/ Como a > b el Δ ABC está unívocamente determinado; para resolverlo aplicamos la ley de los senos para hallar β

$$\operatorname{sen}\beta=\frac{b}{a}\cdot\operatorname{sen}\alpha$$

Luego $\operatorname{sen}\beta=\frac{8,6}{10,4}\operatorname{sen}83,2^0=0,821$ por lo que $\beta=55,2^0$ ó $\beta=124,8^0$ pero esta última no es solución ya que $\beta < \alpha=83,2^0$.
Calculando γ tenemos que por suma de ángulos interiores obtenemos $\gamma=41,6^0$
El lado c se puede calcular de la siguiente manera:

$$c=\frac{a\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{10,4\cdot 0,664}{0,993}=6,91$$

NOTA IMPORTANTE:
Este teorema significa que dos triángulos que coincidan en dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos son iguales, de donde resulta un nuevo criterio de igualdad de triángulos.

Teorema:

Dos triángulos que tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos, son iguales.

Cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto al menor de ellos puede ocurrir que el problema tenga dos soluciones o que exista solución como hemos visto en los ejercicios anteriores.

Pero también en este caso puede ocurrir que exista una única solución si en la igualdad $\text{sen}\beta = \frac{b}{a} \cdot \text{sen}\alpha$ se tiene que $\frac{b}{a} \cdot \text{sen}\alpha = 1$ o sea, el triángulo es rectángulo.

Sería muy bueno aclarar que no trataremos de dar reglas para decidir de qué caso se trata, en cada problema procederemos como en los ejercicios anteriores y determinaremos si hay solución o no y si es única.

Veamos a continuación los ejercicios siguientes:

2- Dado el ΔABC si:

a) b=25, c=50 y $\beta=30^0$. Halla a

b) a=21,3 ; $\alpha=47,3^0$ y b=28,2. Halla β

c) a=20, c=60 y $\alpha=30^0$. Halla γ

3- Resuelve el ΔABC si se sabe que:

a= 422 , b=300 y $\alpha=33,4^0$

Respuestas y/o soluciones

2-

a) a= 43,3

b) $\beta=76,7^0$ ó $\beta=103,3^0$

c) no hay solución

3-

$\beta=23,1^0$ $\gamma=123,5^0$ c=640

Resolución de triángulos no rectángulos. Ley de los cosenos.

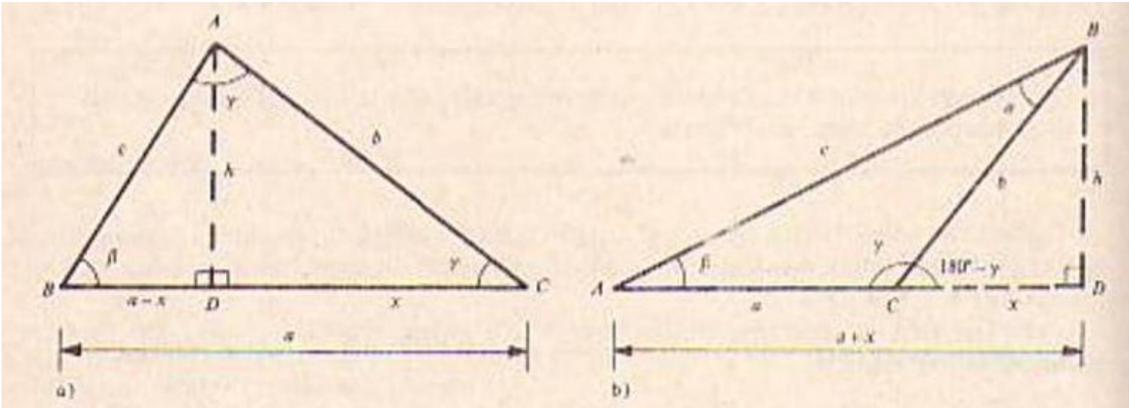
Hasta estos momentos trabajamos con la ley de los senos, la cual nos servía para resolver un triángulo no rectángulo, continuaremos con la resolución de triángulos pero conoceremos otro teorema que también relaciona lados y ángulos.

Teorema: Ley de los cosenos

En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros lados menos el doble producto de las longitudes de estos dos lados por el coseno del ángulo que forman.

Veamos su demostración:

Dibujemos un ΔABC y trazaremos la altura h=AD relativa al lado BC con lo que obtenemos los triángulos ADB y ADC



En ΔADB tenemos (figura a)

$c^2=(a-x)^2 + h^2$

$c^2=a^2-2ax + x^2 + h^2$ (1)

Pero en ΔADC se tiene que $x= b \cos\gamma$ y $b^2= x^2 + h^2$ que sustituyendo en (1)
queda: $c^2= a^2 - 2ab \cos\gamma + b^2$ es decir: $c^2= a^2+b^2- 2ab\cos\gamma$

por otra parte:

En ΔABD tenemos (figura b)

$c^2=(a + x)^2 + h^2$

$c^2=a^2 + 2ax + x^2 + h^2$ (1)

Pero en ΔADC se tiene que $x= b \cos(180^0 - \gamma)$ ó $x= -b \cos\gamma$ y $b^2= x^2 + h^2$ que sustituyendo en (1)
queda: $c^2= a^2 + 2a (-b \cos\gamma) + b^2$ es decir: $c^2= a^2+b^2- 2ab\cos\gamma$

luego: en todo triángulo se cumple:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos\gamma}$$

Trazando las alturas relativas a los otros dos lados obtenemos la sotras dos formas de la ley de los cosenos.

Resumiendo:

Las tres formas de la ley de los cosenos son:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos\alpha$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,ca \cos\beta\gamma$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos\gamma$$

Despejando el coseno en cada una de las expresiones anteriores obtenemos:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Veamos el siguiente ejemplo:

En el ΔABC sabiendo que

Ejemplo 1

En el triángulo ABC sabiendo que: $\alpha = 47°$; $b = 8$ y $c = 10$, calcula el lado a.

Resolución

Como conocemos dos lados y el ángulo comprendido (fig. 4.16), podemos utilizar la ley de los cosenos para hallar el lado a.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$
$$a^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 47°$$
$$a^2 = 64 + 100 - 160 \cdot 0.682 = 54.88$$
$$a = 7.41. \blacksquare$$

Para la práctica y el repaso puedes consultar el libro de texto de Décimo Grado vigente.